Geom.
(Plan. u. Stereom.)

Ma
0
157

Lehrbuch
über
die vornehmsten Aufgaben
aus
der Ebenen- und Körper-Geometrie
nebst
den dazu gehörenden Beweisen
und Erklärungen
für
Schulen und zum Selbstunterrichte

von

D. Aug. Heinr. Christ. Gelpke
Professor der Mathematik und Astronomie am Herzoglichen Collegium Carolinum und Lehrer am Martineum in Braunschweig.

BIBLIOTHEK DES K·B·INFANT· REGIMENTS ERBGROSSHERZOG VON HESSEN.

Mit 1 Tabelle.

Leipzig, bei Gerhard Fleischer dem Jüngern.
1818.

BIBLIOTHECA … ENSIS

Vorrede.

Obgleich Werke über die Geometrie genug vorhanden sind, so wage ich es dennoch dem Publikum hier ein Werk zu übergeben, nach dessen Grundlage ich seit 20 Jahren diese Wissenschaft vorgetragen, und wodurch ich Lust und Eifer für dieselbe bei der mir stets sehr zahlreich anvertrauten Jugend überall erweckt habe.

Da ich hierin so glücklich gewesen bin, so glaubte ich, daß ich kein undankbares Unternehmen beginnen würde, wenn ich diese, weiter ausgeführt und gehörig, meiner Absicht gemäß, bearbeitet, den Lehrern dieser Wissenschaft zur Ansicht und richtigen Beurtheilung vorlegte, um ihnen dadurch Winke zu einem vielleicht nachahmungswürdigen Vortrage derselben zu verschaffen.

Nach meinem Urtheile muß diese Wissenschaft, nicht eine Wissenschaft für einen besondern Stand der Gelehrten, sondern für alle Stände der menschlichen Gesellschaft sein, indem dadurch die Beurtheilungskraft des Menschen geschärft, seine Gedanken geordnet und ihm richtigere und hellere Ansichten von den Dingen in der Welt mitgetheilt werden.

Da diese Wissenschaft demnach für die Jugend so nützlich ist, so glaube ich, daß auch der Vortrag darüber so eingerichtet werden muß, daß jeder, sowol der scharfdenkende, wie auch der minder scharfdenkende Jüngling dieselbe verstehen und solche sich zu eigen machen kann; deswegen habe ich in diesem Werke diejenigen Lehrsätze, von welchen ich bei den Verwandlungen, Eintheilungen, Berechnungen der Flächen und Körper keinen Gebrauch machen konnte, entweder ganz weggelassen, oder als Grundsätze aufgestellt. Hierdurch sind nun nicht allein die Schwierigkeiten des Erlernens dieser Wissenschaft der Jugend sehr vermindert worden, sondern sie wird auch dadurch eher zu dem Nützlichen und Angenehmen derselben hingeführt,

wodurch natürlich Lust und Eifer für dieselbe bei ihr entstehen muß.

In dieser Art des materiellen Vortrages weiche ich demnach von vielen Lehrern dieser Wissenschaft ab, welche durch die Aufstellung der vielen Lehrsätze, ohne die Anwendung davon zu zeigen, die auch von vielen erst in der höhern Geometrie gezeigt werden kann, nur die Schärfung des Verstandes dabei zur Absicht haben, wodurch sie nur einem sehr geringen Theile ihrer Zuhörer und nur dem, der mit besondern Anlagen für diese Wissenschaft ausgerüstet ist, und sich derselben vorzüglich widmen will, nützlich werden *). Diesem Theile werde ich zwar durch meinen Vortrag nicht so nützlich als jene, aber er bekommt dennoch durch den meinigen Winke genug zum eigenen Fortschreiten in derselben; und selten

---

*) Hiervon bin ich durch eine vieljährige Erfahrung überzeugt worden, indem ich in der ersten Classe unseres Gymnasiums die Geometrie mit allen ihren Lehrsätzen streng vortrage, bei welchem Unterrichte nur diejenigen dieser Wissenschaft treu bleiben, welche den ersten Cursus in der 2ten Klasse gehörig benutzt haben, oder die mit besondern Talenten für die Mathematik ausgerüstet sind.

gebraucht dieser Theil auch mehr als Winke, um das in der Mathematik zu leisten, was er darin leisten will, wie mich meine eigene Erfahrung überzeugt hat.

Was die Lehrart selbst anbetrifft, welcher ich mich bei meinem öffentlichen, und, wo es möglich war, auch Privatunterrichte, seit 20 Jahren mit sehr großem Nutzen bedient habe, so habe ich darüber eine ausführliche Beschreibung in der Vorrede des 1sten Theils „meiner Anweisung zum gründlichen Rechnen", die von dem Hrn. Rez. in der allgemeinen Literatur-Zeitung nachahmungswerth genannt wurde, gegeben, und die ich bei der Geometrie nur darin verändere, daß ich Aufgaben zu machen und Lehrsätze zu beweisen hinzufüge, nachdem solche von mir zuvor an der Tafel gezeigt, bewiesen, und die Gründe darüber herausgefragt worden sind.

In diesem Werke findet man demnach eine vollständige Erklärung über alle Gegenstände der Ebnen- und Körper-Geometrie, eine vollständige Anweisung zu jeder Verwandlungsart

der Flächen und zu jeder Eintheilungsart derselben aus der Spitze, aus einem beliebigen Punkte in denselben, mit einer, zwei und allen Seiten parallel. Außerdem ist die Berechnungsart von jeder Fläche und jedem Körper zuerst mit Worten, und hierauf durch Beispiele erläutert, und da, wo es möglich war, sind Formeln, durch Hülfe der Algebra und Integralrechnung, zu einer entweder leichtern Berechnungsart ihrer Räume, oder zur Auffindung ihrer Theile oder Stücke, welche auf die gewöhnliche Art entweder gar nicht, oder nur sehr mühsam berechnet werden können, angegeben und gehörig mit Beispielen unterstützt worden, wovon nur die letzten Formeln bei dem Kegel eine Ausnahme machen *).

---

*) Als ich so eben dieß Werk geendigt und fortgesandt hatte, so wurde mir eine Aufgabe über die Auffindung der Höhe und des Durchmessers bei einer Brantweinblase, nach dem Verhältnisse von 3 zu 5 zugeschickt, und da diese für das praktische Leben sehr wichtig ist, so glaube ich nicht unrecht zu thun, wenn ich die Auflösung davon hier noch hinzufüge.

Wenn der kubische Inhalt derselben $= K =$ 20□′, die Höhe $= H$, der Durchmesser der

Diesem Werke hoffe ich nun noch einen Zusatz von Fragen über die verschiedenen hierin

---

Grundfläche = D und die Grundfläche = G ist, und sich verhalten soll:

$$H : D = 3 : 5, \text{ so ist}$$

1. $H = \frac{3D}{5}$, und da $K = GH$ ist, so ist

2. $\frac{K}{H} = G$. Nun ist aber $G = \frac{\pi D^2}{4}$, nach 297 u. 353.

daher 3. $\frac{K}{H} = \frac{\pi D^2}{4}$; folglich ist

4. $\frac{K}{3D:5} = \frac{\pi D^2}{4}$. Da nun $K = 20$ □′ ist, so ist

5. $\frac{20}{3D:5} = \frac{100}{3D} = \frac{\pi D^2}{4}$; also $\frac{400}{3\pi} = D^3$; also

6. $D = \sqrt[3]{\frac{400}{3\pi}} = \sqrt[3]{\frac{400 \times 9\pi^2}{3\pi \times 9\pi^2}} = \frac{\sqrt[3]{400 \times 9\pi^2}}{3\pi}$

$$= \frac{\sqrt[3]{400 \times 9 \cdot 3{,}14^2}}{3 \times 3{,}14} = \frac{\sqrt[3]{35494{,}5600}}{9{,}42} = \frac{32{,}9}{9{,}42}$$

$$= \frac{32{,}90}{9{,}42} = 3' \, 4'' \, 9''' = D.$$

Da sich nun H zu D verhalten soll, wie 3 : 5, so verhält sich 5 : 3 = 349‴ : x Höhe. Also $H = \frac{3 \times 349'''}{5} = 2' \, 0'' \, 9'''$.

Diese Berechnung, welche hier durch die Ausziehung der Kubikwurzel gemacht worden ist, ist aber weit leichter durch Logarithmen zu machen.

abgehandelten Gegenstände zuzufügen, womit ich zugleich Aufgaben aus demselben zur eigenen Uebung der Schüler, welche tabellarisch von mir bearbeitet werden sollen, damit sie zu einer angenehmen, unterhaltenden und lehrreichen Beschäftigung derselben in ihren Freistunden dienen können, verbinden werde.

Braunschweig im März 1818.

Der Verfasser.

Verzeichniß

der Schriften, welche von dem Verfasser dieses Buches herausgegeben worden sind.

Allgemein-faßliche Betrachtungen über das große Weltgebäude. Hannover 1804. 8.

Gründliche Anweisung zum Rechnen, 2 Theile, wovon der 2te Beispiele auf Tafeln an 1700 enthält. Leipzig 1809 und 1813. 8.

Kurze Darstellung des Weltgebäudes. Leipzig 1809. 8.

Allgemeine Darstellung der Oberfläche der Weltkörper unseres Sonnengebietes. Mit 2 großen illuminirten Kupfern. Leipzig 1811. 4.

Lehrbuch einer populären Himmels- und Erdkunde, mit 4 Kupfertafeln. Leipzig 1815. 8.

Anleitung zur populären Himmels und Erdkunde für Schulen, mit 1 Kupfertafel. Leipzig 1817. 8.

Beschreibung des von dem Verf. erfundenen Uranorama's, bei dem Verf. 1816.

Außerdem werden *), unter der Leitung des Verf., astron. Maschinen zur anschaulichen Darstellung unseres Sonnengebietes, wovon das Nähere in seinem Lehrbuche über die populäre Himmels- und Erdkunde zu finden ist, in der größten Vollkommenheit verfertiget, wovon der Preis, wegen neuerer Vervollkommnungen, jetzt 12 Louisd'ors ist.

---

*) Der Verf. muß hierbei bemerken, daß keiner von seinen Künstlern mit allen dabei vorkommenden Verhältnissen und Einrichtungen vertraut ist, und daß sie daher nur unter seiner Leitung vollkommen dargestellt werden können. Auch ist die ausführliche gedruckte Erläuterung und Anweisung darüber nur in den Händen des Verfassers.

Verzeichniß des Inhalts:

Einleitung.

§ 1. Ueber den Begriff der Geometrie und ihren verschiedenen Theile.
§ 2. Von den verschiedenen Gegenständen der Geometrie.

I. Von den Punkten.

§ 3. Von dem mathematischen Punkte.

II. Von den Linien.

§ 4. Wie eine Linie entstehet, und was eine Linie ist.

a) Von den geraden Linien.

§ 5. Was eine gerade Linie ist.
§ 6. Von den vornehmsten geraden Linien, als: senkrechte, schiefe u. s. w.

b) Von den krummen Linien.

§ 7. Erklärung von einer krummen Linie, und welche vorzüglich dahin gehört.
§ 8 u. 9. Erklärung von einem Kreise und den Theilen welche dazu gehören.
§ 10. Erklärung eines Kreisrandes.
§ 11 u. 12. Erklärungen von konzentrischen und exzentrischen Kreisen.

III. Von den Winkeln.

§ 13—15. Erklärung von dem Winkel, den Theilen desselben, und der verschiedenen Bezeichnungsart desselben.

§ 16—19. Erklärungen von den verschiedenen Arten des Winkels.

§ 20. Wenn Winkel sich gleich sind.

IV. Von den Flächen.

§ 22—29. Erklärung von einer ebenen und unebenen Fläche und dem Unterschiede der Flächen überhaupt.

A. Von den dreiseitigen Figuren.

§ 30. Erklärung von einem Dreiecke.

§ 31—34. Erklärungen von den verschiedenen Arten des Dreiecks.

§ 36. Erklärungen von den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.

§ 37 u. 38. Erklärungen von der Grundlinie und Höhe eines Dreiecks, und der Art, wie diese kann gezogen werden.

B. Von den vierseitigen Figuren.

§ 40 u. 41. Erklärung von einer vierseitigen Figur überhaupt, und darauf von denen, welche dahin gehören, als: Quadrat, Rektangel, Rhombus, Rhomboides, Trapezium und Trapezoides.

§ 43—45. Erklärung von einem Parallelogramm, der Diagonallinie und der Höhe dieser Figur.

C. Von den vielseitigen Figuren oder Vielecken.

§ 46 u. 47. Erklärung von dieser Figur und Eintheilung derselben.

V. Von den geometrischen Körpern.

§ 48—50. Erklärung von einem geometrischen Körper und dessen Eintheilung.

§ 51. Erklärung von einem Tetraedrum, Hexaedrum, Oktaedrum, Dodekaedrum, Ikosaedrum und Kugel.

§ 53 u. 54. Erklärung von einem Prisma, Parallelepipedum, der Pyramide, Walze und dem Kegel, und von der Entstehungsart dieser Körper.

§ 55. Erklärung von der Höhe eines Körpers.

§ 57—62. Von der Messungsart der Linien, Flächen und Körper, und den dazu gehörigen Werkzeugen.

I. Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§ 1. Grundsätze hierzu.

§ 2. Lehrsatz über die Gleichheit der Vertikalwinkel.

§ 3 u. 4. Lehrsatz über die Innern-, Aeußern- und Wechsels-Winkel.

§ 5—8. Lehrsatz über die Parallellinien und Folgen daraus.

§ 9. Ueber die Art, wie Parallel-Linien gezogen werden können.

§ 10 u. 11. Lehrsatz über die Summe der drei Winkel im Dreiecke, daß solche = 180° sei, nebst einigen Anwendungen davon.

§ 12 u. 13. Lehrsatz über den äußern und über die innern Winkel bei einem Dreiecke, daß jener gleich diesen sei, nebst einer Aufgabe darüber.

§ 14—17. Lehrsatz. Der Mittelpunkts-Winkel ist noch einmal so groß als der Peripherie-Winkel, wenn beide gleiche Bogen haben, und einige Aufgaben darüber.

§ 18—31. Grundsätze von den 5 Fällen der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreiecke, und die Anwendung derselben auf die Errichtung und Abtragung der Dreiecke.

§ 32. Aufgabe. Von der Errichtung einer senkrechten Linie aus einem beliebigen Punkte auf einer geraden Linie, nebst dem Beweise.

§ 33. Aufgabe. Aus einem Punkte über einer geraden Li-

nie eine senkrechte Linie nach derselben hinfallen zu lassen, nebst dem Beweise.

§ 34 — 36. Eine gerade Linie, wie auch einen Winkel in zwei gleiche Theile einzutheilen, nebst den Beweisen.

§ 38 — 43. Lehrsatz über die drei Fälle der Gleichheit zweier Parallelogramme, wenn sie gleiche Höhen und gleiche Grundlinien haben; nebst Anwendung desselben auf die Verwandlung eines Quadrats und Rektangels in ein Rhomboides — und eines Rhombus und Rhomboides in ein Rektangel.

§ 44 — 62. Lehrsatz über die Gleichheit der Dreiecke und dessen Anwendung:

I. Auf die Verwandlung jedes Dreiecks in ein anderes beliebiges.

Von § 45 — 54.

II. Auf die Verwandlung jeder vierseitigen Figur in ein beliebiges Dreieck.

Von § 55 — 59.

III. Auf die Verwandlung der Vielecke in Dreiecke.

Von § 60 — 62.

§ 63 — 72. Lehrsatz. Ein Dreieck ist einem Parallelogramme am Raume gleich, wenn beide gleiche Höhen haben, und wenn die Grundlinie noch einmal so lang als die des Parallelogramms ist, nebst Anwendung desselben auf die Verwandlung jedes Dreiecks in ein Parallelogramm, wie auch eines Trapeziums, Trapezoides und jedes Vielecks in ein Parallelogramm.

§ 73 — 77. Lehrsatz über die Verwandlung eines jeden Parallelogramms in ein anderes beliebiges, wozu die Länge einer Seite und ein Winkel gegeben worden ist.

§ 78 u. 79. Die Verwandlung eines Trapeziums und Trapezoides in ein beliebiges Parallelogramm, wozu die Länge der Seite und ein Winkel gegeben sind.

§ 80 u. 81. Die Verwandlung eines jeden Vielecks in ein beliebiges Parallelogramm.

§ 82. Lehrsatz. Ein Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramme, wenn beide gleiche Höhen und Grundlinien haben.

§ 83—93. Lehrsatz. Das Quadrat der Hypothenuse ist am Raume gleich den Quadraten der beiden Catheten, nebst Anwendung desselben auf die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Quadrate.

II. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und deren Eintheilung.

§ 94. Lehrsatz über das Verhältniß der Dreiecke zu einander, wenn sie gleiche Höhen und ungleiche Grundlinien haben.

§ 96. Lehrsatz über das Verhältniß der Dreiecke zu einander, wenn sie gleiche Grundlinien und ungleiche Höhen haben.

§ 97. Ueber das Verhältniß der Parallelogramme zu einander, wenn sie gleiche Höhen und ungleiche Grundlinien oder umgekehrt haben.

§ 98 u. 99. Lehrsatz über das Verhältniß der Dreiecke oder Parallelogramme zu einander, wenn sie ungleiche Grundlinien und ungleiche Höhen haben.

§ 100. Lehrsatz über die verschiedenen Proportionen, welche entstehen, wenn mit der Grundlinie eines Dreiecks eine Linie parallel gezogen wird.

A. Von der Eintheilung der Linien.

§ 102—5. Eine gegebene gerade Linie in 3, 5, $2\frac{3}{4}$ und in $3\frac{2}{5}$ gleiche Theile einzutheilen.

§ 106. Eine gerade Linie so einzutheilen, daß der erste Theil noch einmal so groß, als der zweite, und dieser noch einmal so groß, als der dritte ist.

§ 107. Eine gerade Linie so einzutheilen, daß A = $\frac{1}{2}$, B = $\frac{1}{3}$ und C = $\frac{1}{6}$ davon enthält.

§ 108. Eine gerade Linie nach den gegebenen Theilen einer andern einzutheilen.

§ 109 u. 110. Zu drei gegebenen Linien zuerst die größere, nachher die kleinere 4te Proportionallinie zu suchen.

B. Von der Eintheilung der Dreiecke aus der Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 111 u. 112. Ein jedes Dreieck in 3, 4, 5 u. s. w. gleiche Theile einzutheilen.

§ 113. Von einem Dreiecke ein beliebiges Stück aus der Spitze abzuschneiden.

C. Von der Eintheilung der Dreiecke in gleiche und ungleiche Theile aus einem Theilungspunkte auf der Grundlinie; aus einem beliebigen Punkte auf der Grundlinie; aus einem Punkte in der Fläche, und durch Linien, welche von einer Seite zur andern, aber nicht parallel mit irgend einer Seite, gehen.

§ 114 u. 115. Ein Dreieck in 5 gleiche Theile aus einem Theilungspunkte auf der Grundlinie, und in vier gleiche

Theile aus einem beliebigen Punkte auf derselben einzutheilen.
§ 116. Ein Dreieck aus einem Punkte in der Fläche in zwei gleiche Theile einzutheilen.
§ 117. Ein Dreieck so einzutheilen, daß die Theilungslinien von der einen Seite zur andern, aber nicht parallel gehen.

D. Von der Eintheilung der Vierecke aus einer Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 119—121. Ein Rektangel in drei gleiche Theile — ein Trapezium in 5 gleiche Theile und ein Trapezoides in ungleiche beliebige Theile einzutheilen.
§ 122—126. Von einem Vierecke ein beliebiges Stück abzuschneiden.

E. Von der Eintheilung der Vielecke aus einer beliebigen Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 128 u. 129. Ein Fünfeck in vier gleiche Theile und in ungleiche beliebige Theile einzutheilen.
§ 130. Von einem Siebeneck ein Stück abzuschneiden.
§ 131—133. Grundsätze über die Aehnlichkeit der Dreiecke und deren Anwendung auf den verjüngten Maßstab.
§ 134. Lehrsatz über das Verhältniß der Seiten bei einem Dreiecke, wenn aus der Spitze desselben eine Linie, wodurch jene in zwei gleiche Theile getheilt, nach der Grundlinie gezogen wird.
§ 135. Lehrsatz. Die Flächenräume der Dreiecke verhalten

sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

§ 136. Lehrsatz. Wenn man aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse ziehet, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke und die senkrechte Linie ist die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypothenuse.

§ 137. Ein zweiter Beweis zum § 83, daß das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der Catheten sei.

§ 138. Anwendung der §§ 135 u. 136.

A. Auf die Eintheilung der Dreiecke in gleiche und ungleiche beliebige Theile, bei welchen die Theilungs-Linien mit einer Seite parallel laufen.

§ 139 u. 140. Ein Dreieck in 2 und 3 gleiche Theile mit der einen Seite parallel einzutheilen, nebst den Beweisen.

§ 141. Ein Dreieck in 4 gleiche Theile mit der Grundlinie parallel einzutheilen.

§ 142. Von einem Dreiecke ein beliebiges Stück mit einer Seite parallel abzuschneiden.

§ 143. Ein Dreieck in 4 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit einer, aus der Spitze willkührlich nach der Grundlinie hingezogenen, geraden Linie parallel laufen, nebst dem Beweise.

§ 144. Ein Dreieck in 5 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit der Höhe parallel laufen.

B. Von der Eintheilung der Vierecke in gleiche und ungleiche beliebige Theile, wobei die Theilungslinien mit der einen Seite oder der Diagonallinie parallel laufen.

§ 145—149. Ein Parallelogramm in 3, 4 und 5 gleiche Theile mit einer Seite, und in 6 gleiche Theile mit der Diagonallinie parallel einzutheilen.

§ 150. Ein Trapezium in 4 gleiche Theile mit der Grundlinie parallel einzutheilen, nebst dem Beweise —

§ 151—153 in 2 und 3 gleiche Theile mit der einen Parallelseite parallel, nebst dem Beweise —

§ 154 in drei gleiche Trapezien —

§ 155 in 4 gleiche Theile mit der Diagonallinie parallel einzutheilen.

§ 156. Ein Trapezoides in 3 gleiche Theile mit der Diagonallinie parallel einzutheilen.

C. Von der Eintheilung der Dreiecke und Vierecke in gleiche u. ungleiche beliebige Theile, wobei die Theilungslinien mit zwei Seiten parallel laufen.

§ 157—159. Ein Dreieck in drei — einen Rhombus in vier und ein Trapezoides in drei gleiche Theile einzutheilen, nebst den Beweisen.

D. Von der Eintheilung der Dreiecke, Vierecke und Vielecke in gleiche und ungleiche Theile, wobei die Theilungslinien mit allen Seiten parallel laufen.

§ 160—165. Ein Dreieck in 3, ein Rhomboides in 3, ein Trapezoides in 4, ein reguläres Sechseck in 3, und ein irreguläres Fünfeck in 2 gleiche Theile einzutheilen.

E. Von der mittlern Proportional-Linie und den Verwandlungen der Figuren in Quadrate.

§ 166. Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportional-Linie zu finden.

§ 168. Aus den gegebenen Stücken des Durchmessers die Sehne zu finden.

§ 169. Aus der gegebenen Weite eines Kreisbogens von der Sehne und der Länge der Sehne den dazu gehörigen Durchmesser zu finden.

§ 171. Ein Rektangel in ein Quadrat zu verwandeln.

§ 172. Jede Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

§ 173. Ein Quadrat in ein Rektangel zu verwandeln.

Von den Vielecken insbesondere.

a) Von der Aehnlichkeit derselben.

§ 175 u. 176. Wenn sind zwei Vielecke sich einander ähnlich?

§ 177. Lehrsatz. In ähnlichen Vielecken verhalten sich die gleichnamigen Diagonalen zu einander, wie die gleichnamigen Seiten.

§ 178. Die Durchmesser der Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Umkreise und umgekehrt.

§ 179. Lehrsatz. Aehnliche Vielecke werden durch gleichnamige Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt.

§ 180. Lehrsatz. Die Umkreise ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie jedes Paar gleichnamiger Seiten des einen Vielecks zu jedem Paare gleichnamiger Seiten des andern, und Anwendung davon in § 181.

§ 182. Lehrsatz. Aehnliche Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

§ 183. Die Kreisflächen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

§ 184—190. Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ähnlicher Vielecke und überhaupt ähnlicher Figuren.

b) Ueber die Aufreissung der regulären Vielecke, vermöge des Transporteurs.

§ 191—195. Von der Art, wie reguläre Vielecke gerissen werden.

§ 196. Ein reguläres Achteck einem Kreise einzuschreiben.

§ 197. Zu einer gegebenen geraden Linie das dazu gehörige Fünfeck zu finden.

Von der Aufreissung der Vielecke, ohne Transporteur.

§ 198. Ein reguläres Sechseck —

§ 199. Ein reguläres Zwölfeck rc. in einem Kreise zu beschreiben.

§ 200. Ein reguläres Dreieck —

§ 201. Ein Quadrat —

§ 202. Ein reguläres Achteck —

§ 203. Ein reguläres Zehneck nebst dem Beweise —

§ 204. Ein reguläres Fünfeck —

§ 205. Ein reguläres Neuneck —

§ 206. Ein reguläres Siebeneck in einem Kreise zu beschreiben.

§ 208. Um ein reguläres Dreieck und Viereck einen Kreis zu beschreiben.

§ 209. Auf einer gegebenen geraden Linie ein reguläres Fünfeck —

§ 210. Ein reguläres Sechseck —

§ 211. Ein reguläres Siebeneck —

§ 212. Ein reguläres Achteck —

§ 213. Ein reguläres Neuneck —

§ 214. Ein reguläres Zehneck und alle regulären Vielecke vom Sechs bis Zwölfeck auf einer geraden Linie zu errichten.

Vom Kreise.

§ 215. Jede gerade Linie, welche aus dem Mittelpunkte

des Kreises nach der Sehne senkrecht hingezogen wird, theilt dieselde in zwei gleiche Theile.

§ 217. Zu einem Kreisbogen und einem Umkreise den Mittelpunkt des Kreises zu finden.

§ 218. Zu drei Punkten, die nicht in einer geraden Linie liegen, den Umkreis zu finden.

§ 220—224. Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Kreise.

Von der Eintheilung der Kreise in gleiche und ungleiche Theile.

§ 225 u. 226. Einen Kreis in 3 gleiche Theile und in ungleiche beliebige Theile aus dem Mittelpunkte —

§ 227 u. 228. Einen Kreis in 2 und 3 gleiche konzentrische Kreise —

§ 229. Einen Kreis in 3 gleiche mondförmige Theile einzutheilen.

§ 230. Einen Kreis in zwei andere von gleichem Umfange einzutheilen.

III. Abschnitt.

Von der Berechnung der Flächen und Körper.

A. Der Flächen.

Von dem Quadrate.

§ 231. Was heißt eine Fläche berechnen?

§ 232—234. Von dem Flächenmaße.

§ 235—240. 1) Den Inhalt eines Quadrats a) aus der Seite, b) aus der Diagonallinie —

2) die Seite a) aus dem Inhalte, b) aus der Diagonallinie, und —

3) die Diagonallinie a) aus dem Inhalte und b) aus der Seite zu finden.

§ 241. Formeln, aus welchen jene Berechnungen hergeleitet werden.

Vom Rektangel.

§ 242. Den Inhalt eines Rektangels aus den Seiten zu finden.

§ 243 u. 244. Aus dem Inhalte und einer Seite die andern zu finden.

§ 245 u. 246. Formeln zur Aufsuchung des Inhalts aus der Diagonal und einer Seite — zur Aufsuchung einer Seite aus der Diagonal und der andern Seite, mit Beispielen verbunden.

Vom Rhombus und Rhomboides.

§ 247—249. Den Inhalt derselben aus der Grundlinie und Höhe — und jede dieser Linien aus dem Inhalte und einer von diesen Linien zu finden, mit Beispielen begleitet.

Vom Dreiecke.

§ 251—255. Den Inhalt jedes Dreiecks aus der Grundlinie und Höhe, und jede dieser Linien aus dem Inhalte und einer Linie von demselben zu finden, mit Beispielen verbunden.

A. Von dem rechtwinkligen Dreiecke.

§ 257—259. Formeln zu den verschiedenen Berechnungsarten bei demselben, mit Beispielen begleitet, in welchen der Inhalt aus der Hypothenuse und einer Cathete — die Hypothenuse aus dem Inhalte und einer Cathete und die Cathete aus der Hypothenuse und dem Inhalte gefunden worden sind.

B. Von dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke.

§ 260—266. Formeln, nach welchen 1. der Inhalt a) aus der einen Cathete allein, oder b) aus der Hypothenuse —

2. eine von den Catheten entweder a) aus dem Inhalte, oder b) aus der Hypothenuse — und

3. die Hypothenuse aus einer Cathete oder aus dem Inhalte gefunden werden, mit Beispielen verbunden.

C. Von dem gleichseitigen Dreiecke.

§ 267—271. Formeln, nach welchen 1. der Inhalt aus der Höhe oder aus einer Seite —

2. die Seite aus der Höhe oder aus dem Inhalte — und

3. die Höhe aus der Seite oder aus dem Inhalte berechnet werden, mit Beispielen verbunden.

D. Von dem gleichschenkligen Dreiecke.

§ 272 u. 273. Formeln, nach welchen 1. der Schenkel

a) aus der Grundlinie und Höhe, b) aus dem Inhalte und der Grundlinie —

2. die Grundlinie a) aus der Höhe und dem Schenkel, b) aus dem Inhalte und dem Schenkel —

3. die Höhe a) aus dem Schenkel und der Grundlinie, b) aus dem Schenkel und dem Inhalte —

4. der Inhalt a) aus der Grundlinie und Höhe, b) aus der Grundlinie und dem Schenkel können gefunden werden.

§ 275 u. 276. Die fünf Fälle, in welchen der Inhalt eines Dreiecks berechnet werden kann, wovon der letzte mit einem Beispiele und Beweise versehen ist.

Von dem Trapezium und Trapezoides.

§ 277—279. Den Inhalt dieser Figuren zu finden, mit Beispielen verbunden.

§ 280. Den Inhalt des Trapeziums aus den Parallelseiten und der Höhe zu finden, nebst dem Beweise.

§ 281. Einige Formeln zur Auffindung der hierbei vorkommenden Stücke, mit Beispielen verbunden.

Von den Vielecken.

§ 283—286. Den Flächeninhalt eines irregulären Vielecks nebst Beispielen und Formeln zur Auffindung der verschiedenen bei demselben vorkommenden Stücke.

Vom Kreise.

§ 291. Von dem Verhältnisse des Durchmessers zum Umkreise.

§ 292—294. Aus dem Umkreise den Durchmesser, und aus dem Durchmesser den Umkreis zu finden, mit Beispielen begleitet.

§ 295 u. 296. Den Flächeninhalt eines Kreises aus dem Durchmesser und dem Umkreise, und den eines Kreisrandes aus dem äußern und innern Durchmesser zu finden.

§ 297 u. 298. Formeln, nach welchen der Inhalt aus dem Durch= oder Halbmesser, oder aus der Peripherie allein, und der Durchmesser wie auch die Peripherie aus dem Inhalte des Kreises gefunden werden können, mit Beispielen verbunden.

§ 299. Den Inhalt eines Ausschnittes bei einem Kreise aus dem Durchmesser, nach § 300, aus der Peripherie nach § 301 zu finden.

§ 302 u. 303. Einen Kreisbogen zu berechnen.

§ 304. Den Inhalt eines Segments zu finden.

§ 305—309. Formeln, mit Beispielen verbunden, nach welchen die bei dem Ausschnitte vorkommenden Theile auf eine leichte Art gefunden werden können.

B. Von den Körpern.

§ 310. Was heißt einen Körper berechnen?

§ 311. Von dem Körpermaße.

§ 312. Den Körperinhalt eines Würfels zu finden.

§ 313. Aus diesem Körperinhalte die Seiten wieder zu finden.

§ 314. Die Oberfläche des Würfels zu finden.

§ 315—320. Formeln, mit Beispielen verbunden, durch

welche jedes Stück des Würfels aus bekannten Stücken kann gefunden werden.

Vom Prisma.

§ 321. Von dem Unterschiede der Prismen.

§ 322 u. 323. Von der Berechnungsart des körperlichen Inhaltes desselben, mit Beispielen verbunden.

§ 324 u. 325. Die Oberfläche desselben zu finden, mit einem Beispiele begleitet.

§ 326 u. 327. Einige Formeln zur Auffindung der bei diesem Körper vorkommenden Stücke.

§ 328. Die Prismen verhalten sich zu einander 1. wenn sie gleiche Höhen haben wie ihre Grundflächen, 2. wenn sie gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen, und 3. wenn sie ungleiche Grundflächen und Höhen haben, wie die Produkte aus den Grundflächen in ihre Höhen.

§ 329 u. 330. Aehnliche Prismen verhalten sich zu einander, wie die Würfeln ähnlicher Seiten der Grundflächen, oder wie die Würfeln ihrer Höhen, mit einem Beispiele verbunden.

§ 331 — 333. Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Verwandlung der Prismen in ein Parallelepipedum.

Von der Pyramide.

§ 334 u. 335. Den körperlichen Inhalt der Pyramide zu finden, mit Beispielen verbunden.

§ 336. Die Oberfläche dieses Körpers zu berechnen.

§ 337. Von dem Verhältnisse der Pyramiden zu einander, und der Addition, Subtraktion ꝛc. derselben.

§ 338. Von der Verwandlungsart dieser Körper in ein Parallelepipedum.

§ 339. Den kubischen Inhalt der abgekürzten Pyramide zu finden.

§ 340. Einige Formeln zur leichtern Berechnungsart derselben.

§ 341 u. 342. Die Oberfläche derselben zu finden, mit einem Beispiele verbunden.

Vom Tetraedrum.

§ 343. Von der Berechnungsart dieses Körpers.

Vom Oktaedrum.

§ 344 u. 345. Von der Berechnungsart des kubischen Inhalts und der Oberfläche dieses Körpers, mit einem Beispiele verbunden.

Vom Dodekaedrum und Ikosaedrum.

§ 346 — 349. Von der Berechnungsart des kubischen Inhalts und der Oberfläche beider Körper, mit Beispielen verbunden.

§ 350. Von dem Verhältnisse dieser regulären Körper zu einander.

Von der Walze.

§ 351—352. Von der Berechnungsart des kubischen Inhalts derselben, nebst einem Beispiele.

§ 353. Einige Formeln zur leichteren Berechnungsart derselben.

§ 354 u. 355. Die Oberfläche dieses Körpers zu finden, mit einem Beispiele verbunden.

§ 356. Die Seitenfläche dieses Körpers aus dem Halbmesser und der H.he — den Halbmesser aus der Seitenfläche und Höhe — und die Höhe aus der Seitenfläche und dem Halbmesser zu finden.

§ 357. Die Oberfläche aus der Höhe und dem Halbmesser der Grundfläche — die Höhe aus der Oberfläche und dem Halbmesser — und den Halbmesser aus der Oberfläche und Höhe der Walze zu finden.

§ 359—361. Ueber die Gleichheit, das Verhältniß derselben zu einander und über ihre Addition, Subtraktion u. s. w.

Von dem Kegel.

§ 362 u. 363. Von der Berechnung des kubischen Inhaltes des Kegels, mit einem Beispiele verbunden.

§ 364 u. 365. Einige Formeln zur Aufsuchung der Grundfläche aus dem Inhalte und der Höhe — und der Höhe aus dem Inhalte und der Grundfläche.

§ 366—368. Ueber die Berechnung der Seitenfläche, mit einem Beispiele und einigen Formeln zur Aufsuchung der hierbei vorkommenden Stücke verbunden.

§ 369 — 371. Ueber die Berechnung der Oberfläche, mit einem Beispiele und einigen Formeln zur Aufsuchung der hierbei vorkommenden Stücke begleitet.

§ 373. Ueber das Verhältniß der Kegel zu einander u. s. w.

Von dem abgekürzten rechtwinkligen Kegel.

§ 374. Ueber die Berechnung des kubischen Inhaltes desselben.

§ 375 u. 376. Einige Formeln zu einer noch andern Berechnungsart dieses Kegels, mit einem Beispiele verbunden.

§ 377. Berechnungsart eines Baumes und eines Fasses.

§ 378. Einige Formeln zur Auffindung der bei diesem Kegel vorkommenden Stücke.

§ 379 — 383. Formeln zur Auffindung der krummen Seitenfläche und Oberfläche des abgekürzten Kegels, mit Beispielen begleitet.

Von der Kugel.

§ 384 u. 385. Von der Berechnungsart einer Kugel, mit einem Beispiele.

§ 386. Von dem Verhältniß der Kugeln gegen einander.

§ 387 — 391. Eine andere Berechnungsart des kubischen Inhalts der Kugel, mit einem Beispiele, nebst einigen Formeln zur Auffindung der dabei vorkommenden Stücke.

§ 392 — 397. Von der Berechnung des Kugelabschnittes und des Gürtels, mit Beispielen der Berechnung der Erdzonen begleitet.

Von den verschiedenen Verhältnissen der Körper zu einander.

§ 398. A. Von dem Verhältniß der Kugel, Walze, des Kegels und Würfels zu einander.

B. Von dem Verhältnisse der sechs regulären Körper zu einander.

Einige Zusätze zu den Verwandlungen in der Ebenen-Geometrie.

a) Zu denen des Dreiecks.

§ 399. Ein gleichschenkliges in ein höheres gleichseitiges zu verwandeln, mit dem Beweise.

§ 400. Ein höheres gleichschenkliges Dreieck in ein niedrigeres gleichseitiges zu verwandeln.

§ 401. Von der Verwandlungsart jeder Figur in ein gleichseitiges Dreieck.

b) Zu denen des Vierecks.

§ 402—404. Ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln, und umgekehrt.

Zusätze über π, 2π, $\frac{\pi}{2}$ u. s. w.

§ 1.

Erklärung. Die Geometrie ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit den Ausdehnungen der Dinge in ihre Länge, Breite und Dicke (Höhe) beschäfftiget. Zu ihr gehören daher folgende Theile: 1. die Longimetrie, das ist die Lehre von den Linien. 2. Die Planimetrie, das ist die Lehre von den Ebenen oder Flächen, und 3. die Stereometrie, d. i. die Lehre von den Körpern.

§ 2.

Zusatz. Die Gegenstände der Geometrie sind demnach folgende: 1. Punkte, 2. Linien, 3. Winkel, 4. Flächen oder Figuren und 5. Körper.

I. Von den Punkten.

§ 3.

Erkl. Ein mathematischer Punkt ist ein Ding, welches keine Ausdehnung nach irgend einer Seite

hat, und den man sich daher nur als den Anfang oder das Ende einer Linie vorstellen kann. Wird demnach ein solcher mit Dinte, Kreide ꝛc. gemacht, so stellt dieser nur den Ort des mathematischen Punktes, nicht aber denselben selbst dar.

II. Von den Linien.

§ 4.

Erkl. Bewegt sich ein Punkt von einem Orte zu einem andern, so entstehet eine Linie. Geschiehet diese Bewegung des Punktes in einer unveränderten Richtung, so entstehet eine gerade Linie. Geschiehet sie aber in einer veränderten Richtung, so entstehet eine krumme Linie.

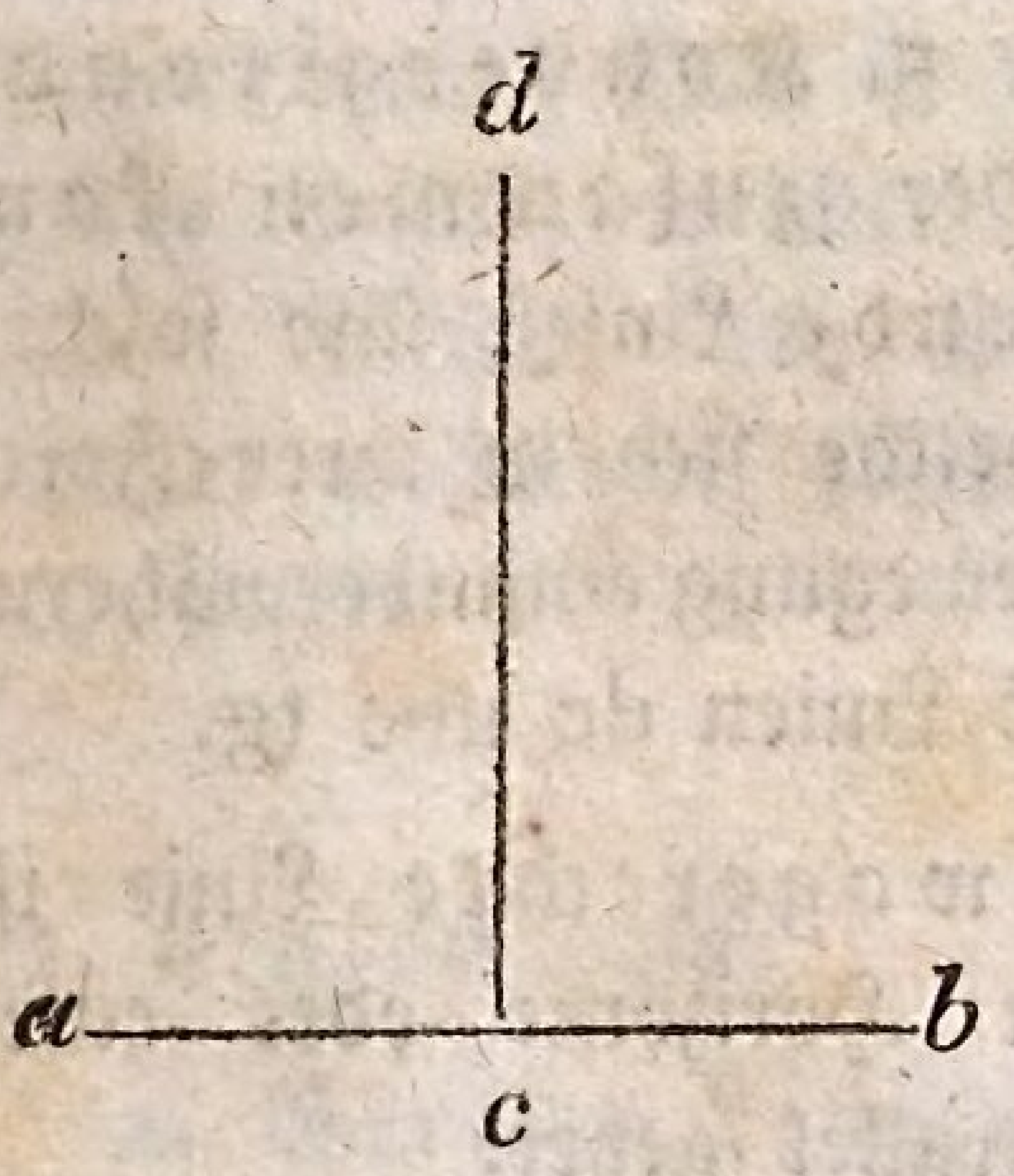
a. Von den geraden Linien.

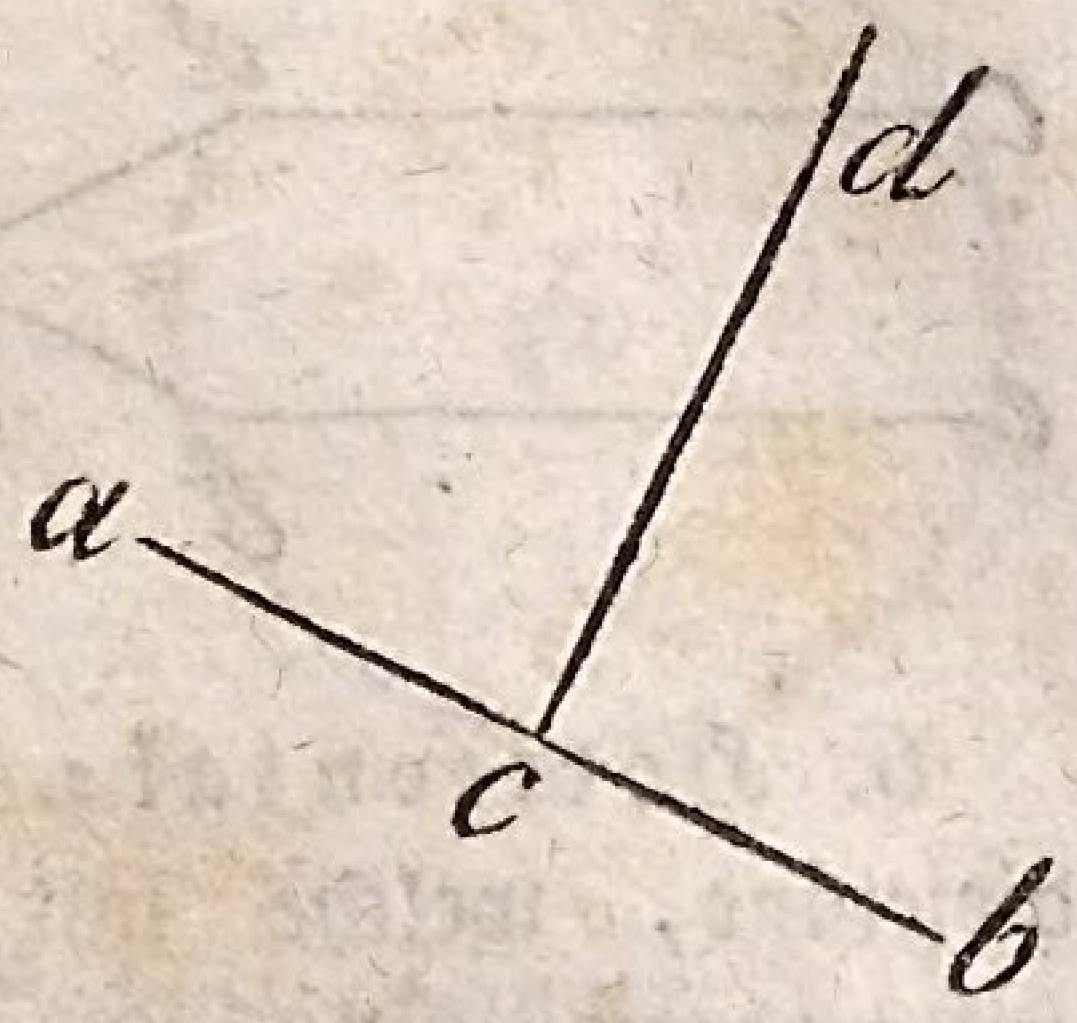
§ 5.

a —————————— *b* Erklärung. Eine gerade Linie ist daher eine Ausdehnung in die Länge, ohne alle Breite und Dicke, in welcher ihre Theile in einer unveränderten Richtung, oder nach einer gleichen Richtung liegen. S. Linie ab.

§ 6.

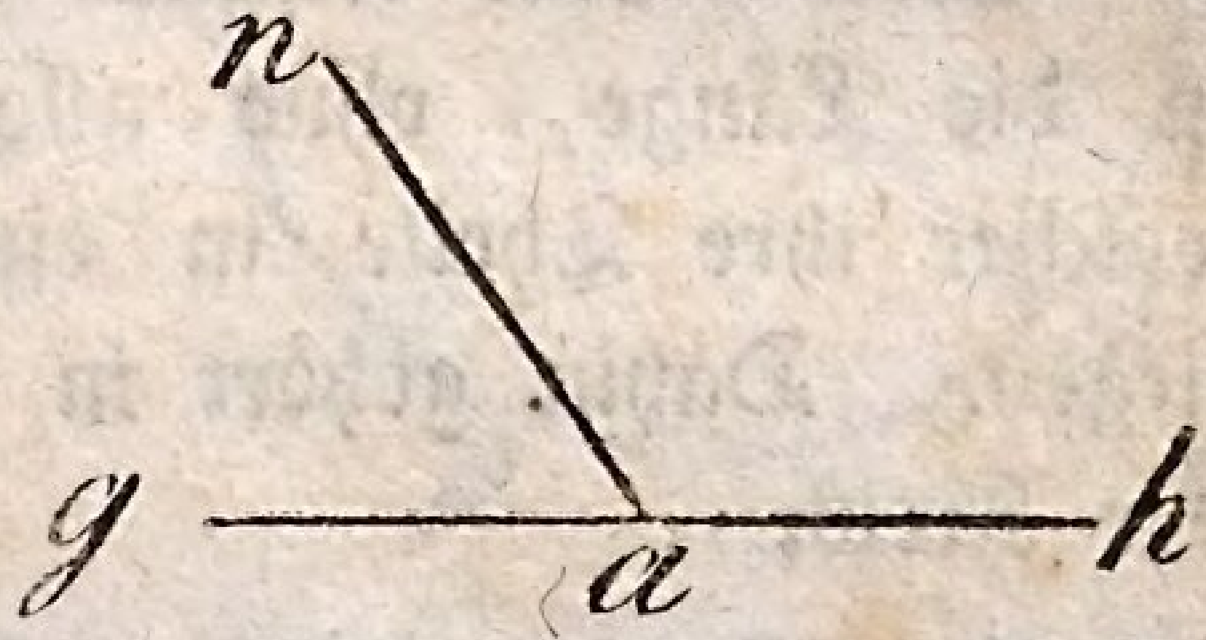
Erkl. Zu ihr gehören demnach folgende gerade Linien:



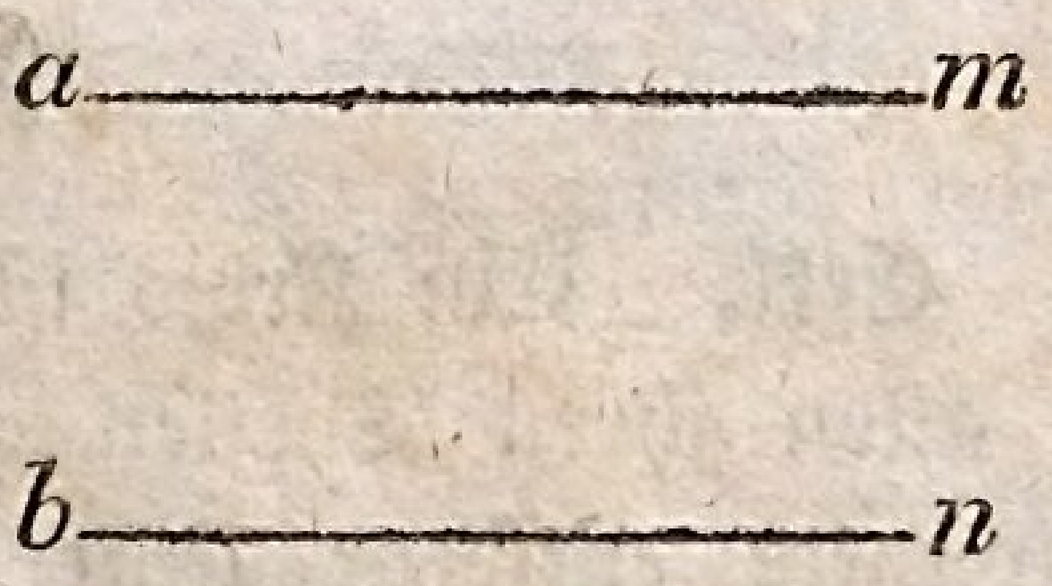


1. Die senkrechte oder Perpendikular= lothrechte oder Normal=Linie. S. Linie cd auf ab. Diese ist eine solche, welche auf einer andern so gerichtet stehet, daß sie sich nach der einen Seite nicht mehr als nach der andern hinneigt.

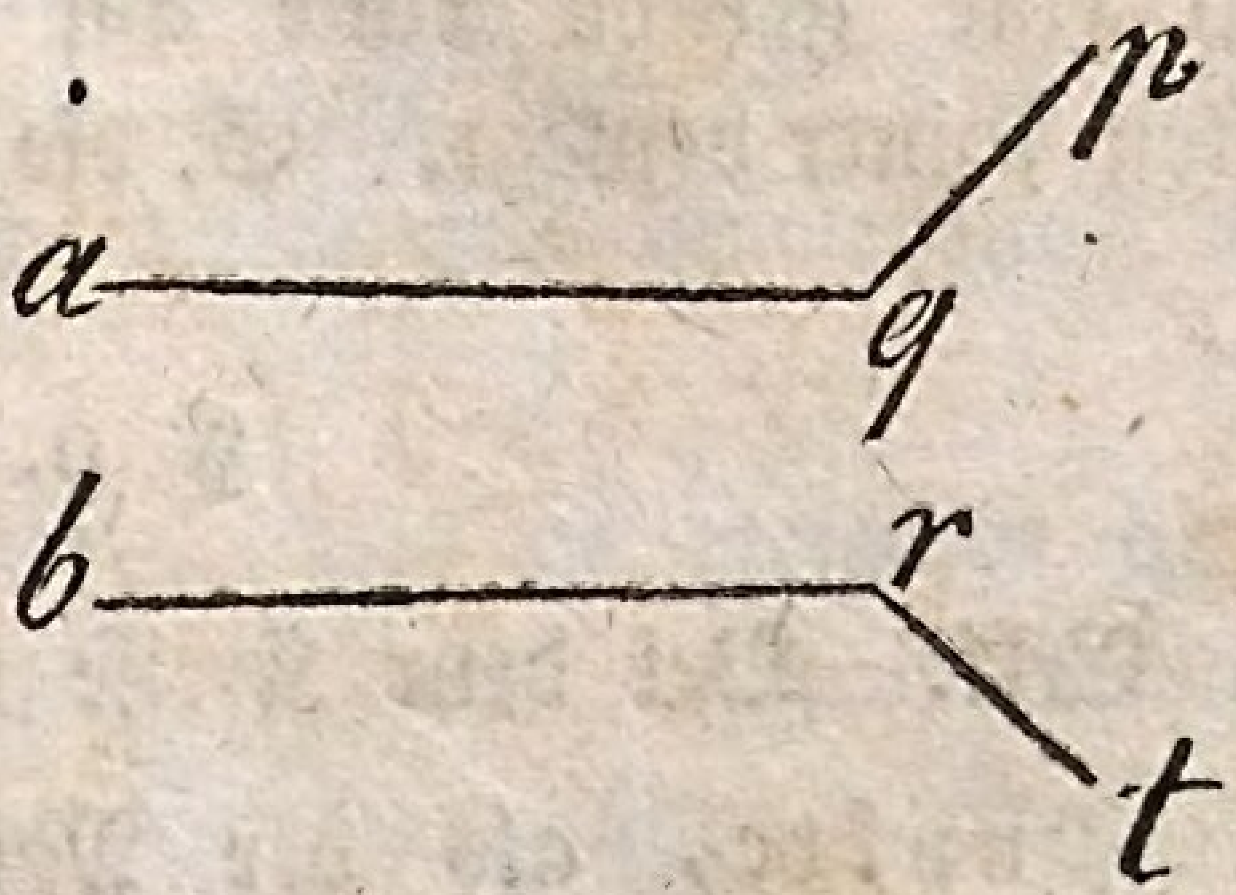
2. Die schiefe Linie ist eine solche, die sich nach der einen Seite mehr, als nach der andern hinneigt. S. Linie an.

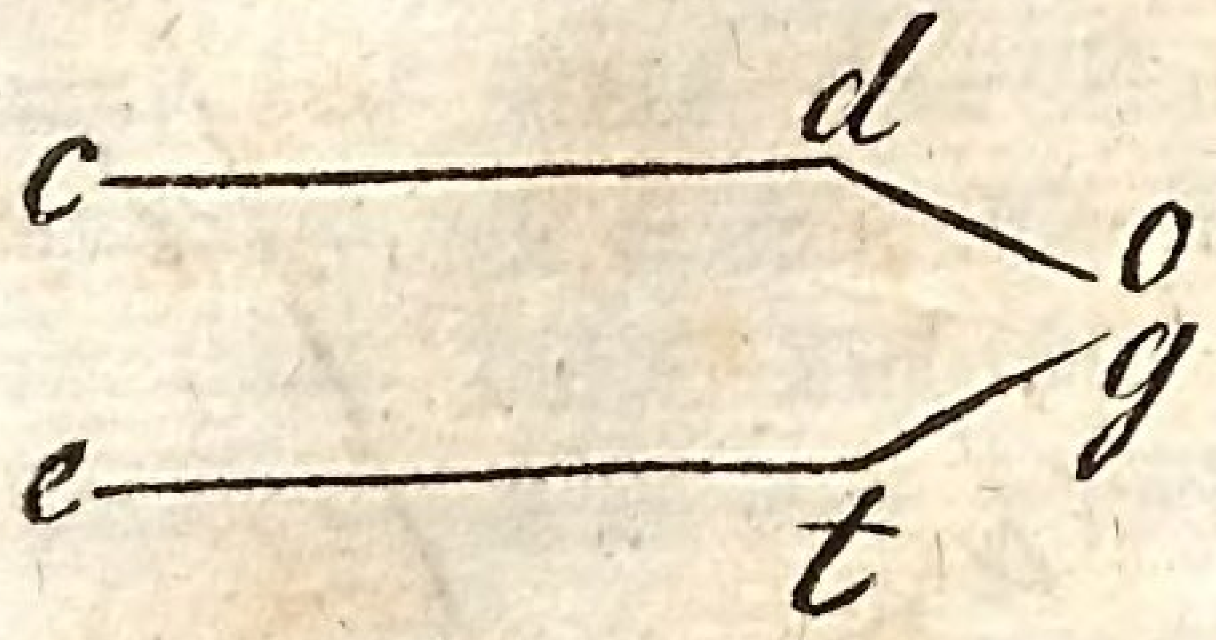


3. Parallel=Linien sind solche, welche in ihrer Fortbewegung stets eine gleiche Weite von einander behalten. S. L. am u. bn.



4. Divergirende oder auseinander laufende Linien sind solche, welche sich in ihrer Fortbewegung immer mehr von einander entfernen. S. L. qp u. rt.





5. Konvergirende oder zusammen laufende Linien sind solche, welche sich in ihrer Fortbewegung einander nähern. S Linien do und tg.

6. Horizontal= oder wagerechte Linie ist diejenige, welche mit dem Horizonte oder einer stillstehenden Wasserfläche parallel gehet.

b. Von den krummen Linien.

§ 7.

Erkl. Eine krumme Linie ist eine Ausdehnung in die Länge, ohne alle Breite und Dicke, in welcher ihre Theile in einer veränderten Richtung liegen. Dahin gehört in der Elementar=Geometrie der Kreis.

§ 8.

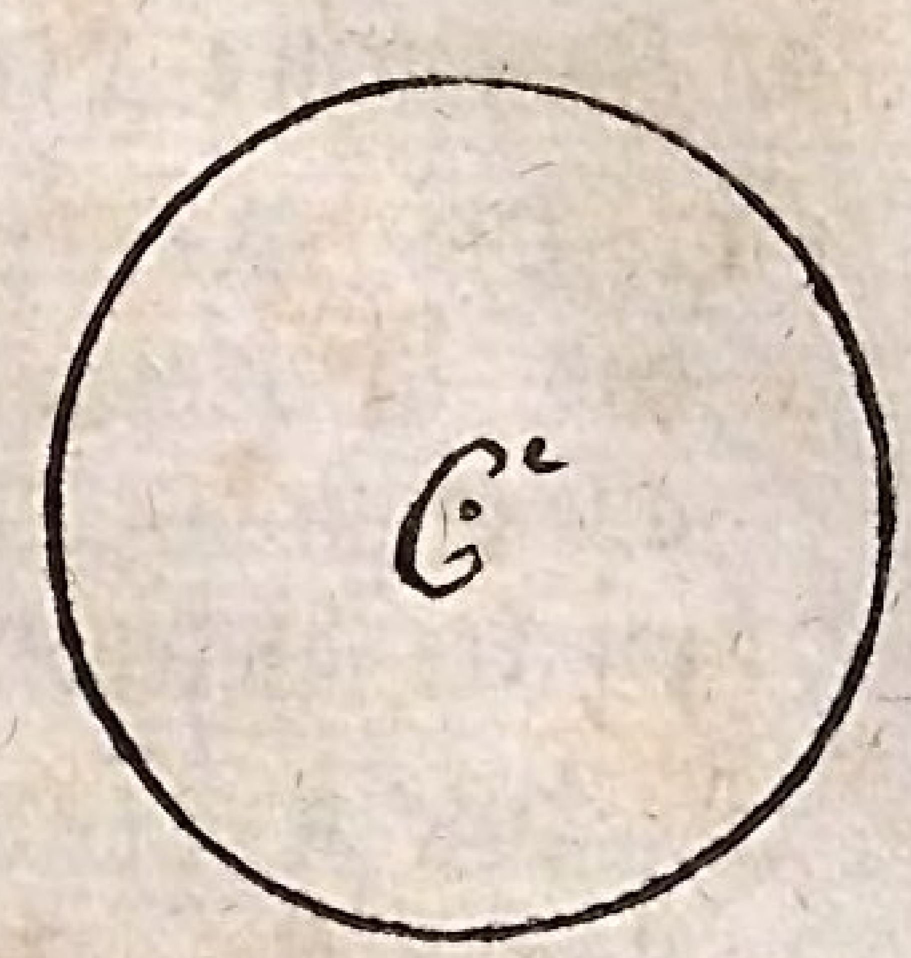
Erkl. Ein Kreis ist eine krumme Linie, welche in allen ihren Theilen gleich weit von einem Mittelpunkte entfernt liegt. Und er entstehet, wenn sich eine gerade Linie auf einer Fläche um einen festen Punkt bewegt. S. die erste Fig. d. folg. Seite.

§ 9.

Erkl. Bei dem Kreise kommen vor:

A. Punkte, als der Mittelpunkt oder das

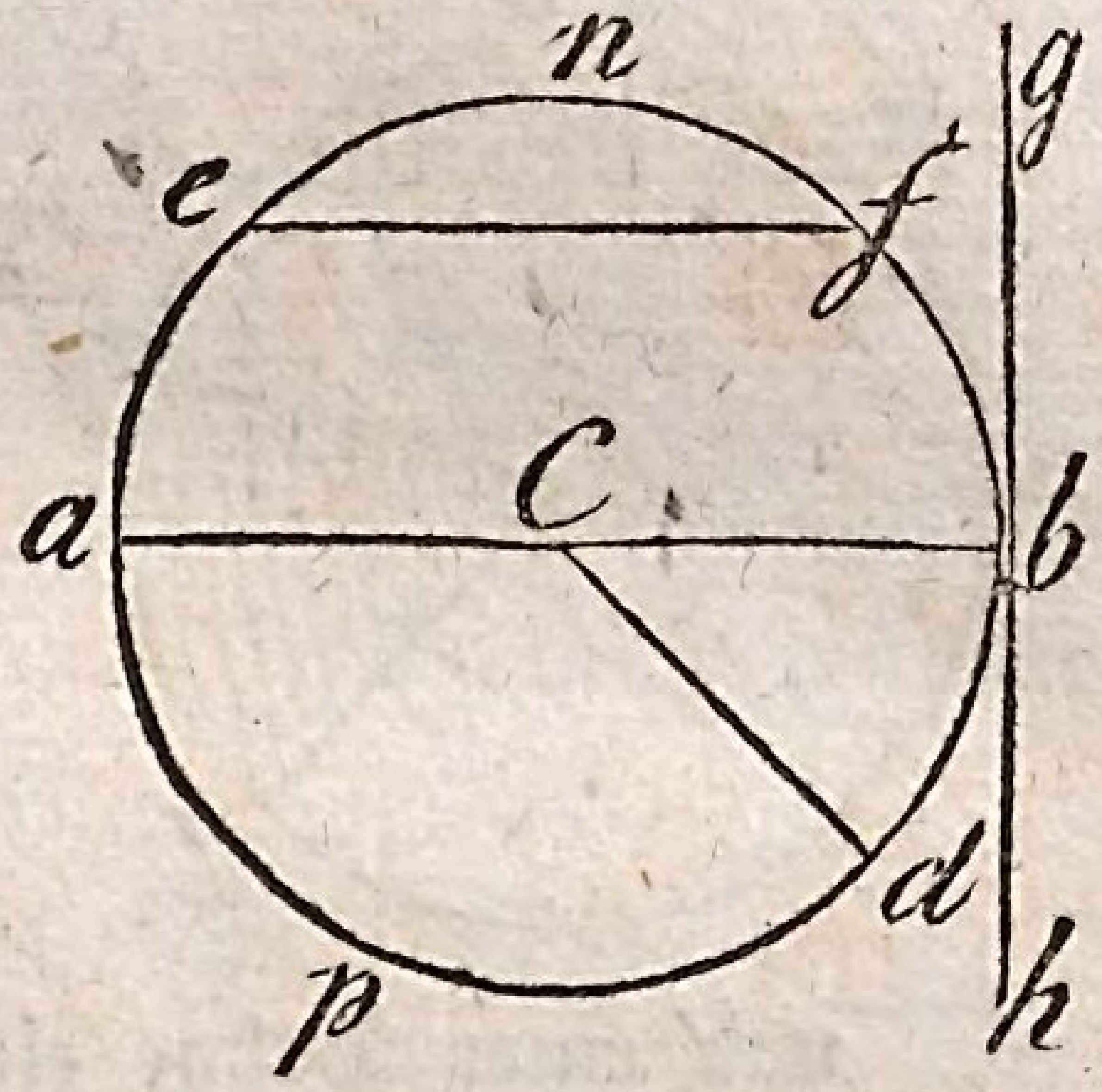
Zentrum. Das ist derjenige Punkt, welcher von allen Theilen der Peripherie gleichweit abstehet. S. Punkt C.



B. Linien, als:

a. Gerade Linien. Dahin gehören:

1. Der Durchmesser oder Diameter, das ist diejenige gerade Linie, welche von einem Theile der Peripherie durch den Mittelpunkt bis zu einem andern Theile derselben hingehet. S. ab.



2. Halbmesser oder Semidiameter oder Radius, das ist diejenige gerade Linie, welche vom Mittelpunkte bis zu einem Theile der Peripherie gehet. S. Cd.

3. Sehne oder Chorde, das ist diejenige gerade Linie, welche von einem Theile der Peripherie bis zu einem andern Theile derselben, aber nicht durch den Mittelpunkt hingehet. S. ef.

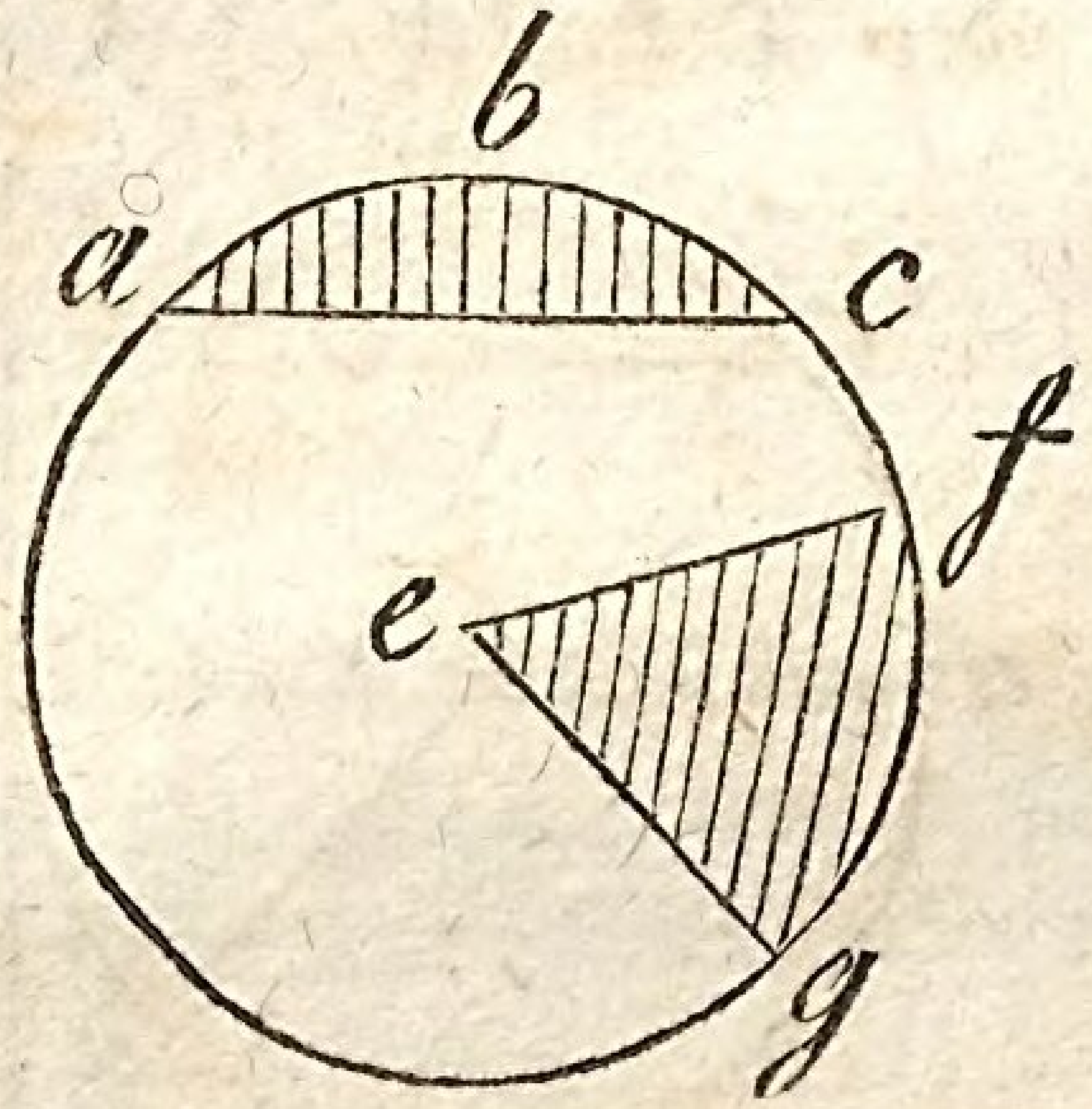
4. Die Tangente, das ist diejenige gerade Linie, welche die Peripherie, außerhalb derselben, nur in einem Punkte berührt. S. gh.

b. Krumme Linien, als:

1. Die Peripherie oder der Umkreis, das ist diejenige krumme Linie, welche in allen ihren Theilen gleichweit vom Mittelpunkte absteht. S. apdke auf vor. Seite.

2. Der Kreisbogen, das ist ein Theil des Umkreises. S. enf.

C. Von den Flächen, als:

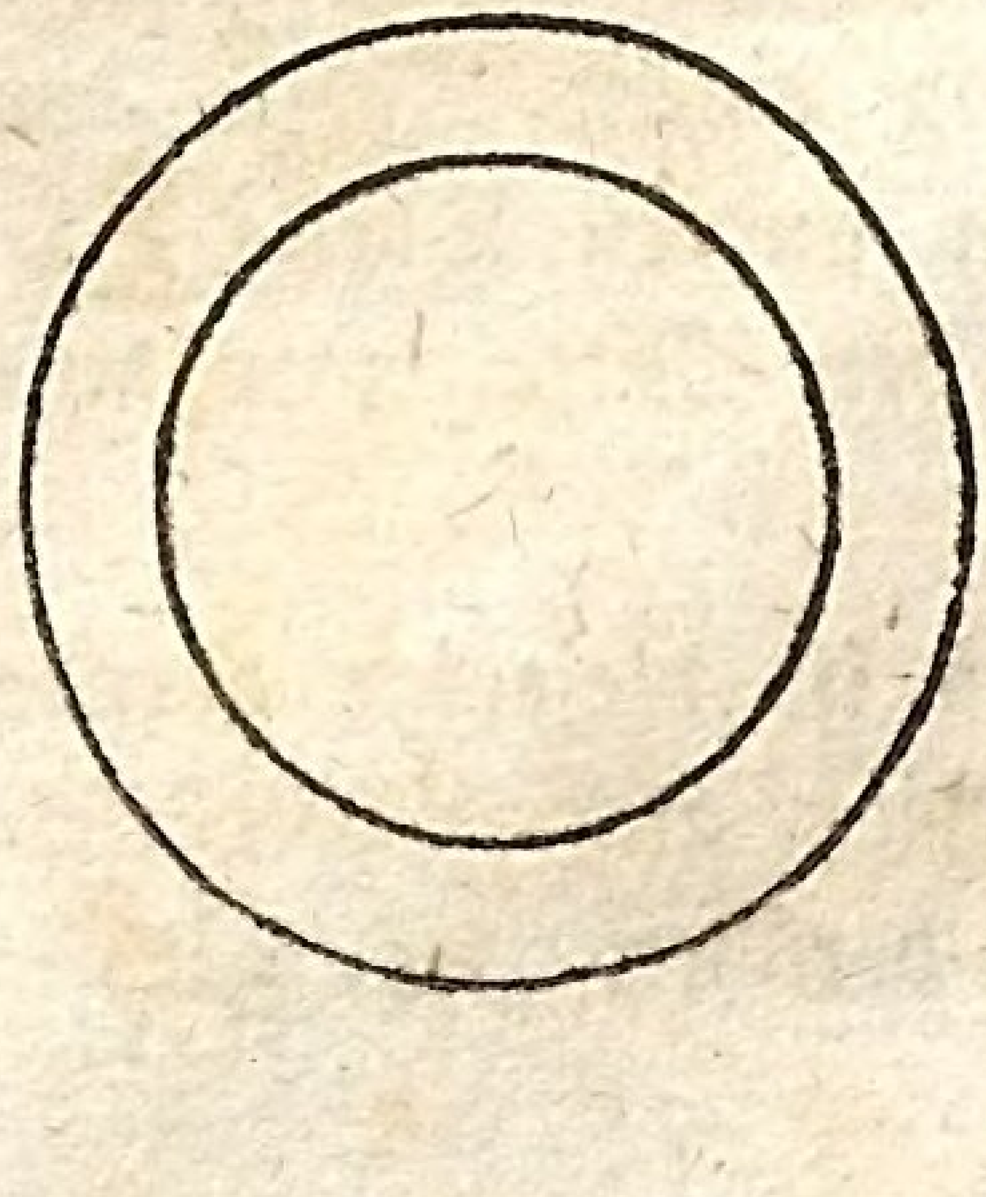


1. Die Kreisfläche, das ist der Raum innerhalb der Peripherie.

2. Der Abschnitt oder das Segment, das ist der Raum, welcher von einem Kreisbogen und einer Sehne eingeschlossen ist. S. abc.

3. Der Ausschnitt oder der Sektor, das ist der Raum, welcher von zwei Halbmessern und einem Kreisbogen eingeschlossen wird. S. efg.

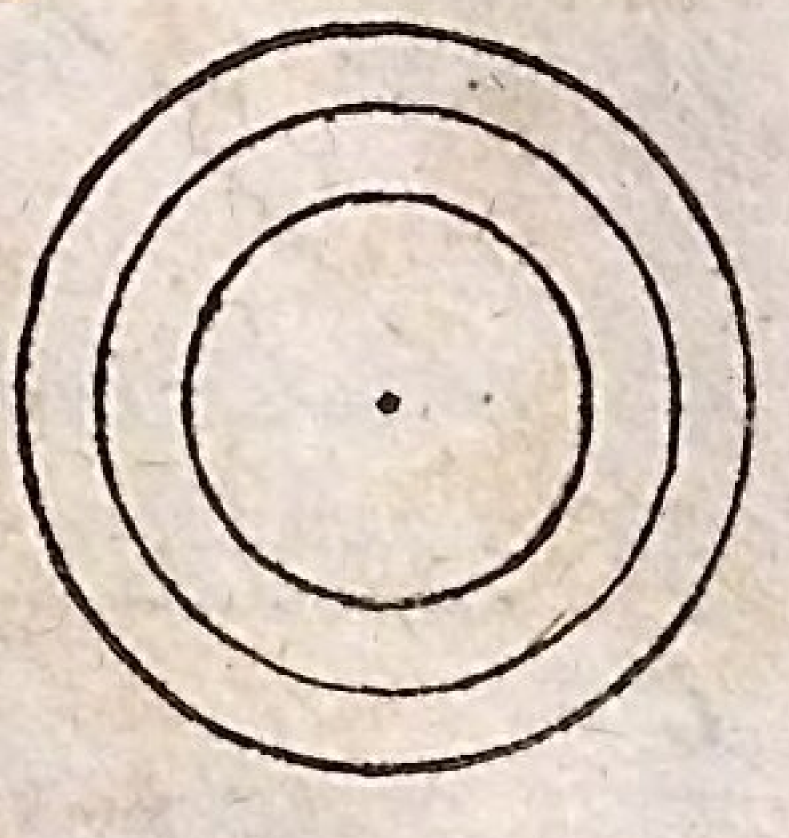
§ 10.



Erkl. Der Kreisrand ist der Raum zwischen zwei Umkreisen.

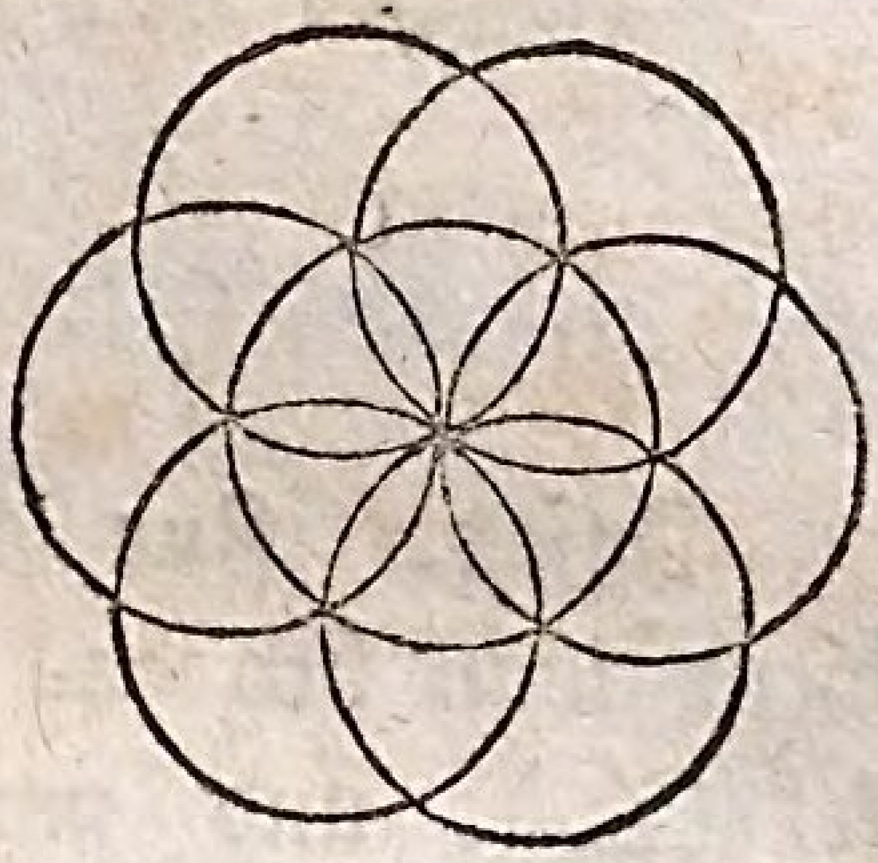
§ 11.

Erkl. Konzentrische Kreise sind solche, welche alle einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.



§ 12.

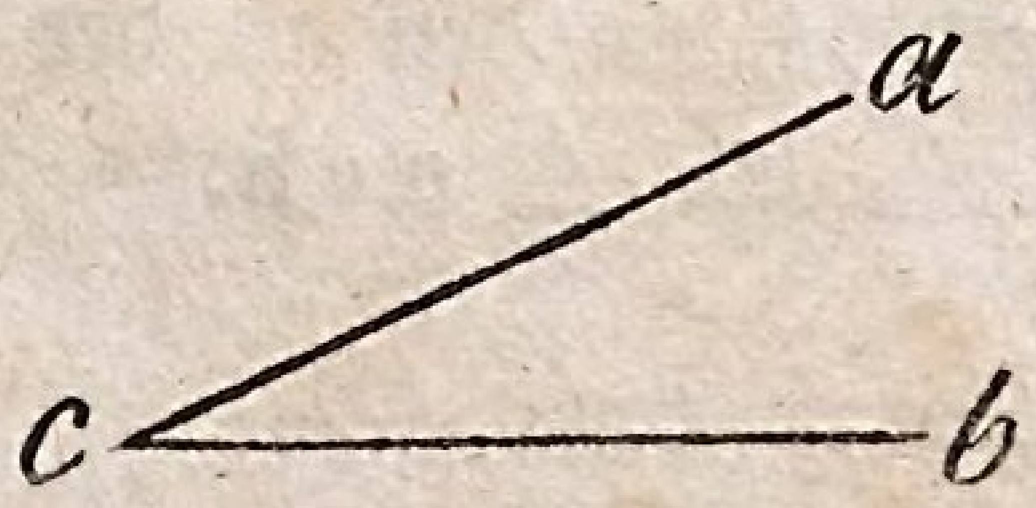
Erklär. Excentrische Kreise sind solche, welche zwar in einander liegen, von welchem aber jeder seinen eigenen Mittelpunkt hat.



III. Von den Winkeln.

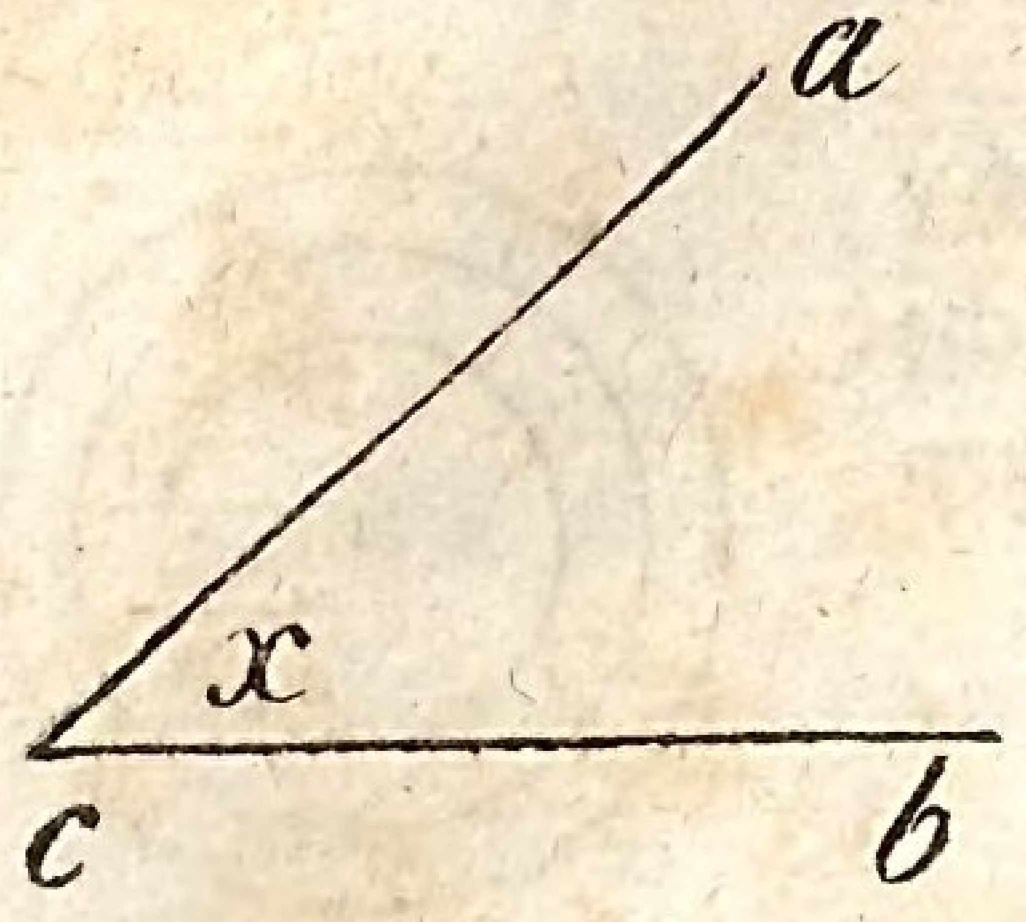
§ 13.

Erkl. Stoßen zwei Linien in einem Punkte zusammen, so entstehet ein Winkel; daher ist ein Winkel das Zusammenstoßen zweier Linien in einem Punkte.



§ 14.

Erkl. Bei einem Winkel kommen demnach folgende Stücke vor:



1. Die Spitze, das ist der Punkt c, in welchem die beiden Linien zusammen stoßen.
2. Die Schenkel, das sind die beiden Linien, welche den Winkel bilden. S. ac u. bc.
3. Der eigentliche Winkel, das ist der Raum zwischen den beiden Schenkeln.

§ 15.

Zusatz. Zur Bezeichnung eines Winkels bedient man sich das Zeichen von einem kleinen Winkel (∠); und um ihn durch Buchstaben zu bezeichnen, bedient man sich entweder

1. Eines einzigen Buchstabens und zwar dessen, der an der Spitze stehet. S. ∠ c, oder
2. Dessen, der innerhalb des Winkels stehet. S. ∠ x, oder
3. Aller drei Buchstaben, wobei man aber alsdann den an der Spitze in die Mitte setzt *). S. ∠ a c b.

---

*) Anmerk. Zur Bezeichnung eines Punktes durch Buchstaben bedient man sich eines und zwar beliebigen Buchstabens — zur Bezeichnung einer Linie zweier beliebiger Buchstaben — zur Bezeichnung eines Dreiecks dreier — eines Vierecks vier — eines Fünfecks fünf — u. s. w.

§ 16.

Zusatz. Bei den Winkeln, um sie leicht zu überblicken, siehet man:

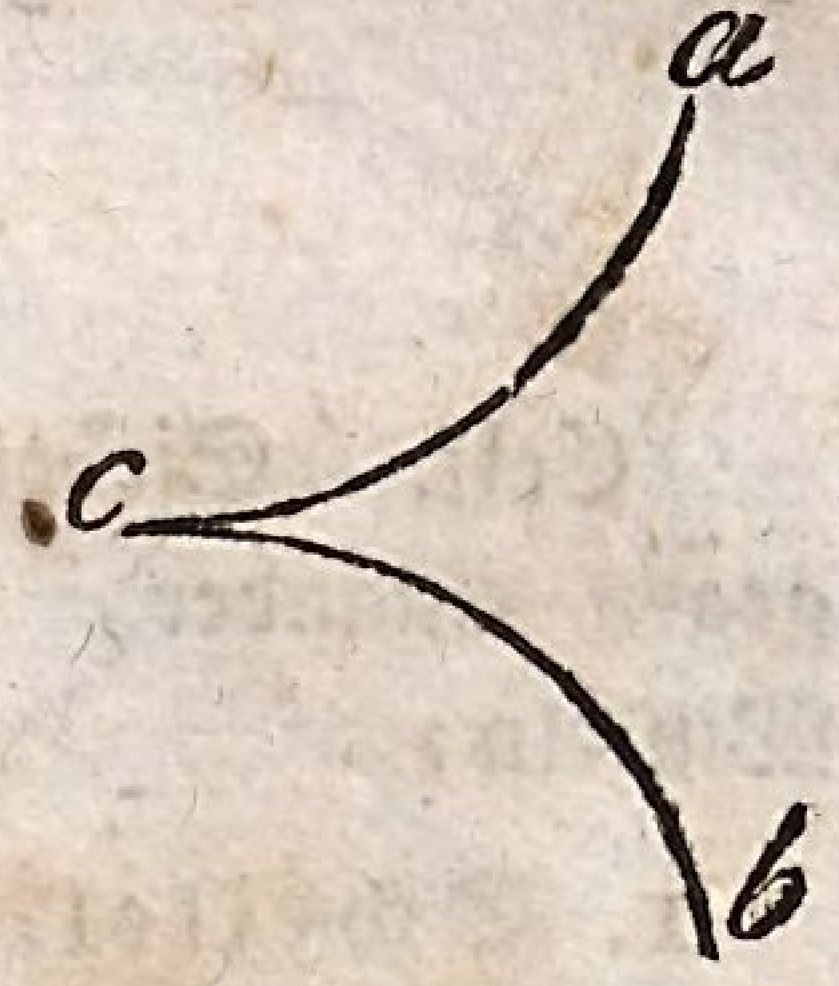
A. Auf die Beschaffenheit ihrer Schenkel.
B. Auf die Größe ihres eigentlichen Winkels.
C. Auf die Lage der Winkel gegen einander.

§ 17.

Zusatz. In Ansehung der Beschaffenheit der Schenkel können die Winkel haben:

1. Gerade Schenkel.

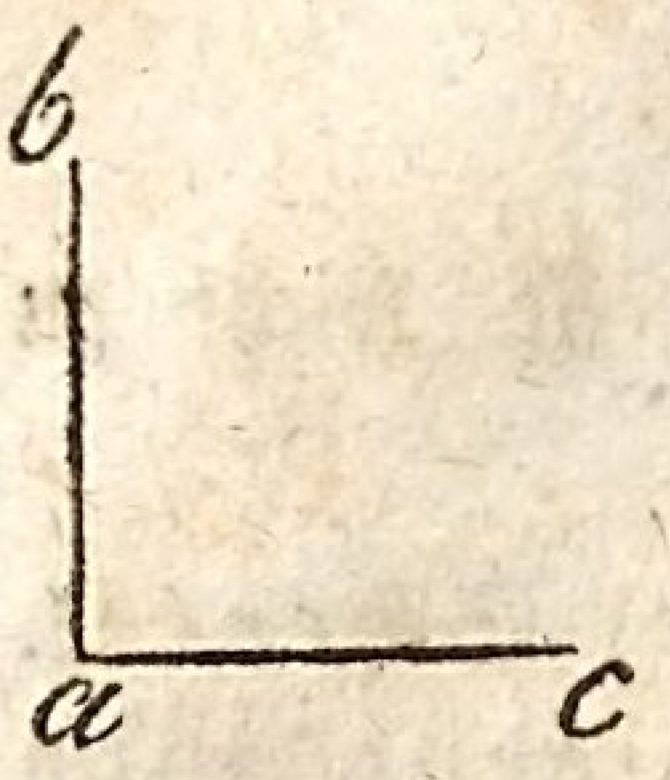
2. Krumme Schenkel.



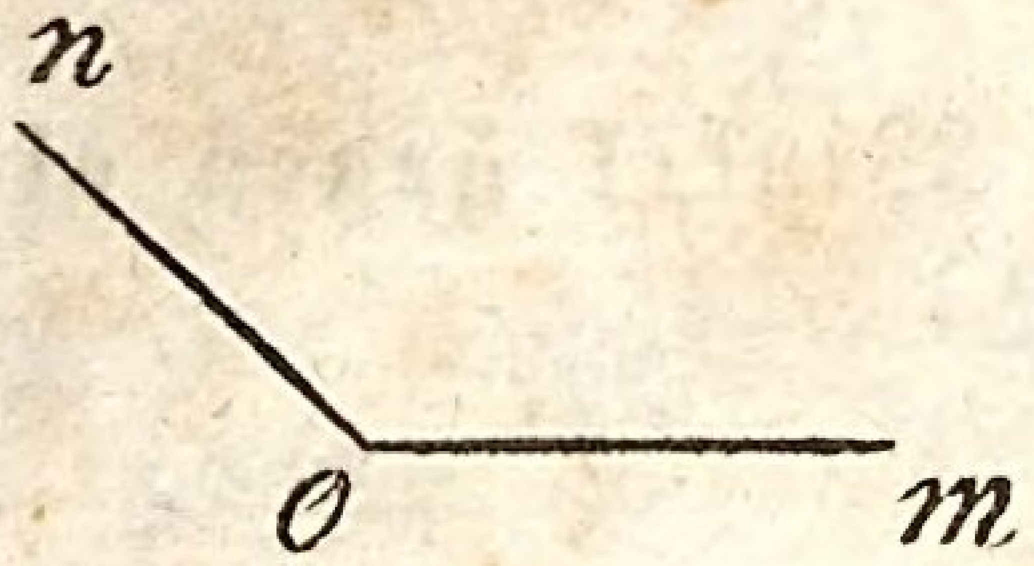
3. Vermischte Schenkel.

§. 18.

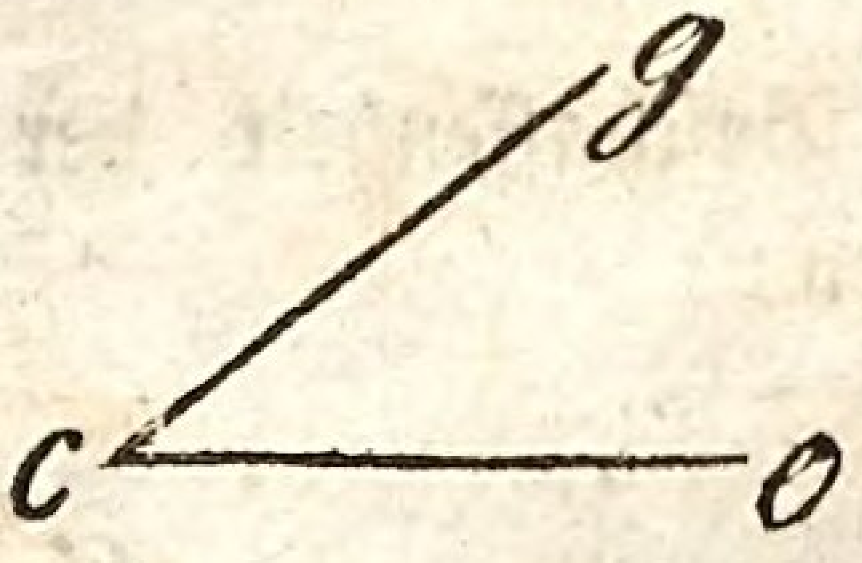
Erkl. Siehet man bei den Winkeln auf die Größe des eigentlichen Winkels, so giebt es folgende Arten:



1. Rechte Winkel, das sind solche, bei welchen der eine Schenkel auf dem andern senkrecht stehet. S. ∠ a.



2. Stumpfe Winkel, das sind solche, welche größer als rechte Winkel sind. S. ∠ o.

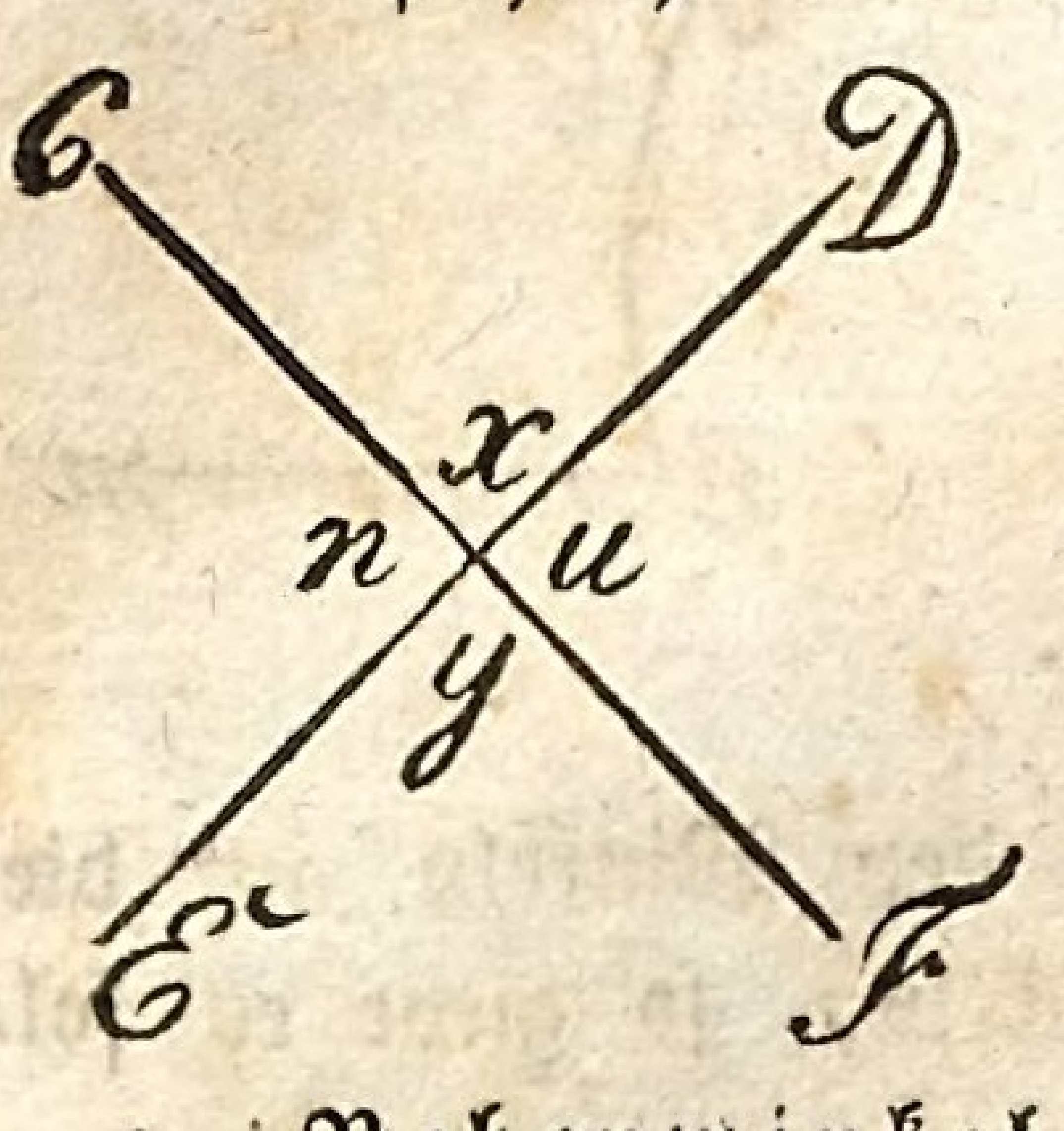


3. Spitze Winkel, das sind solche, welche kleiner als rechte Winkel sind. S. ∠ c.

§ 19.

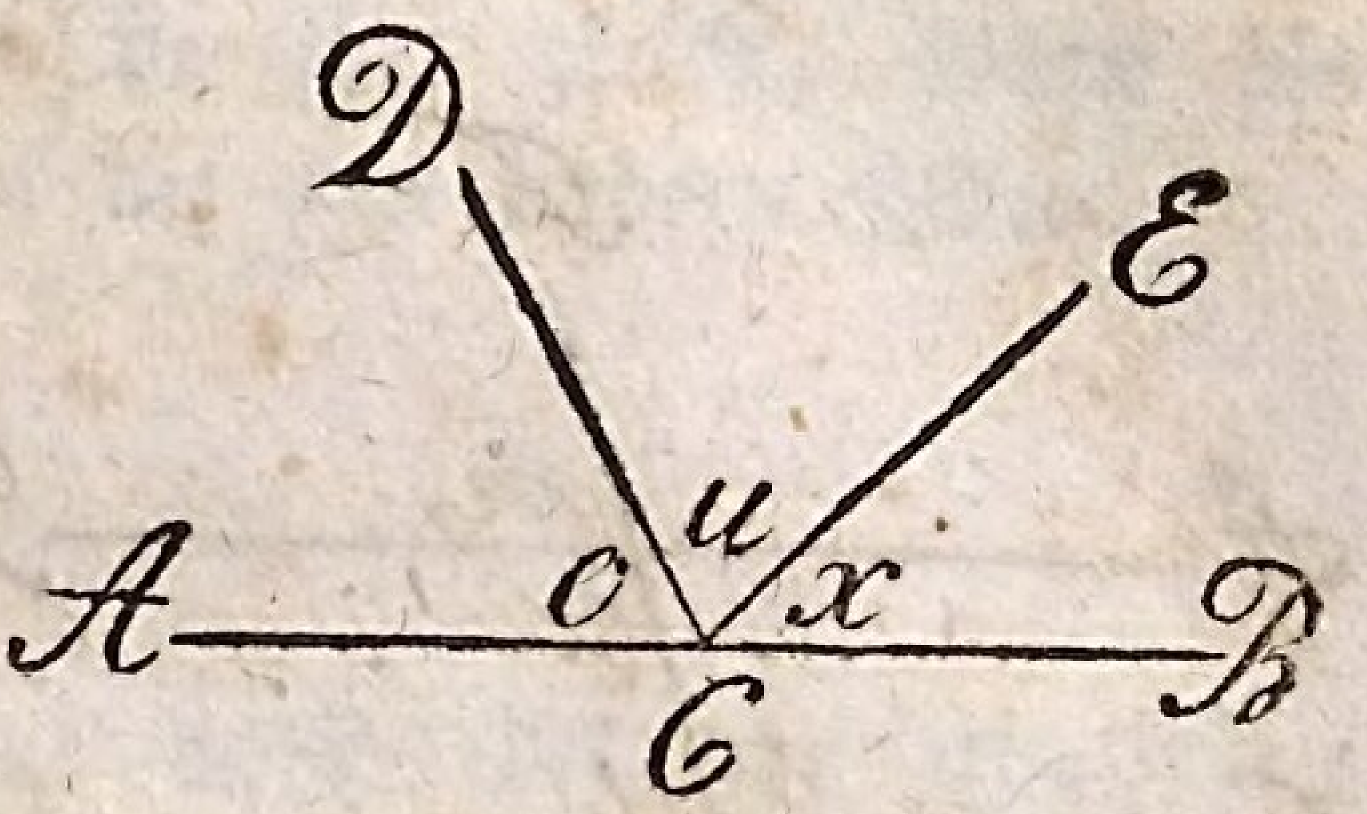
Erkl. Siehet man auf die Lage der Winkel gegen einander, so giebt es folgende Arten von Winkeln:

1. Scheitel- oder Vertical-Winkel, diese entstehen, wenn die Schenkel eines Winkels durch die Spitze verlängert werden. Geschiehet dieses, so heißen die sich einander gegenüberstehenden Winkel Scheitelwinkel, wie z. B. ∠ x und ∠ y, so auch ∠ n und ∠ u.

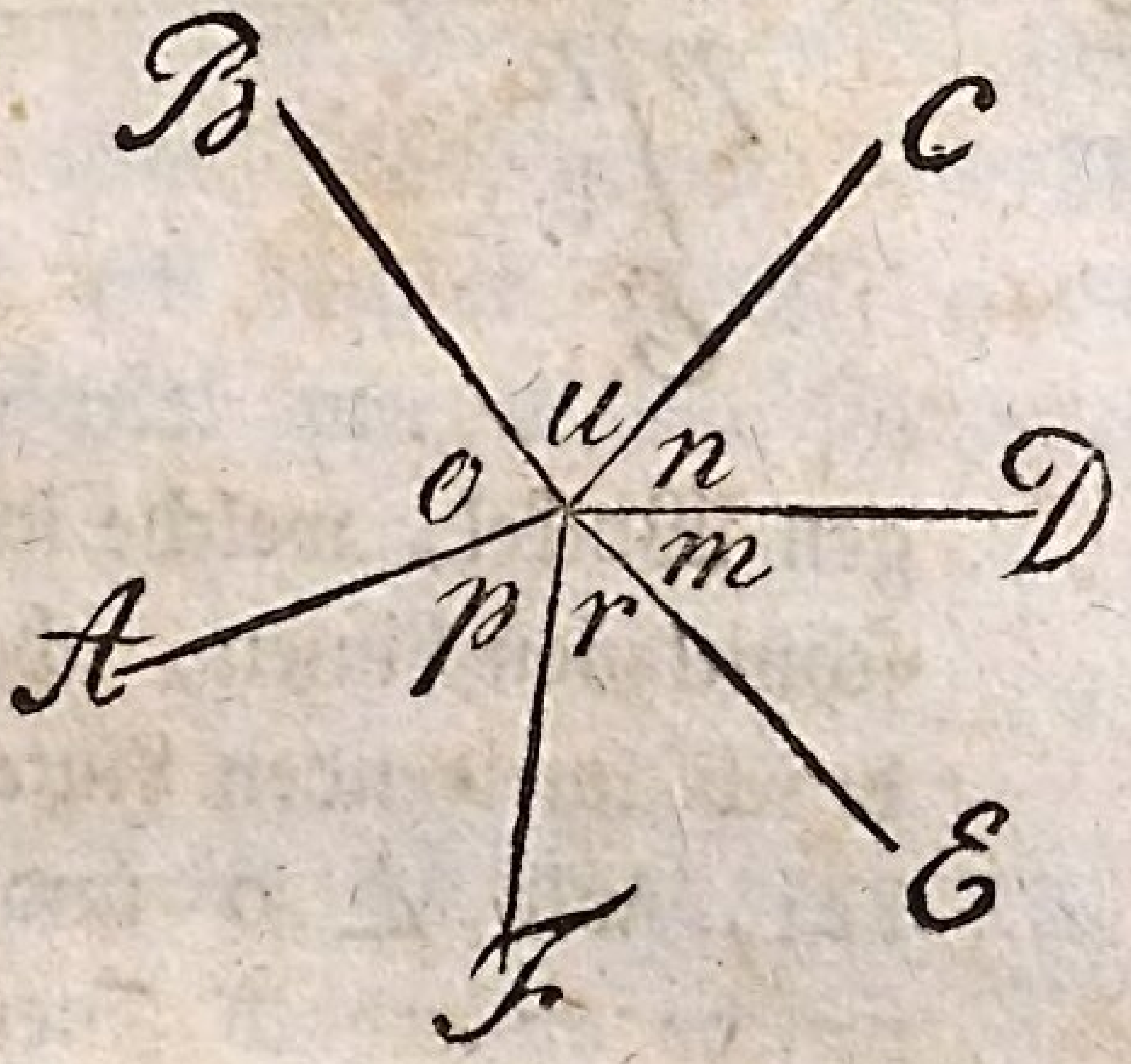


2. Nebenwinkel sind solche, welche eine

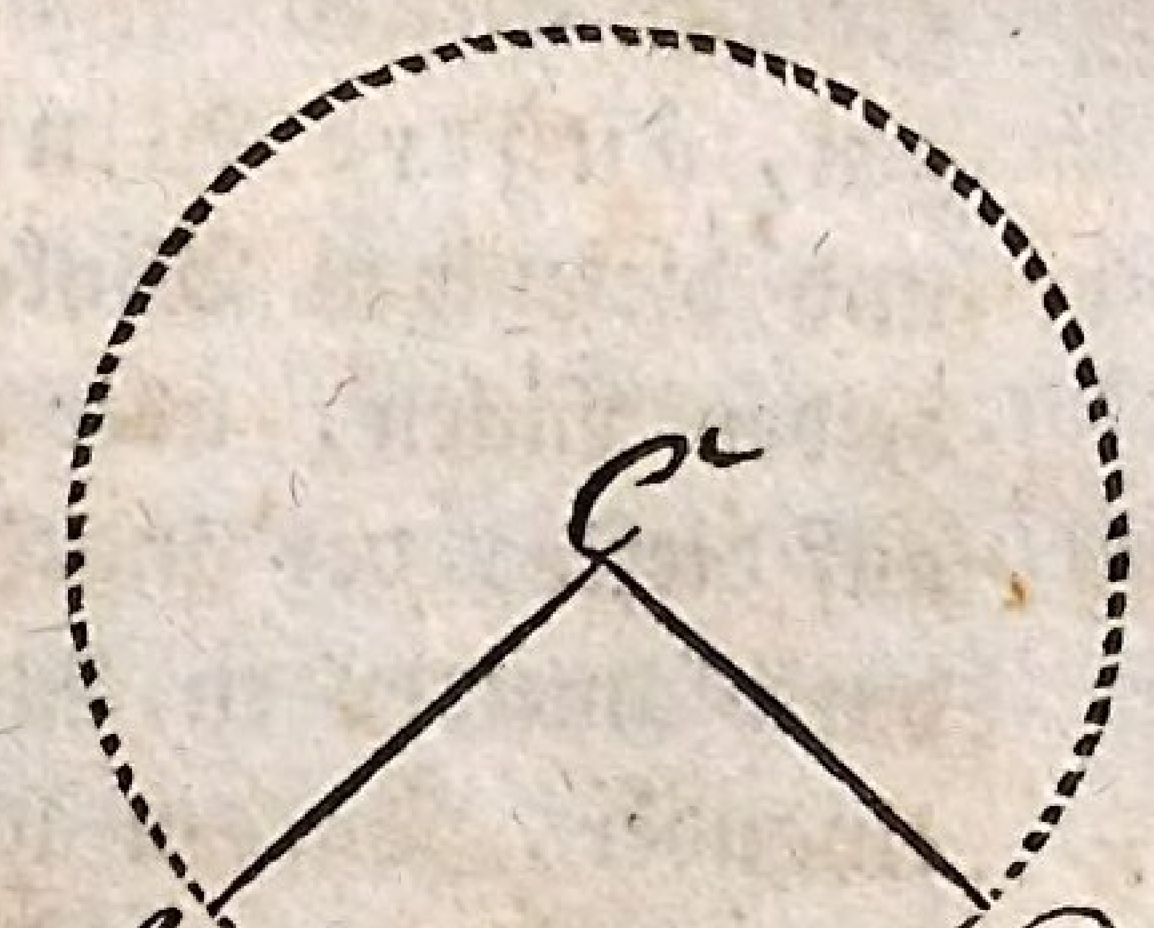
gemeinschaftliche Spitze haben, u. deren äußersten Schenkel eine gerade Linie ausmachen. S. o u x



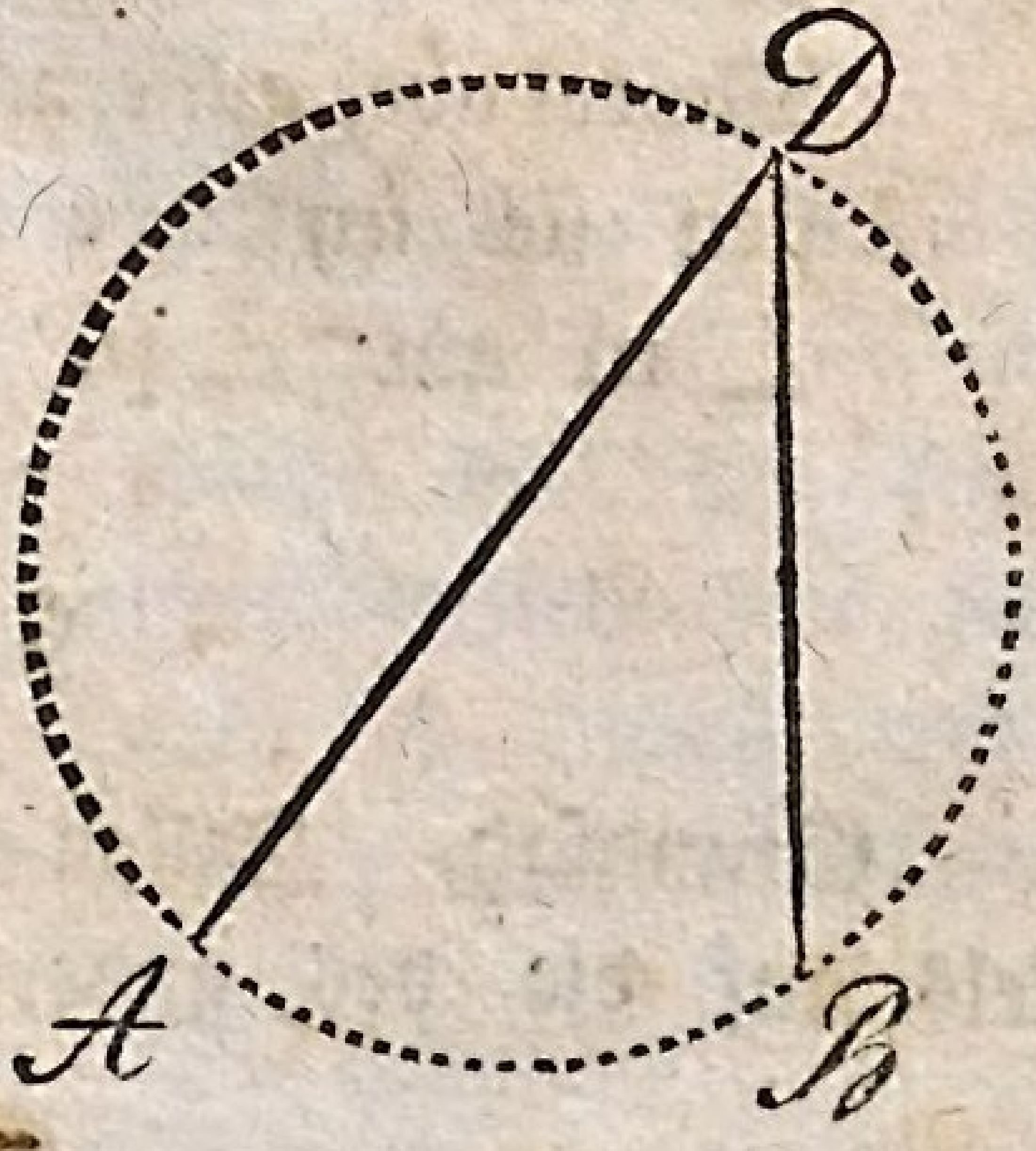
3. Benachbarte Winkel sind solche, die alle um einen gemeinschaftlichen Punkt umher liegen.

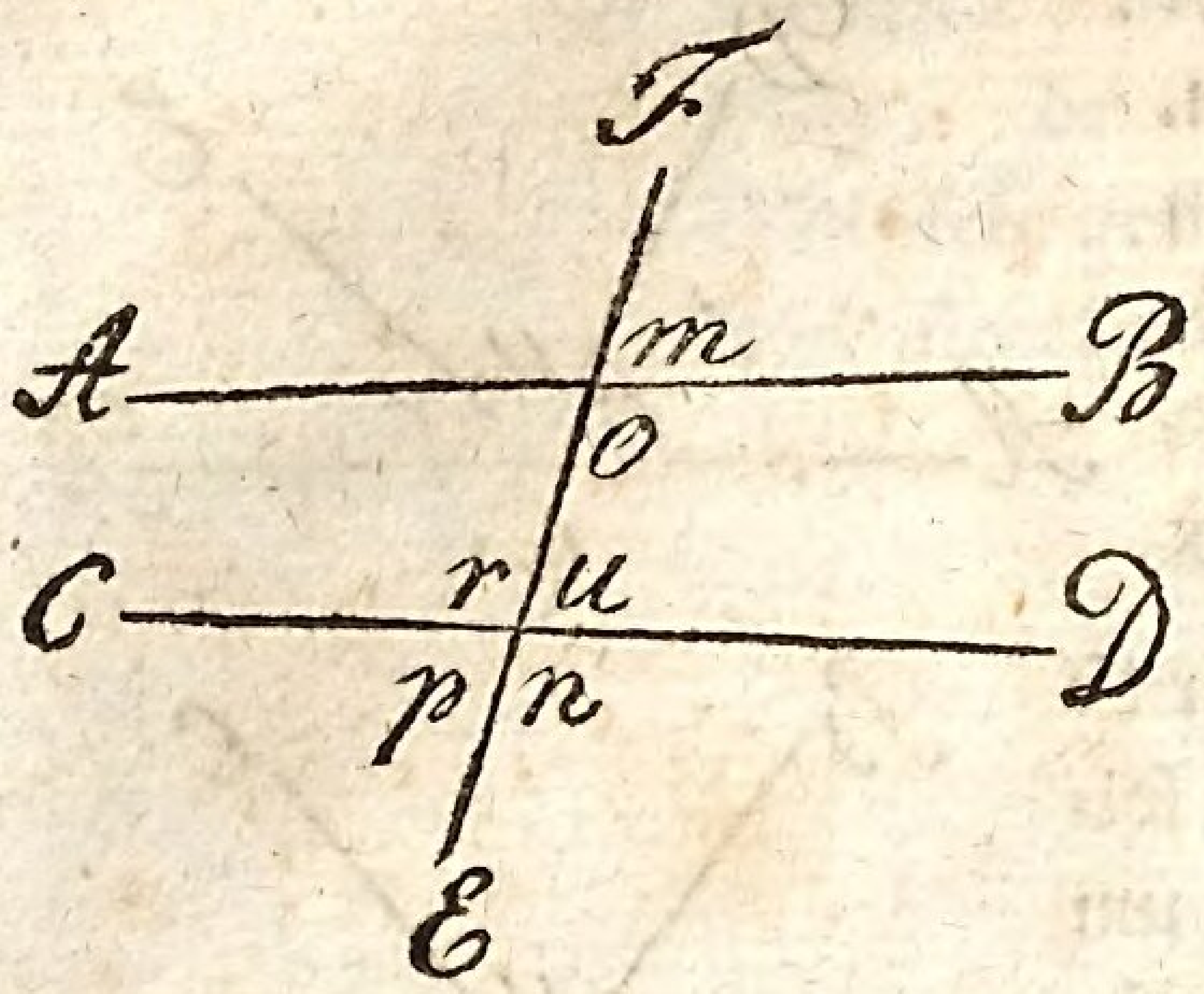


4. Zentri-Winkel od. Mittelpunkts-Winkel; dieß sind solche, deren Spitzen in dem Mittelpunkte eines Kreises liegen, wie z. B. ∠ C.



5. Peripherie-Winkel; das sind solche, deren Spitzen in die Peripherie eines Kreises fallen, wie ∠ D.





6. Wechsels-Winkel, äußere u. innere Winkel. Diese entstehen, wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden. Geschiehet dieses, so heißen diejenigen Winkel, welche innerhalb der beiden durchschnittenen Linien, aber auf einerlei Seiten der durchschneidenden Linie liegen, innere Winkel, wie ∠ o und ∠ u; und diejenigen, welche außerhalb jener beiden Linien, aber auf gleichen Seiten der durchschneidenden Linien liegen, äußere Winkel, wie ∠ n und ∠ m; und diejenigen Winkel, welche innerhalb jener beiden Linien, aber so, daß der eine Winkel auf dieser, der andere auf der andern Seite der durchschneidenden Linie und zwar nicht neben einander, sondern schräg gegen einander über liegen, führen den Namen innere Wechsels-Winkel, wie ∠ o und ∠ r. Liegen diese Winkel aber außerhalb jener beiden Linien, so heißen sie äußere Wechsels-Winkel, wie ∠ m und ∠ p.

§ 20.

Grundsatz. Fallen die Schenkel des einen Winkels auf die des andern, so sind die Winkel sich

gleich. Daher sind solche sich gleich, wenn die Schenkel des einen auf die des andern fallen.

§ 21.

Zusatz. Es kommt daher bei der Gleichheit der Winkel nicht auf die Länge der Schenkel, sondern auf ihre Richtung oder Lage gegen einander an; deswegen kann nur ein rechter Winkel einem rechten, ein stumpfer Winkel nur einem stumpfen u. s. w. gleich sein.

IV. Von den Flächen oder Figuren.

§ 22.

Erkl. Eine Figur oder Fläche ist ein von Linien eingeschlossener Raum. Die Linien, welche einen solchen Raum einschließen, heißen die Seiten derselben, und machen zusammen genommen den Umfang oder Perimeter derselben aus.

§ 23.

Erkl. Eine Figur oder Fläche ist eine **ebene Fläche**, wenn ihre Theile so liegen, daß sie alle von einer geraden Linie, welche von der einen Seite derselben nach der gegenüberstehenden hingehet, berührt werden. Geschiehet dieses nicht, so heißt sie eine **unebene Figur** oder **unebene Fläche**.

§ 24.

Zusatz. Bei den ebenen Figuren siehet man:

1. Auf die Anzahl der Seiten.
2. Auf die Beschaffenheit der Seiten.
3. Auf die Größe oder das Verhältniß der Länge der Seiten zu einander.
4. Auf die Größe der Winkel in denselben. Und
5. Auf die Größe der Seiten und Winkel zugleich.

§ 25.

Zusatz. In Ansehung des ersten Punktes, der Anzahl der Seiten, giebt es:

1. Einseitige Figuren, als: der Kreis.
2. Zweiseitige Figuren, als: der Abschnitt.
3. Dreiseitige Figuren, als: alle Arten von Dreiecken.
4. Vierseitige Figuren, als: alle Arten von Vierecken.
5. Vielseitige Figuren, als: alle Arten von Vielecken.

§ 26.

Zusatz. In Ansehung der Beschaffenheit der Seiten giebt es folgende Arten von Figuren:

1. Geradlinige Figuren, deren Seiten gerade Linien sind.
2. Krummlinige Figuren, deren Seiten krumme Linien sind.

3. Vermischtlinige Figuren, deren Seiten zum Theil gerade, zum Theil krumme Linien sind.

§ 27.

Zusatz. In Ansehung der Größe oder des Verhältniß der Länge der Seiten zu einander sind die Figuren:

1. Gleichseitige, das sind solche, bei welchen alle Seiten sich gleich sind; dahin gehören das Quadrat, Rhombus, das gleichseitige Dreieck und alle regulären Vielecke.

2. Ungleichseitige, das sind solche, bei welchem nicht alle sich gleich sind; dahin gehören alle übrigen vorhin nicht angeführten Figuren.

§ 28.

Zusatz. In Ansehung der Größe der Winkel in den Figuren sind dieselben:

1. Gleichwinklige, das sind solche, in welchen alle Winkel sich gleich sind; dahin gehören das Quadrat, Rektangel, gleichseitige Dreieck und alle regulären Vielecke.

2. Ungleichwinklige, das sind solche, in welchen nicht alle Winkel sich gleich sind; dahin gehören alle übrigen Figuren mit Ausnahme jener vorhin angeführten.

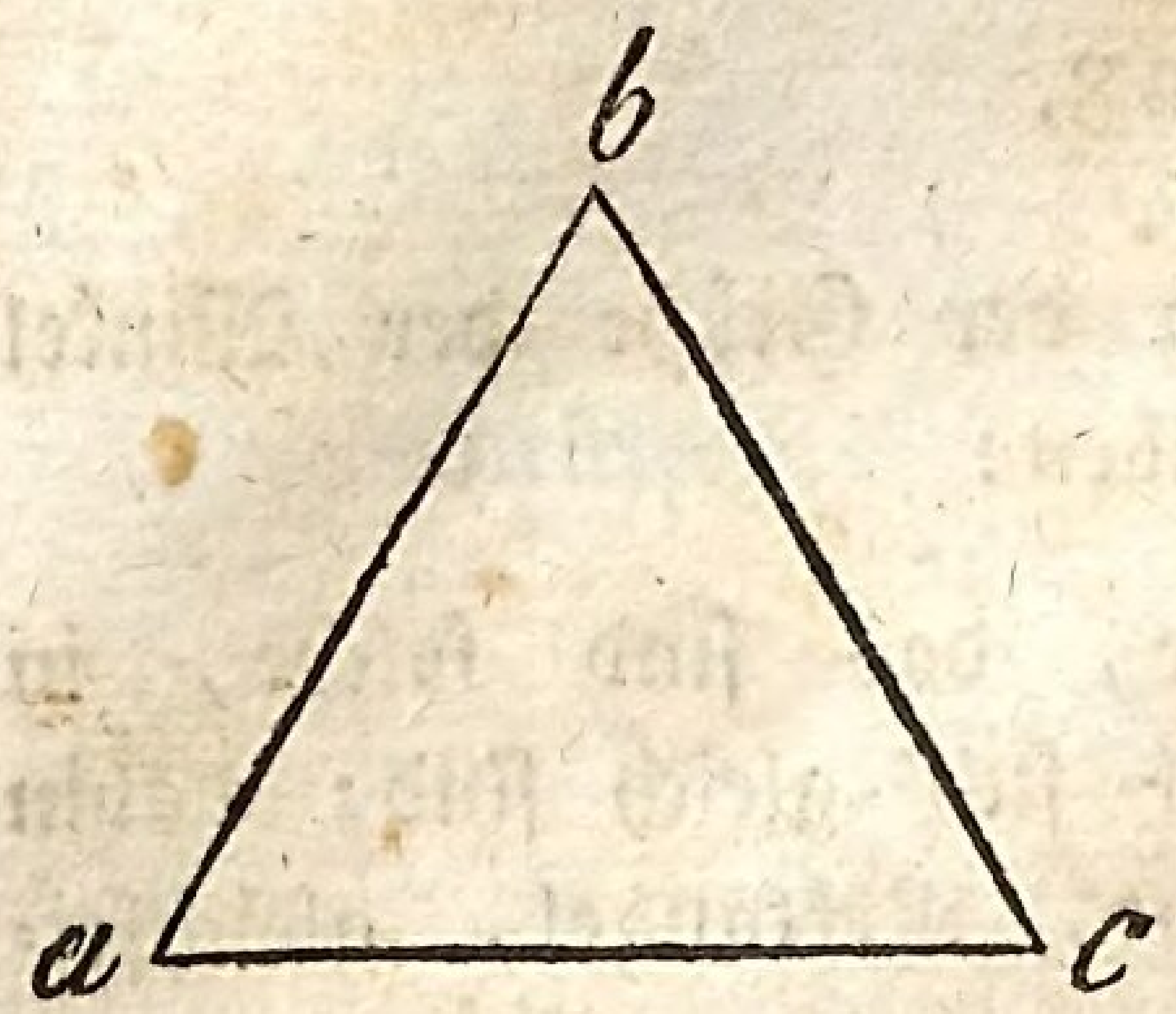
§ 29.

Zusatz. In Ansehung der Größe der Seiten und Winkel zugleich, sind die Figuren

1. Reguläre, das sind solche, in welchen alle Seiten und alle Winkel sich einander gleich sind. Dahin gehören: das Quadrat, das gleichseitige Dreieck und das reguläre Vieleck.
2. Irreguläre, das sind solche, in welchen solches nicht der Fall ist. Dahin gehören alle übrigen, vorhin nicht angeführten Figuren.

A. Von den dreiseitigen Figuren oder Dreiecken.

§ 30.



Erklärung. Ein Dreieck ist ein von drei Seiten eingeschlossener Raum.

§ 31.

Zusatz. Bei den Dreiecken siehet man:

1. Auf die Beschaffenheit der Seiten.

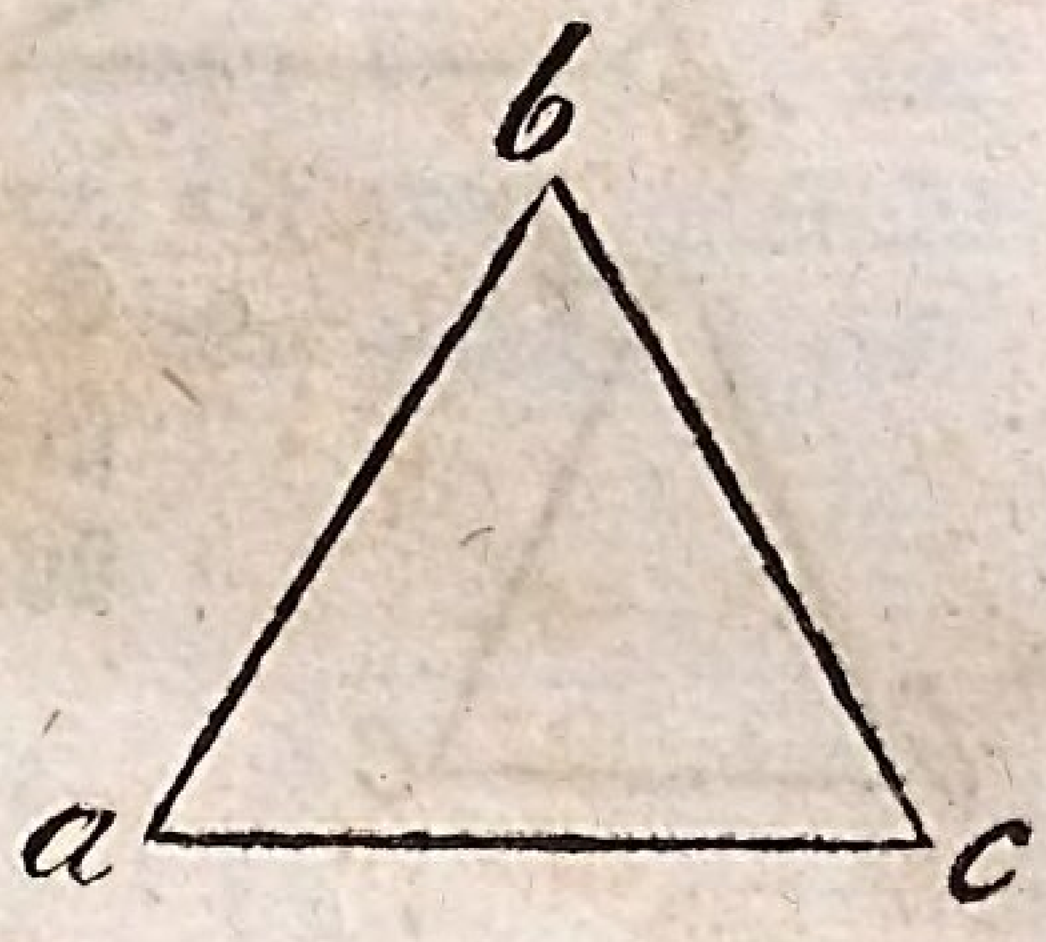
2. Auf die Größe oder das Verhältniß der Länge der Seiten zu einander.

3. Auf die Größe der Winkel in demselben.

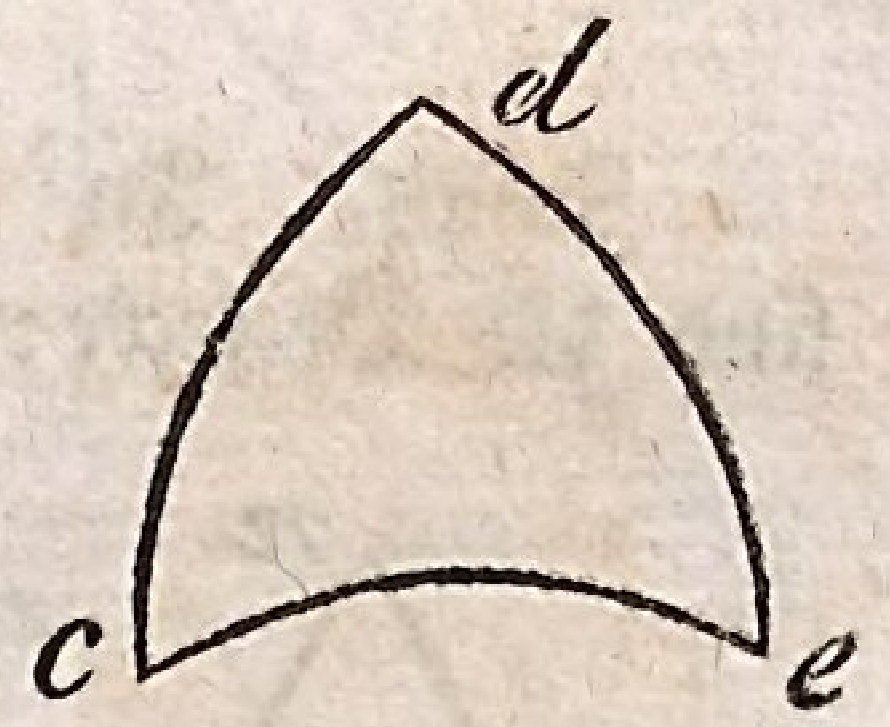
§ 32.

Zusatz. In Ansehung des ersten Punktes, der Beschaffenheit der Seiten, giebt es folgende Arten von Dreiecken:

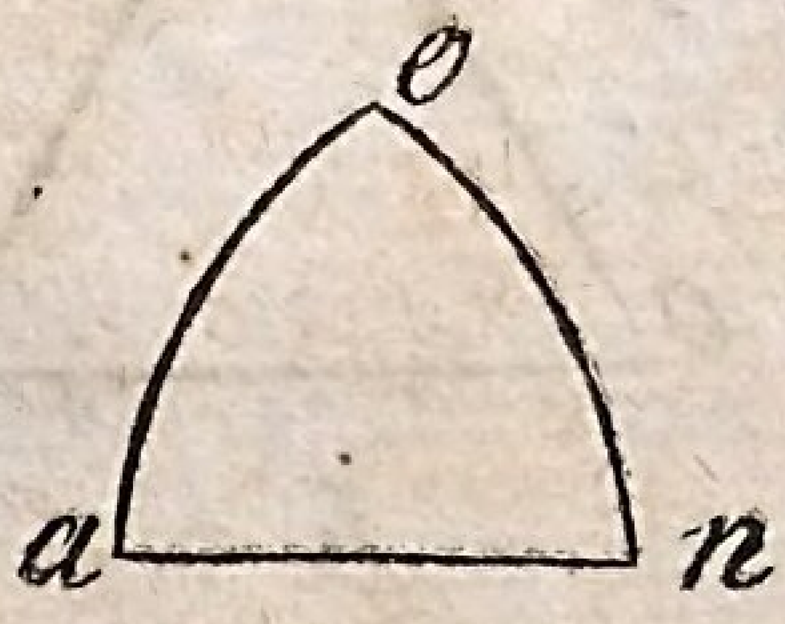
a. Geradlinige Dreiecke, in welchen alle Seiten gerade Linien sind.



b. Krummlinige Dreiecke, in welchen alle Seiten krumme Linien sind.

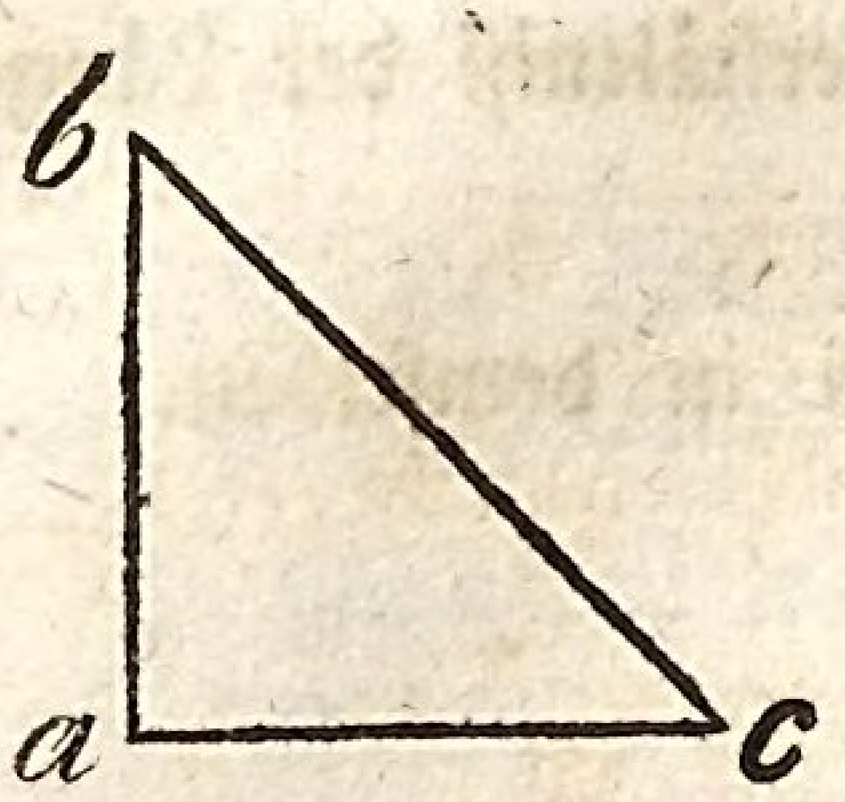


c. Vermischtlinige Dreiecke, in welchen gerade und krumme Seiten sind.

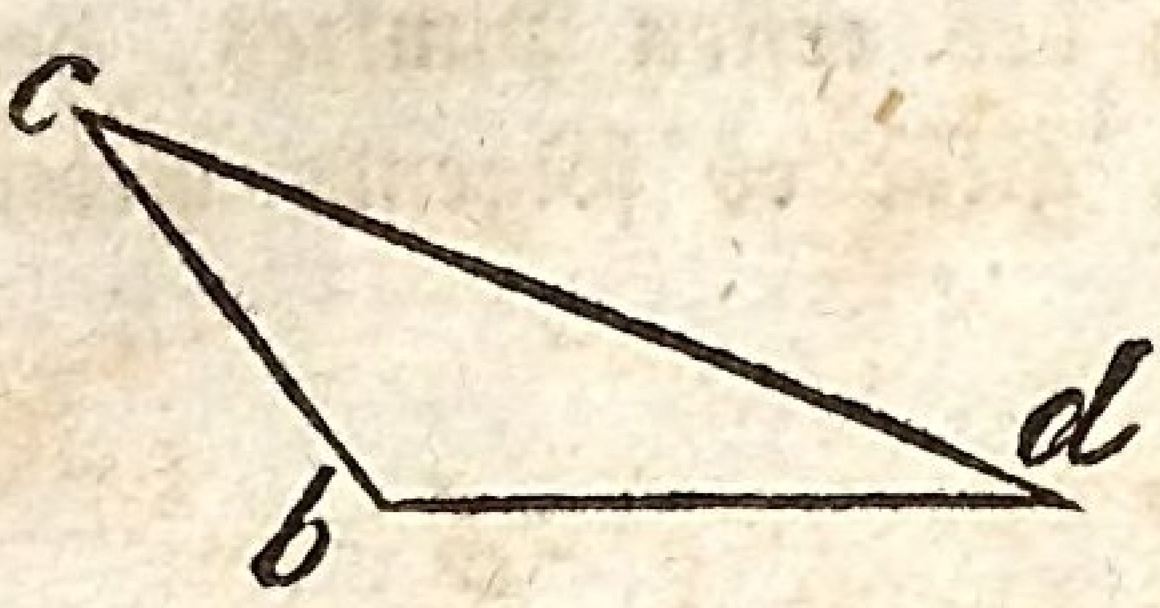


§ 33.

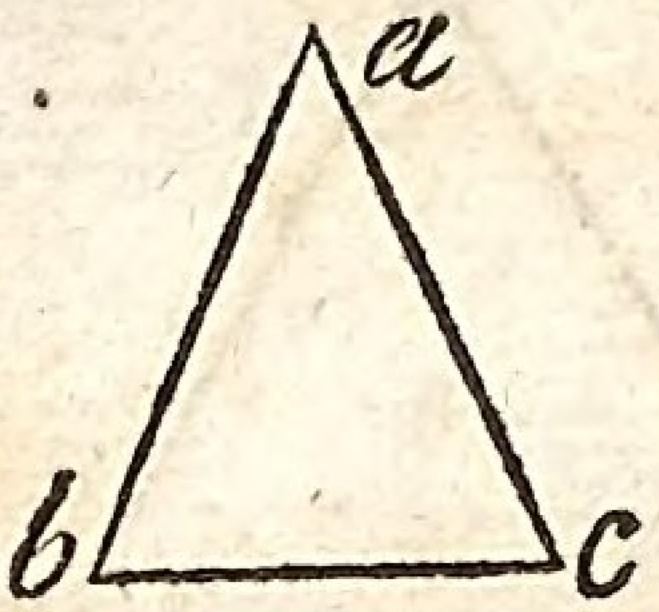
Zusatz. In Ansehung der Größe der Winkel in demselben giebt es folgende Arten:



a. Rechtwinklige Dreiecke, das sind solche, in welchen sich ein rechter Winkel befindet, wie ∠ a in dem Dreiecke b a c.



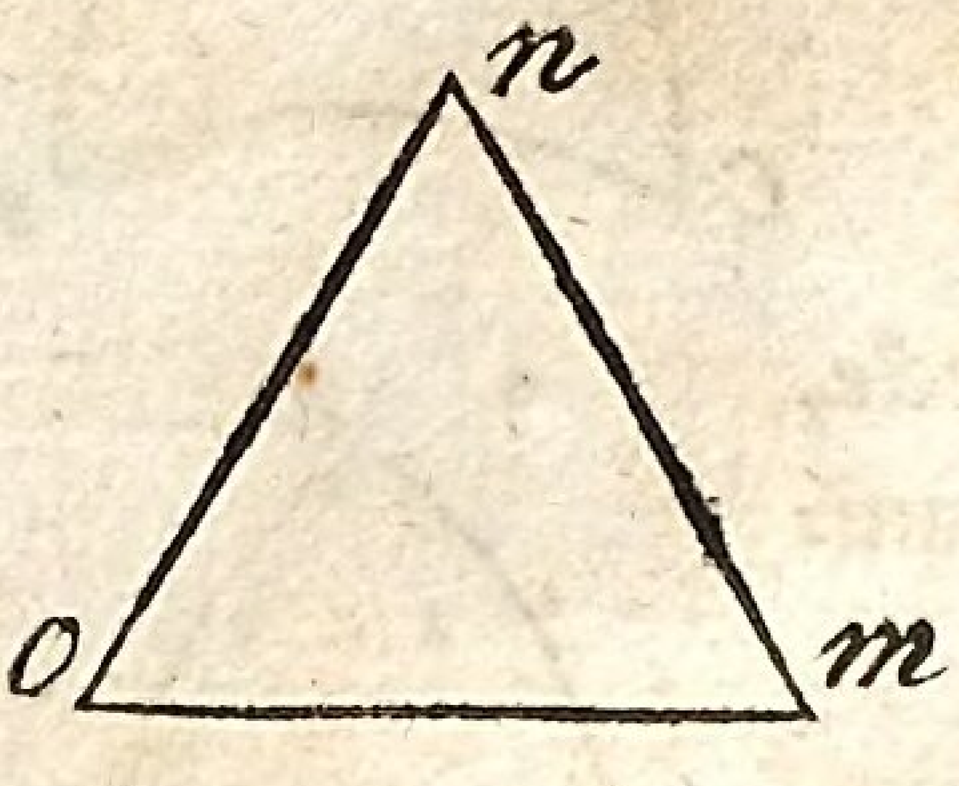
b. Stumpfwinklige Dreiecke, das sind solche, in welchen sich ein stumpfer Winkel befindet, wie ∠ b in dem Dreiecke dbc.



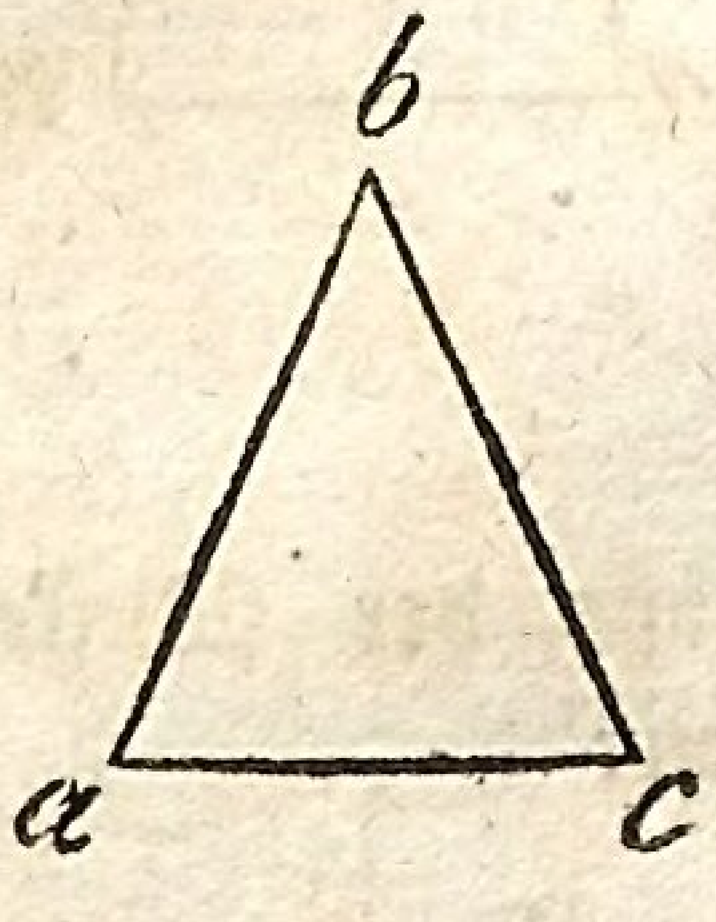
c. Spitzwinklige Dreiecke, das sind solche, in welchen drei spitze Winkel sind.

§ 34.

Zusatz. In Ansehung der Größe der Seiten sind die Dreiecke:

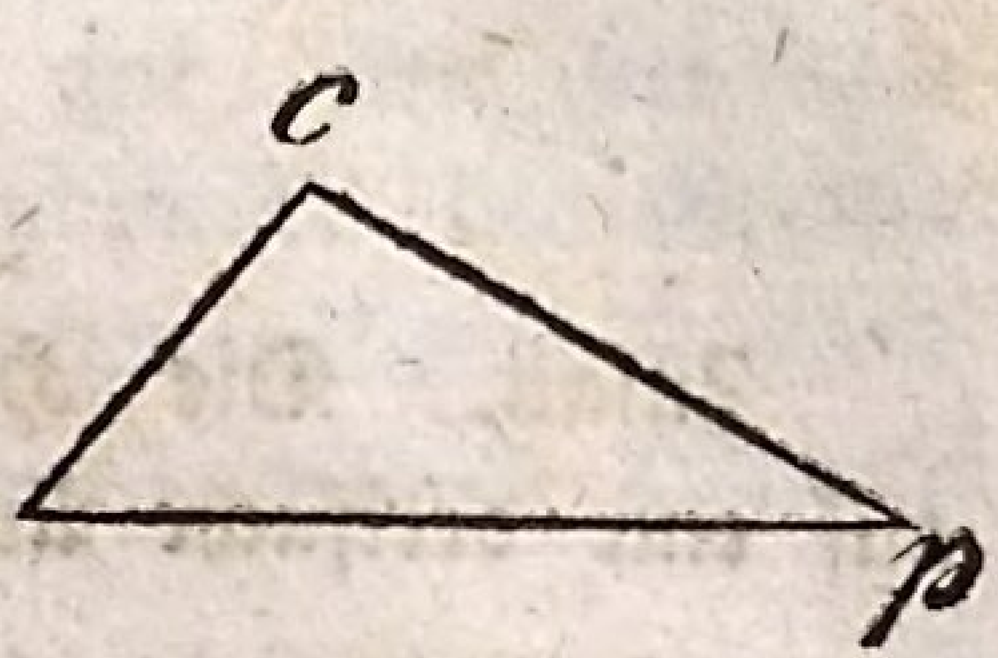


1. Gleichseitige, das sind solche, in welchen alle drei Seiten sich einander gleich sind.



2. Gleichschenklige, das sind solche, in welchen nur zwei Seiten sich einander gleich sind, wie ab und bc.

3. Ungleichseitige, in welchen keine Seite der andern gleich ist.

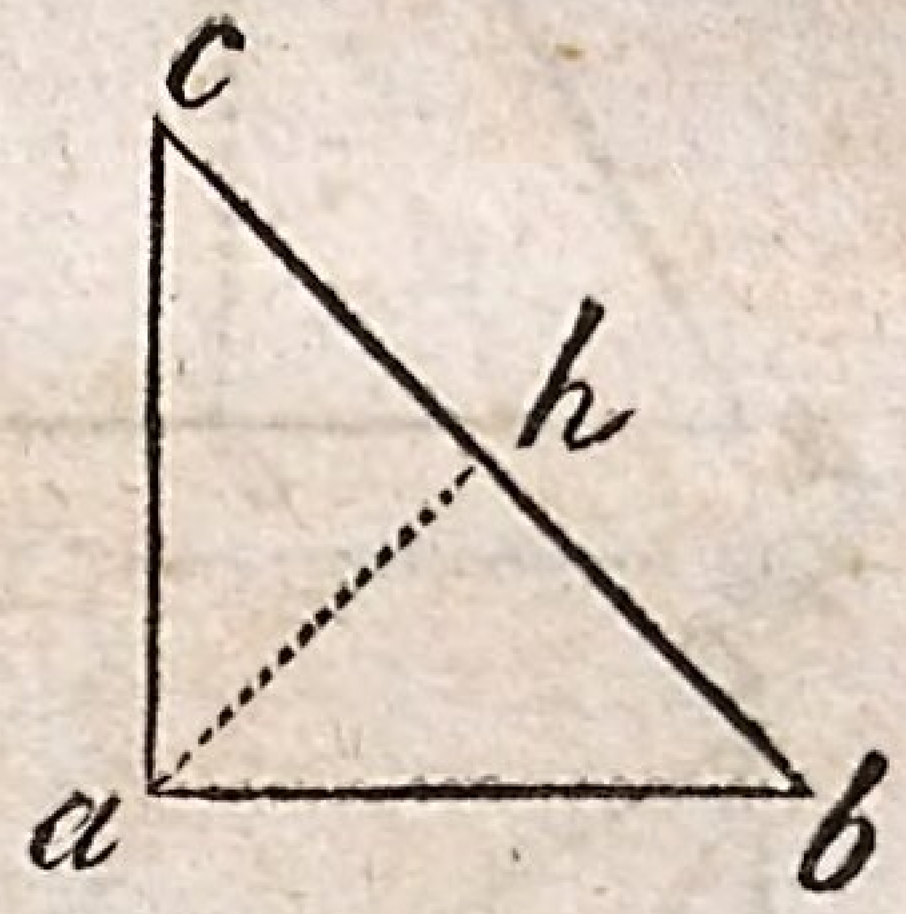


§ 35.

Zusatz. Bei dem gleichseitigen Dreiecke sind auch alle Winkel sich gleich; — bei dem gleichschenkligen nur zwei Winkel, und zwar diejenigen, welche den gleichen Schenkeln gegen über oder auf der Grundlinie liegen; — und bei dem ungleichseitigen Dreiecke ist kein Winkel dem andern gleich.

§ 36.

Erklärung. Bei dem rechtwinkligen Dreiecke heißen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden oder einschließen, die Catheten, wie ab und bc, und diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber stehet, die Hypothenuse, wie bc.



§ 37.

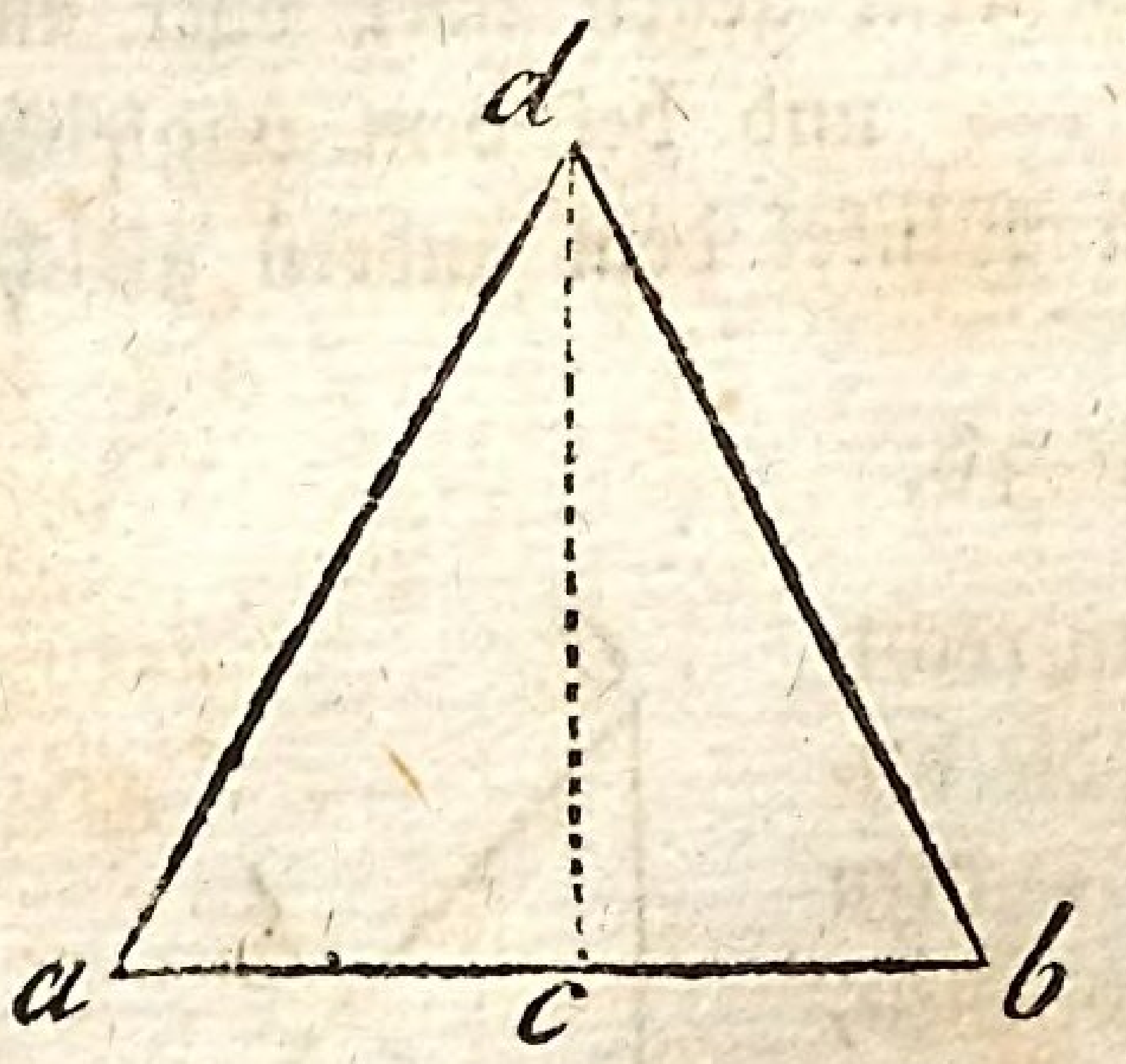
Erklärung. Bei einem Dreiecke kann man jede beliebige Seite zur Grundlinie oder Basis annehmen. Nimmt man ab dazu an, so ist c die Spitze des Dreiecks, und die senkrechte Linie, welche von der Spitze nach der Grundlinie gehet, heißt die Höhe des Dreiecks, wie cd in der ersten Fig. der folg. Seite.

§ 38.

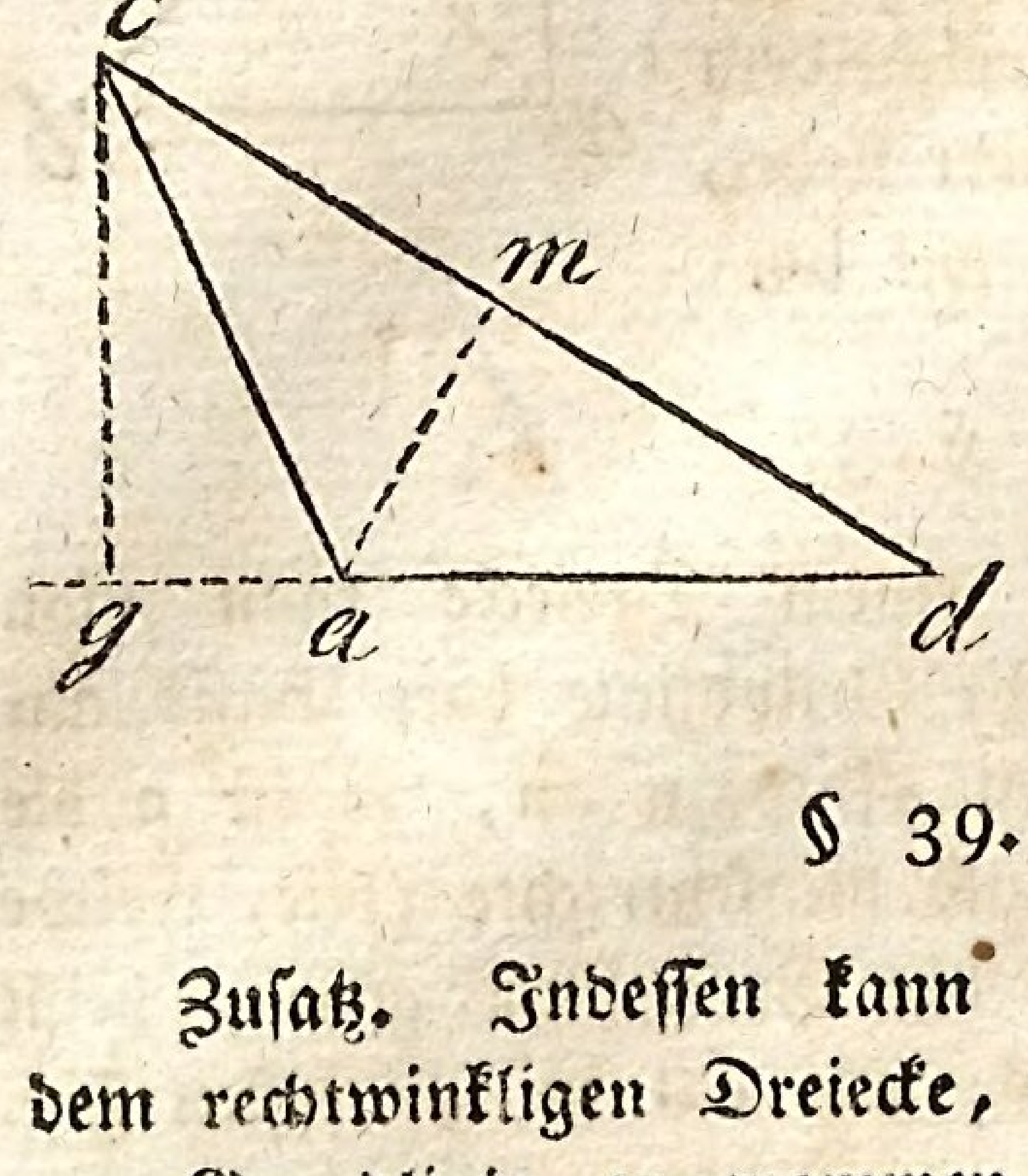
Zusatz. Die Höhe bei einem Dreiecke kann auf eine dreifache Art nach der Basis hinfallen.

1. Bei einem rechtwinkligen Dreiecke fällt diese, sobald man die eine Cathete zur Grundlinie annimmt, in den einen Endpunkt der Basis, das ist der andern Cathete, wie a c in dem △ a b c auf voriger Seite.

2. Bei dem spitzwinkligen Dreiecke fällt sie zwischen die beiden Endpunkte der Grundlinie, wie cd in dem △ adb.



3. Bei dem stumpfwinkligen Dreiecke fällt sie außerhalb des Dreiecks auf die verlängerte Grundlinie, wie cg in dem △ acd.



§ 39.

Zusatz. Indessen kann die Höhe sowol bei dem rechtwinkligen Dreiecke, wenn die Hypothenuse zur Grundlinie angenommen wird, wie auch bei

dem stumpfwinkligen eben so gut, wie bei dem spitzwinkligen, zwischen die Endpunkte der Grundlinie fallen, wie es bei dem rechtwinkligen Dreiecke abc mit ah und in dem stumpfwinkligen Dreiecke mit am der Fall ist.

B. Von den vierseitigen Figuren.

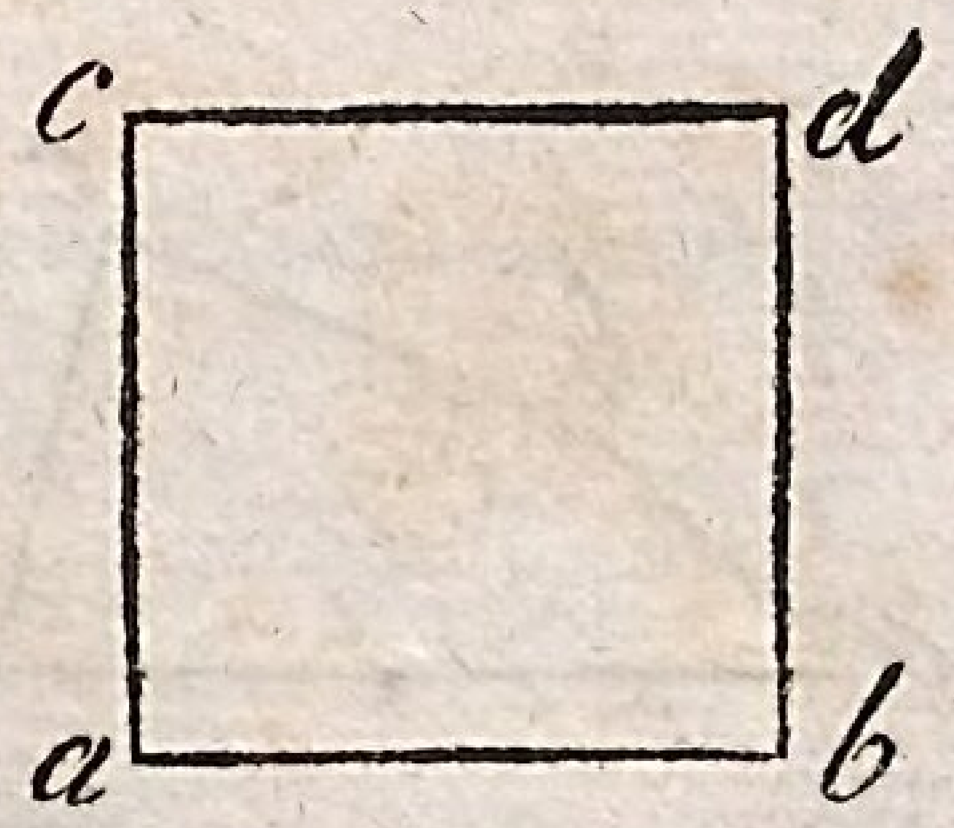
§ 40.

Erklärung. Eine vierseitige Figur ist ein von vier Seiten eingeschlossener Raum.

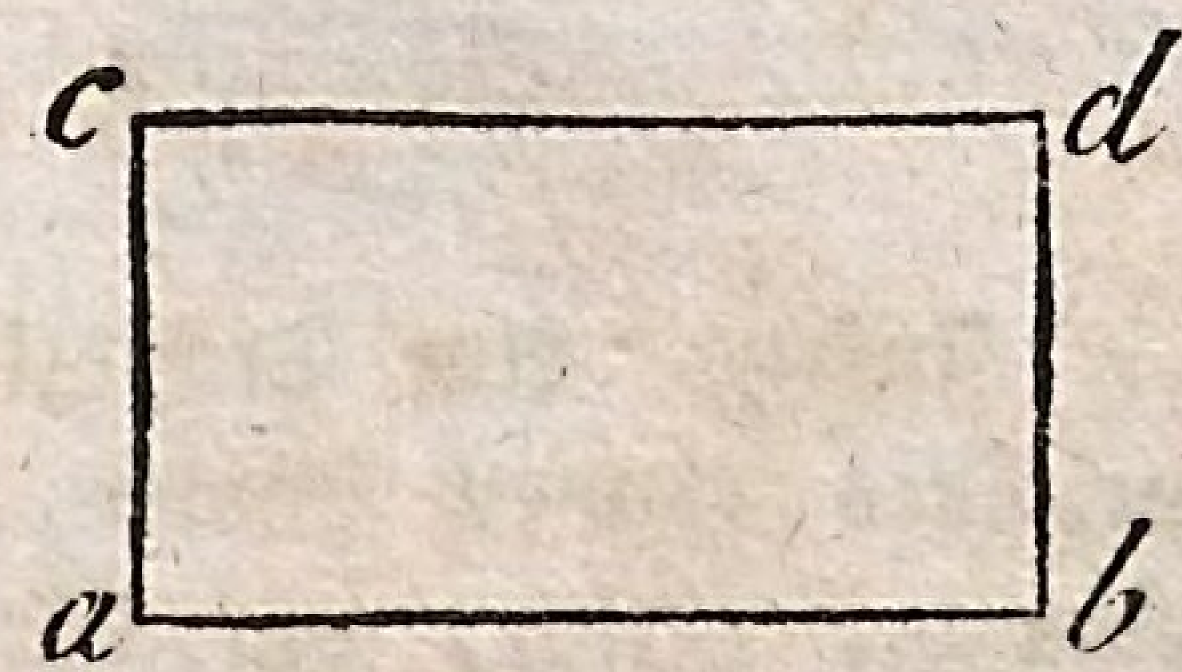
§ 41.

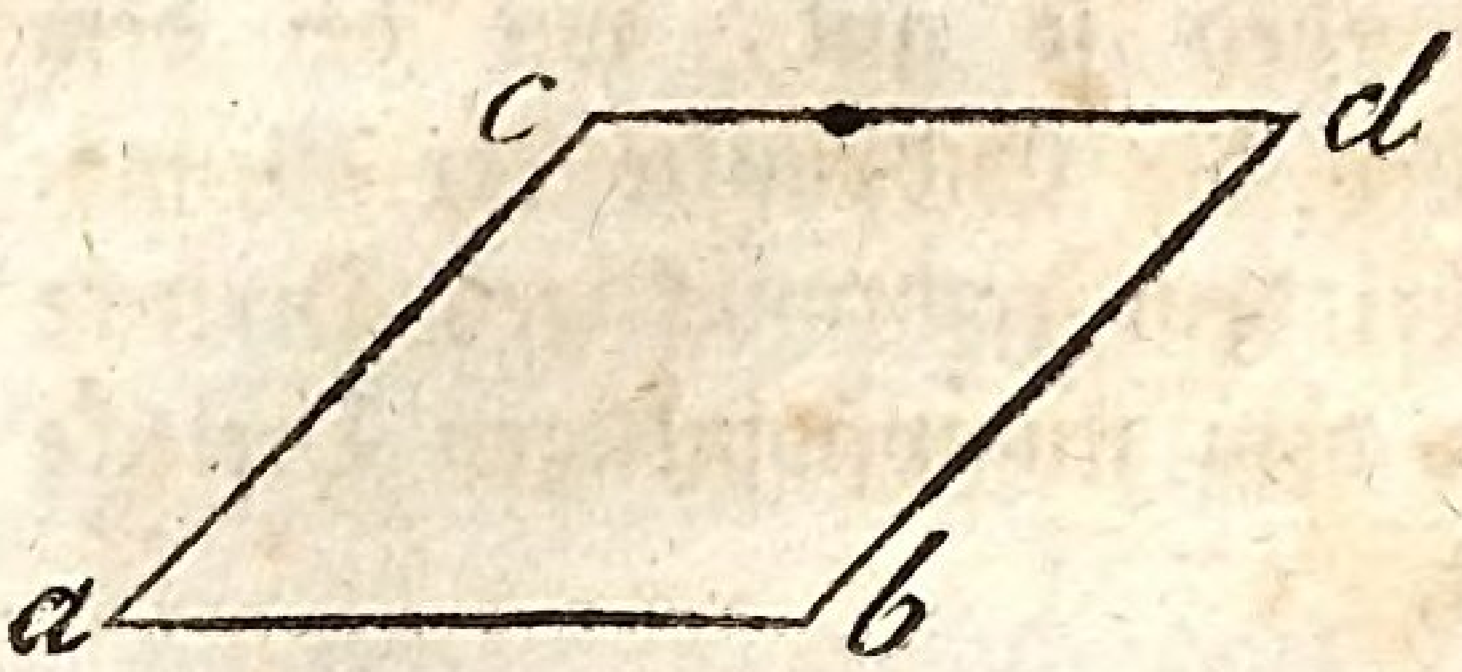
Zu diesen gehören:

1. Das Quadrat. Dieß ist eine viergleichseitige, rechtwinklige Figur.

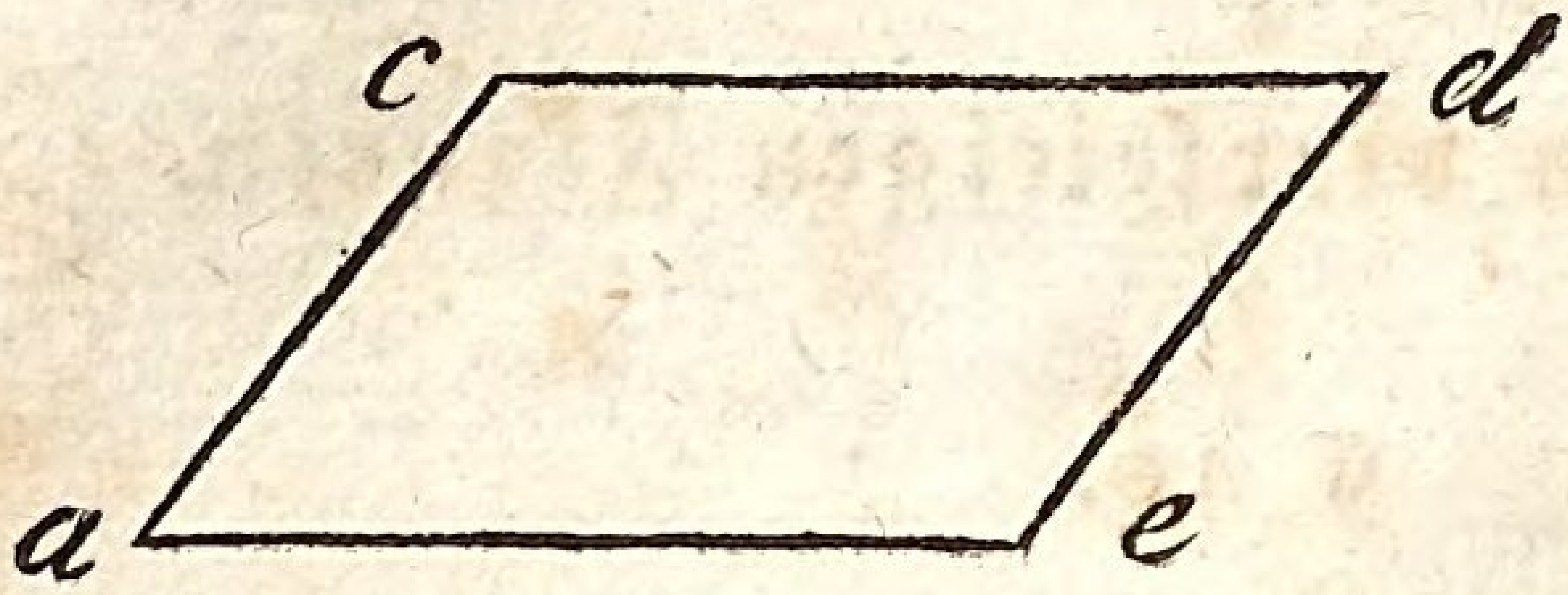


2. Das Rektangel oder Oblongum od. Rechteck. Dieß ist eine vierseitige Figur, an welcher die gegenüberstehenden Seiten sich einander gleich sind, und 4 rechte Winkel hat.

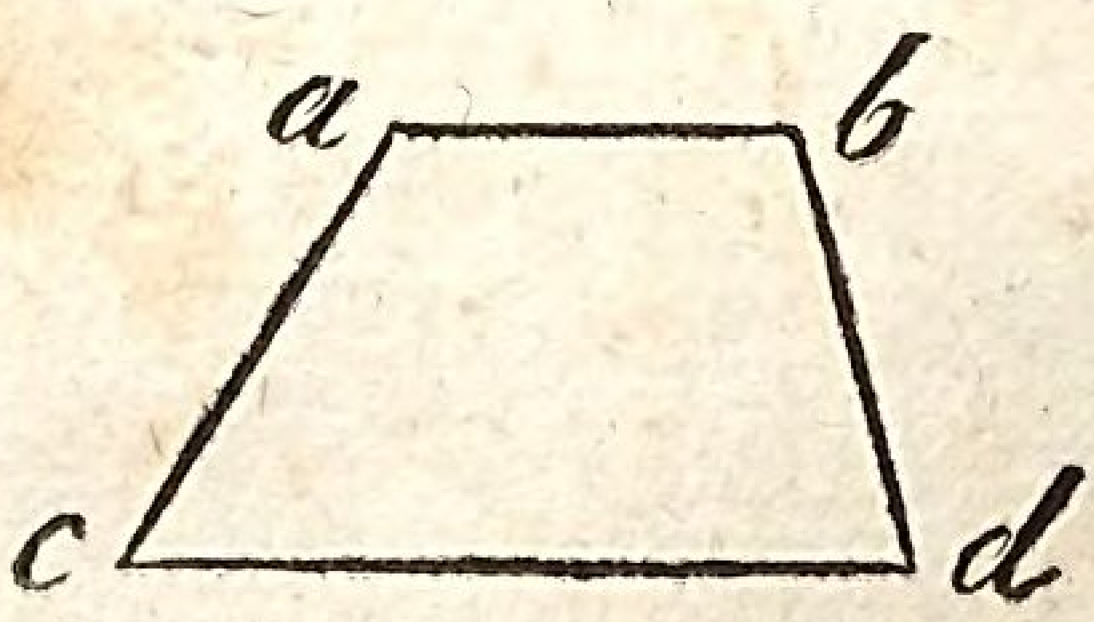




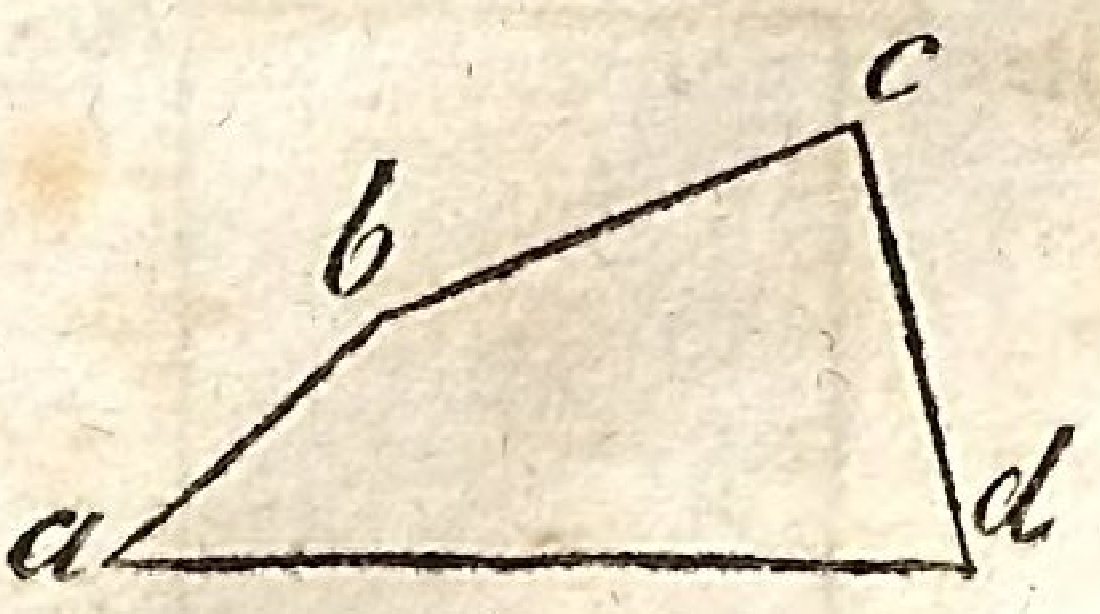
3. Der Rhombus oder die Raute. ist eine 4 gleichseitige, aber schiefwinklige Figur.



4. Das Rhomboides. Dieß ist eine 4 seitige Figur, an welcher die gegenüberstehenden Seiten sich gleich sind, und 4 schiefe Winkel hat.



5. Das Trapezium. Dieß ist eine 4 seitige Figur mit 2 Parallel-Seiten.

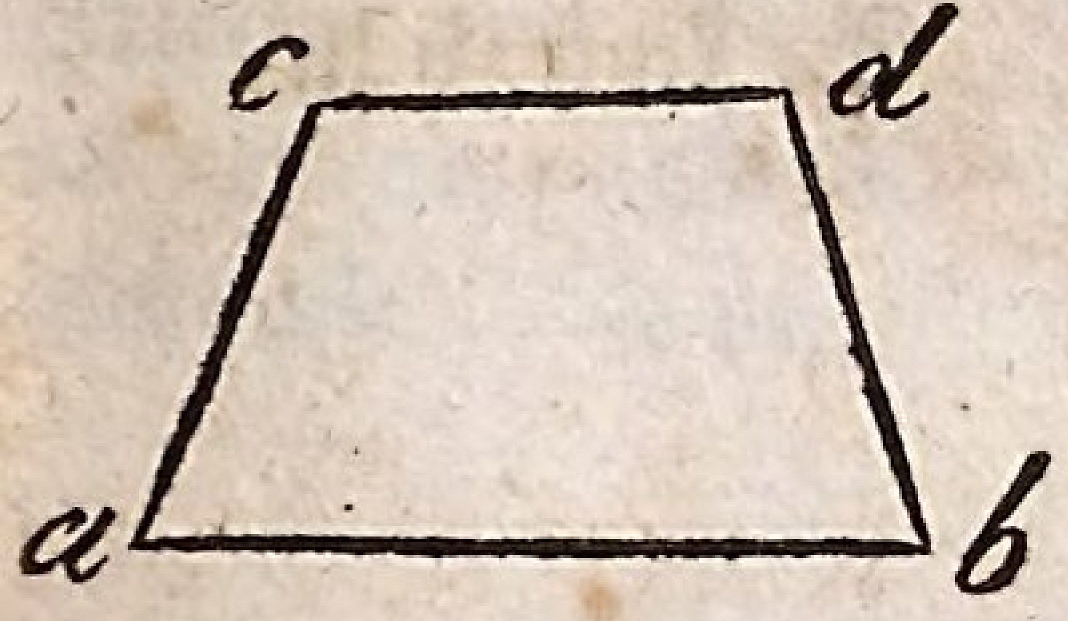


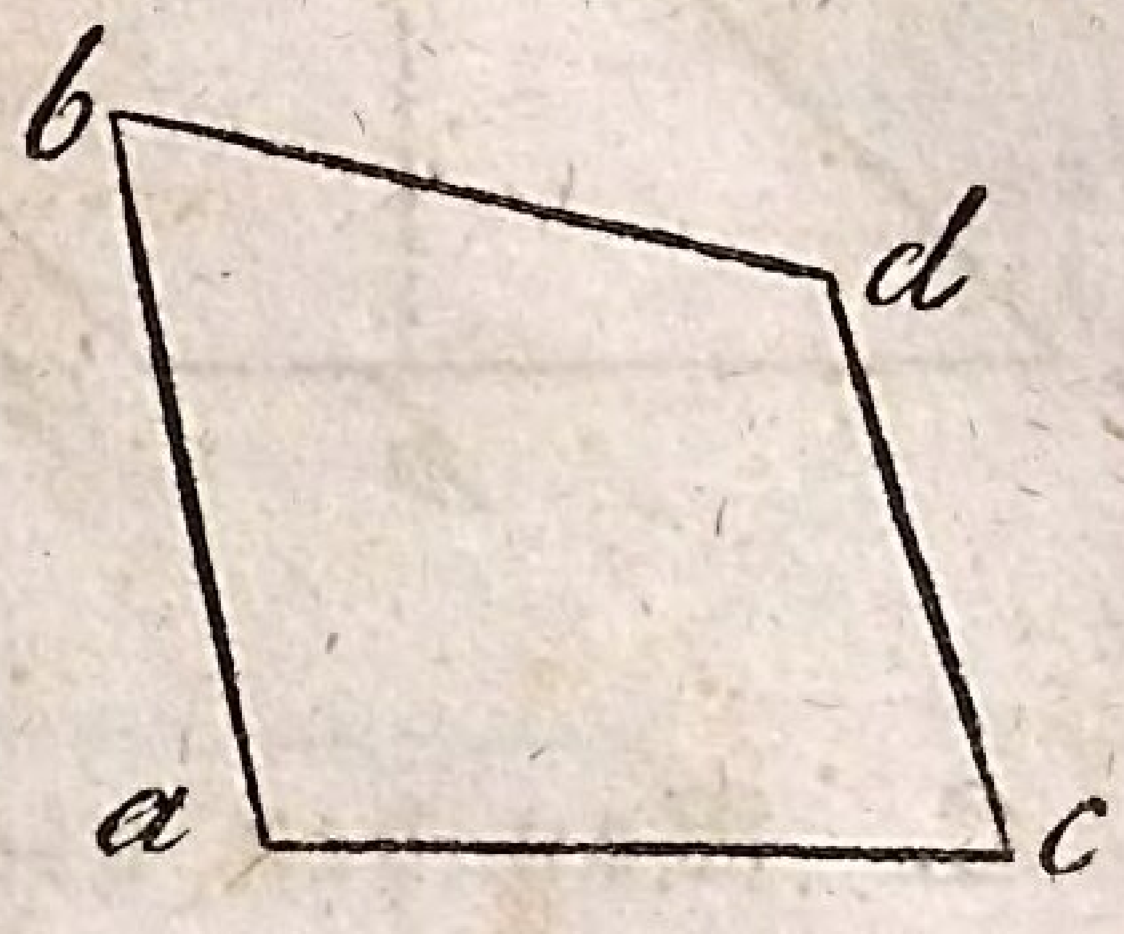
6. Das Trapezoides. Dieß ist eine 4 seitige Figur ohne alle Parallel-Seiten.

§ 42.

Zusatz. Am Trapezium, wie auch am Trapezoides können immer zwei, ja drei Seiten sich einander gleich, nur dürfen bei der ersten Figur nur zwei Seiten mit einander parallel sein, und bei der letztern darf keine Seite mit der andern

parallel laufen. Siehe ein Trapezium und ein Trapezoides mit 3 gleichen Seiten ac, ab, bd.



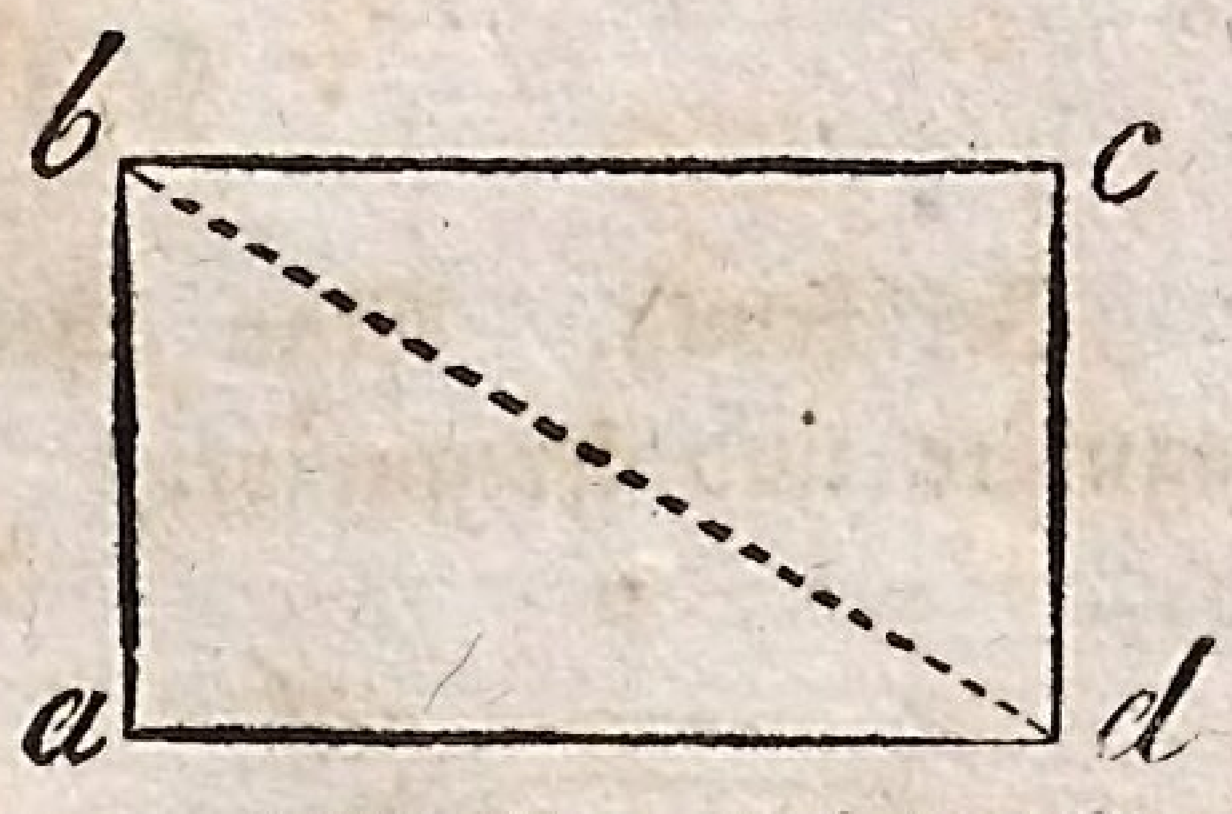


§ 43.

Zusatz. Die vier ersten Figuren, das Quadrat, Rektangel, Rhombus und Rhomboides führen den gemeinschaftlichen Namen Parallelogramme, das heißt, Figuren mit gegenüberstehenden Parallelseiten.

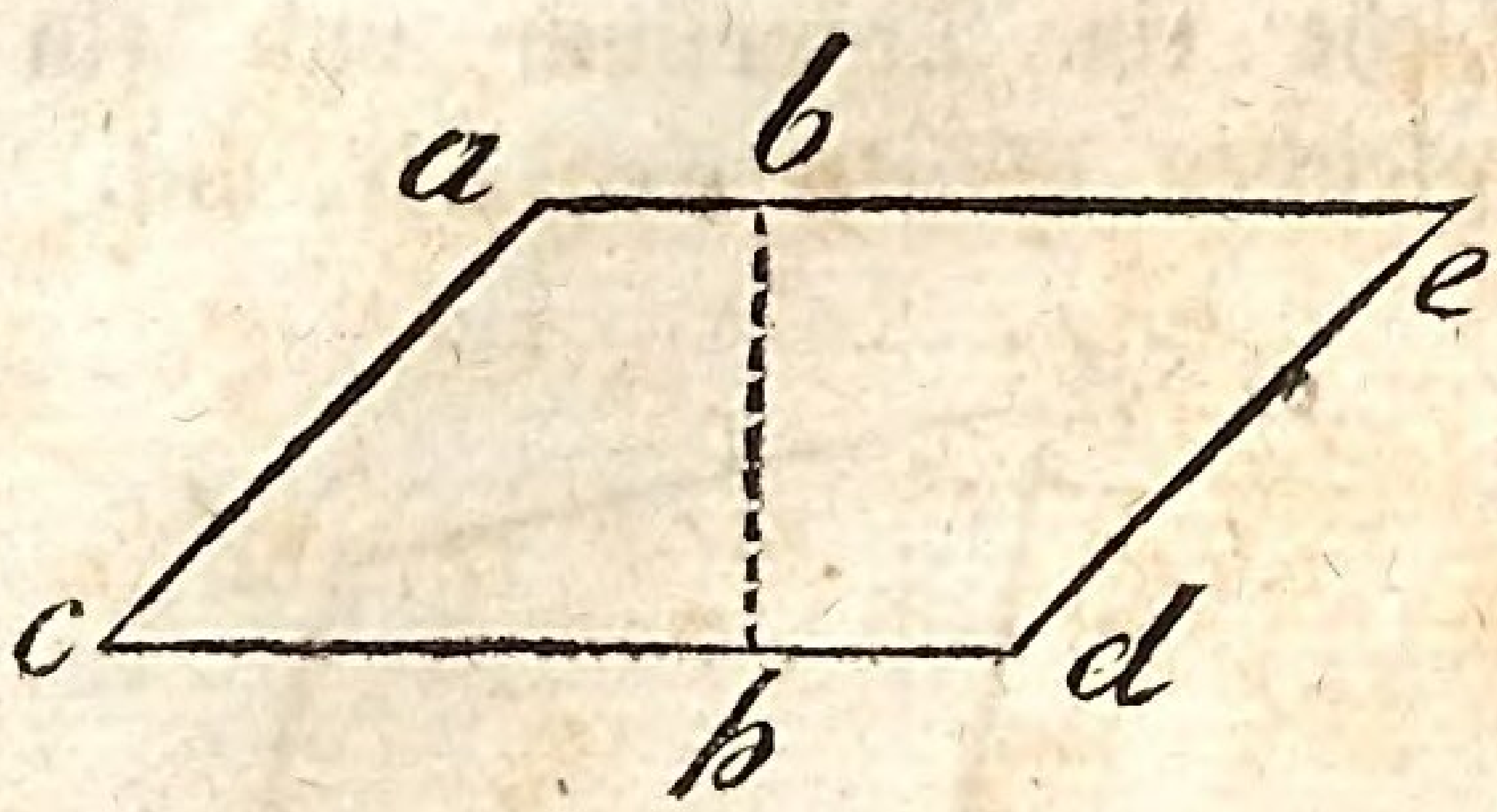
§ 44.

Erklärung. Diejenige Linie, welche man aus dem einen Winkel der Figur nach dem gegenüberstehenden ziehet, heißt eine Diagonallinie. Diese Linie theilt jedes Viereck in zwei Theile und jedes Parallelogramm in zwei gleiche Theile.



§ 45.

Erklärung. Diejenige Linie, welche zwischen der Grundlinie und der gegenüberstehenden Parallel=



seite senkrecht stehet, heißt die Höhe des Parallelogramms. S. Linie b h.

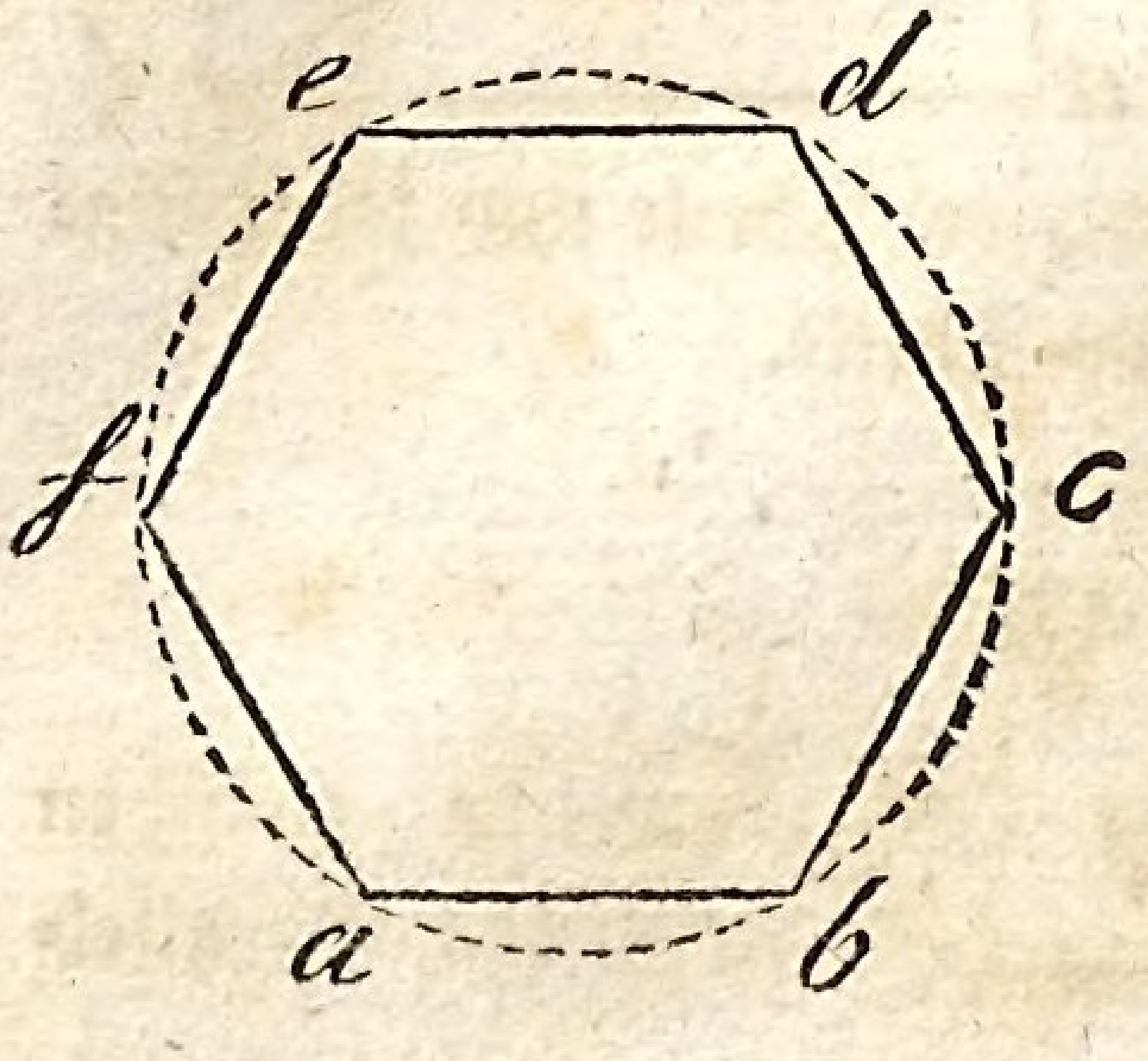
C. Von den vielseitigen Figuren oder Vielecken.

§ 46.

Ein Vieleck ist eine Figur oder Fläche, welche mehr als vier Seiten hat. Hat eine solche Figur fünf Seiten, so heißt sie ein Fünfeck, hat sie sechs Seiten, so heißt sie ein Sechseck u. s. w.

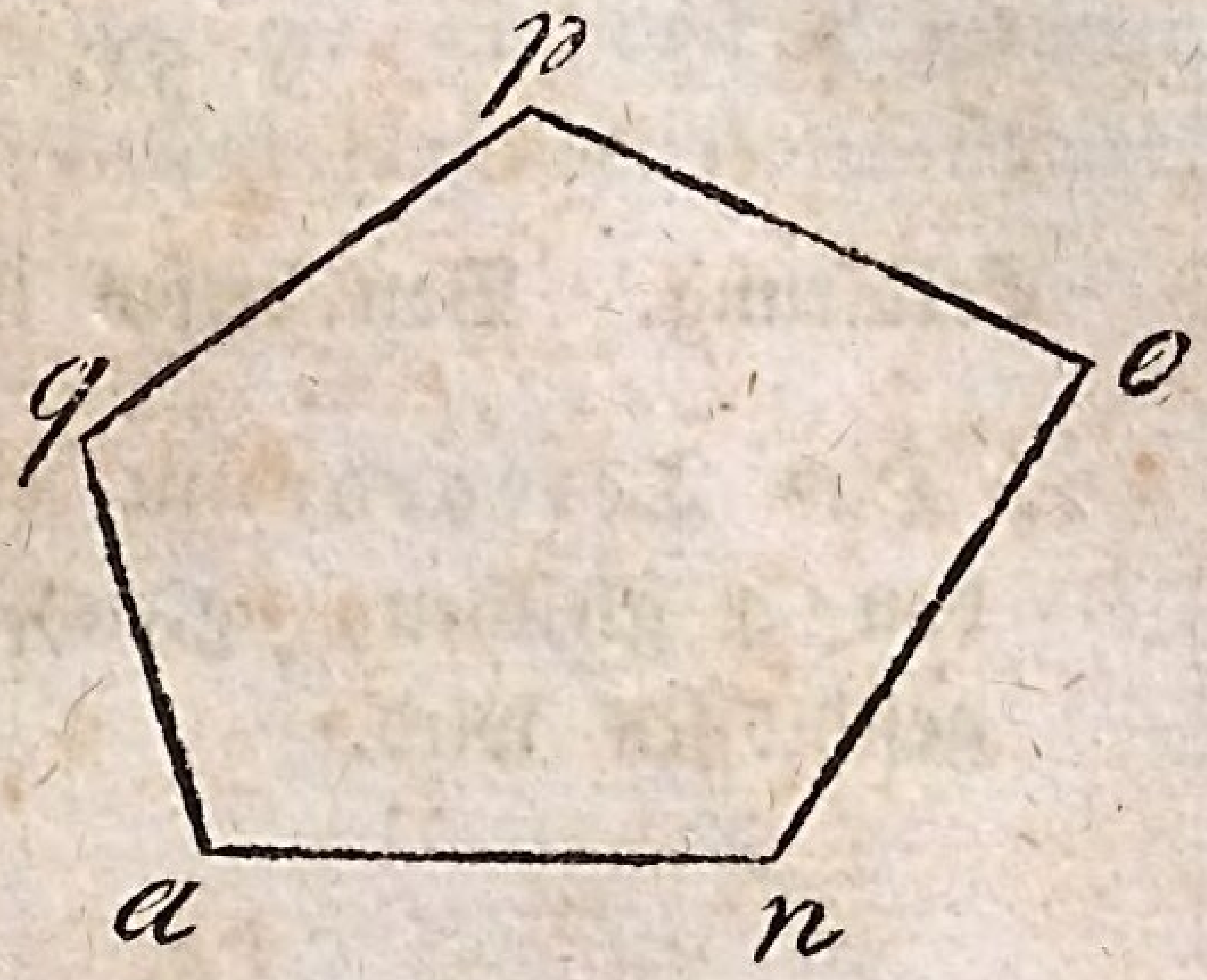
§ 47.

Erklärung. Man theilt diese Figuren ein in reguläre und irreguläre.



Eine reguläre ist eine solche, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

Eine irreguläre ist eine solche, bei welcher nicht die Seiten und Winkel, oder wenigstens nicht alle gleich sind.



V. Von den geometrischen Körpern.

§ 48.

Erklärung. Ein geometrischer Körper ist ein von Flächen eingeschlossener Raum.

§ 49.

Erklärung. Sind die Flächen eines solchen Körpers reguläre Figuren und sich gleich, so nennt man denselben einen regulären, im Gegentheile aber einen irregulären.

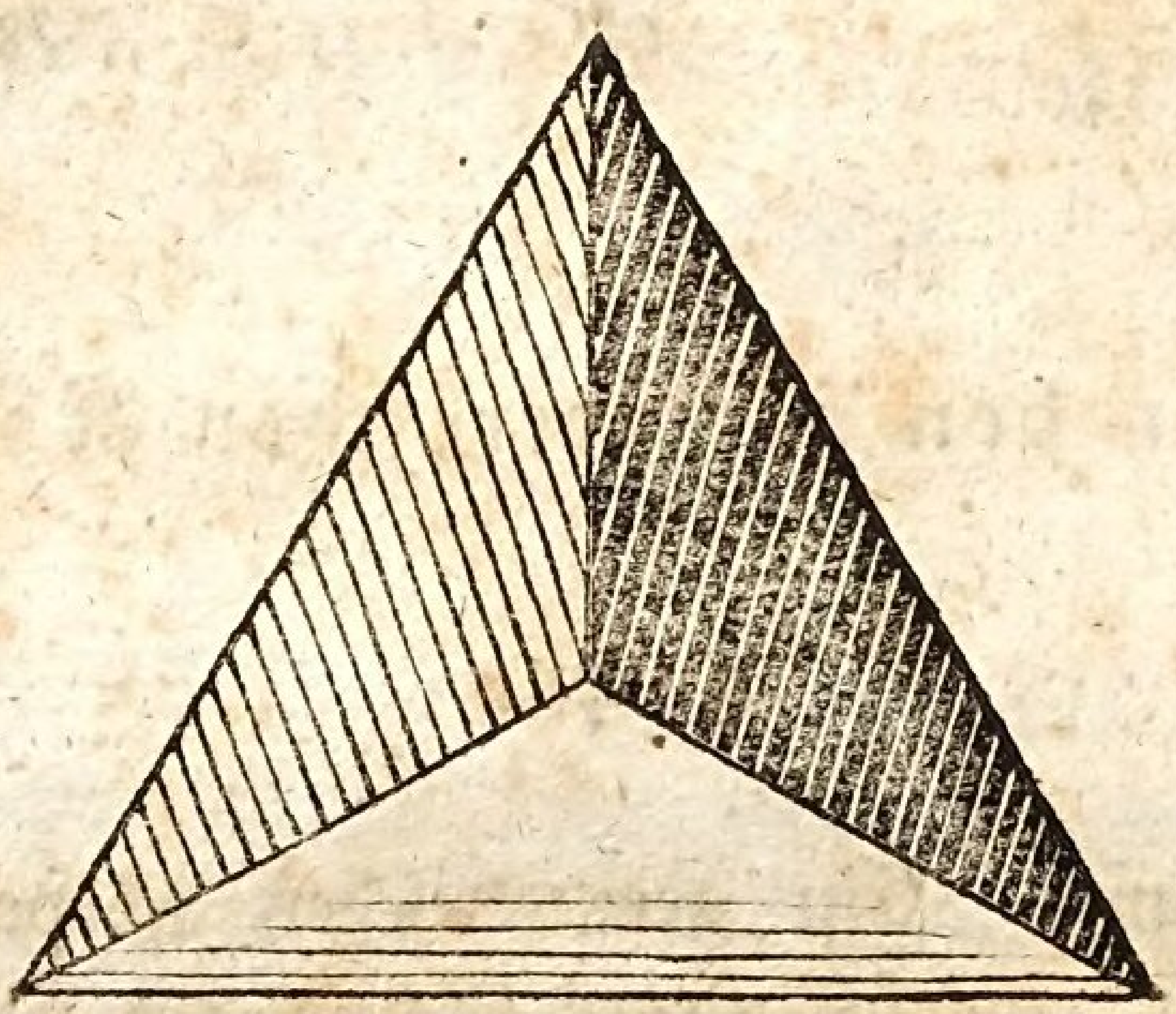
§ 50.

Zusatz. Zu den regulären Körpern gehören folgende sechs, als: 1. das Tetraedrum, 2. das Hexaedrum, 3. das Oktaedrum, 4. das Dodekaedrum, 5. das Ikosaedrum und 6. die Kugel.

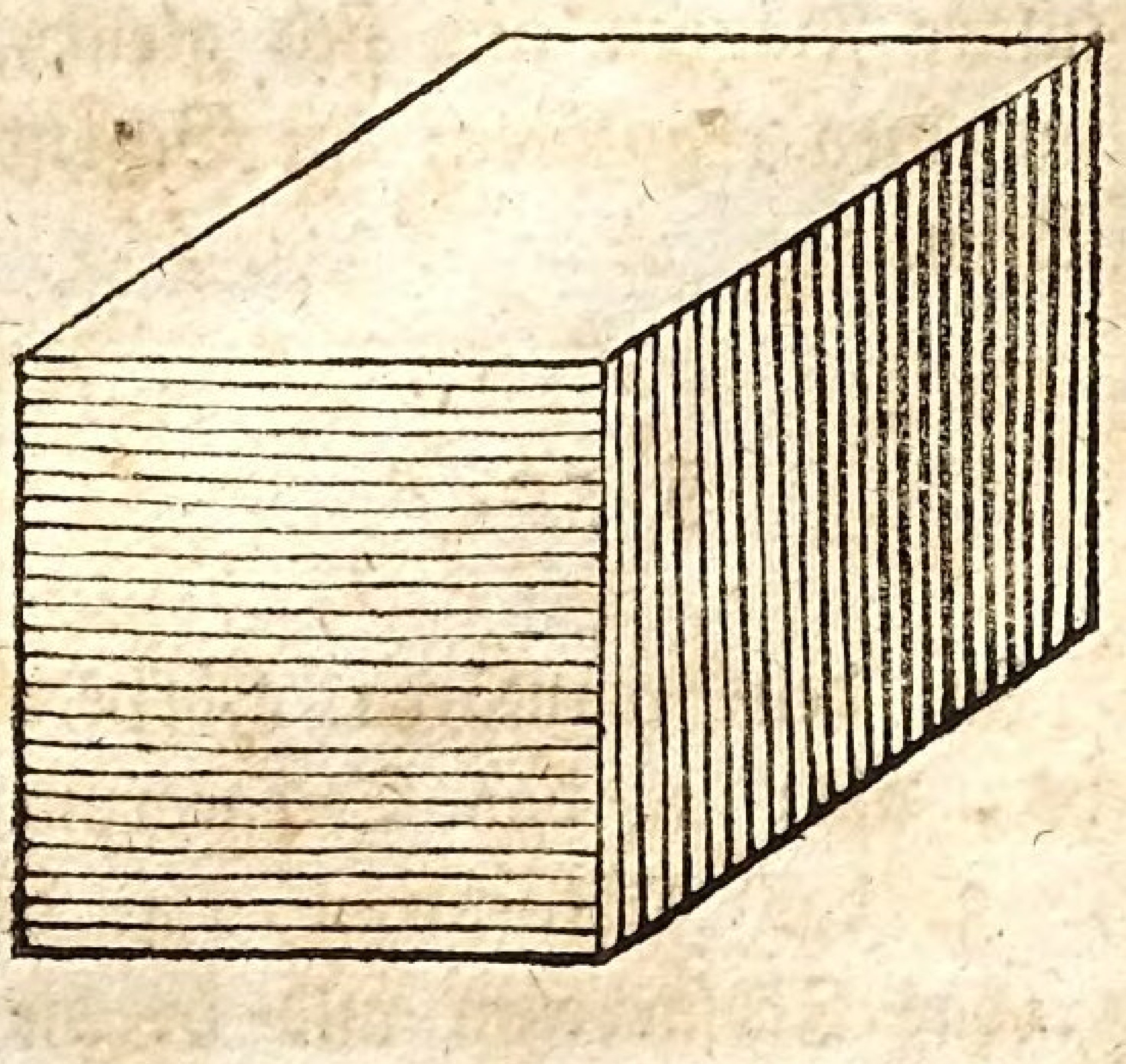
§ 51.

Erklärung. Von diesen ist:

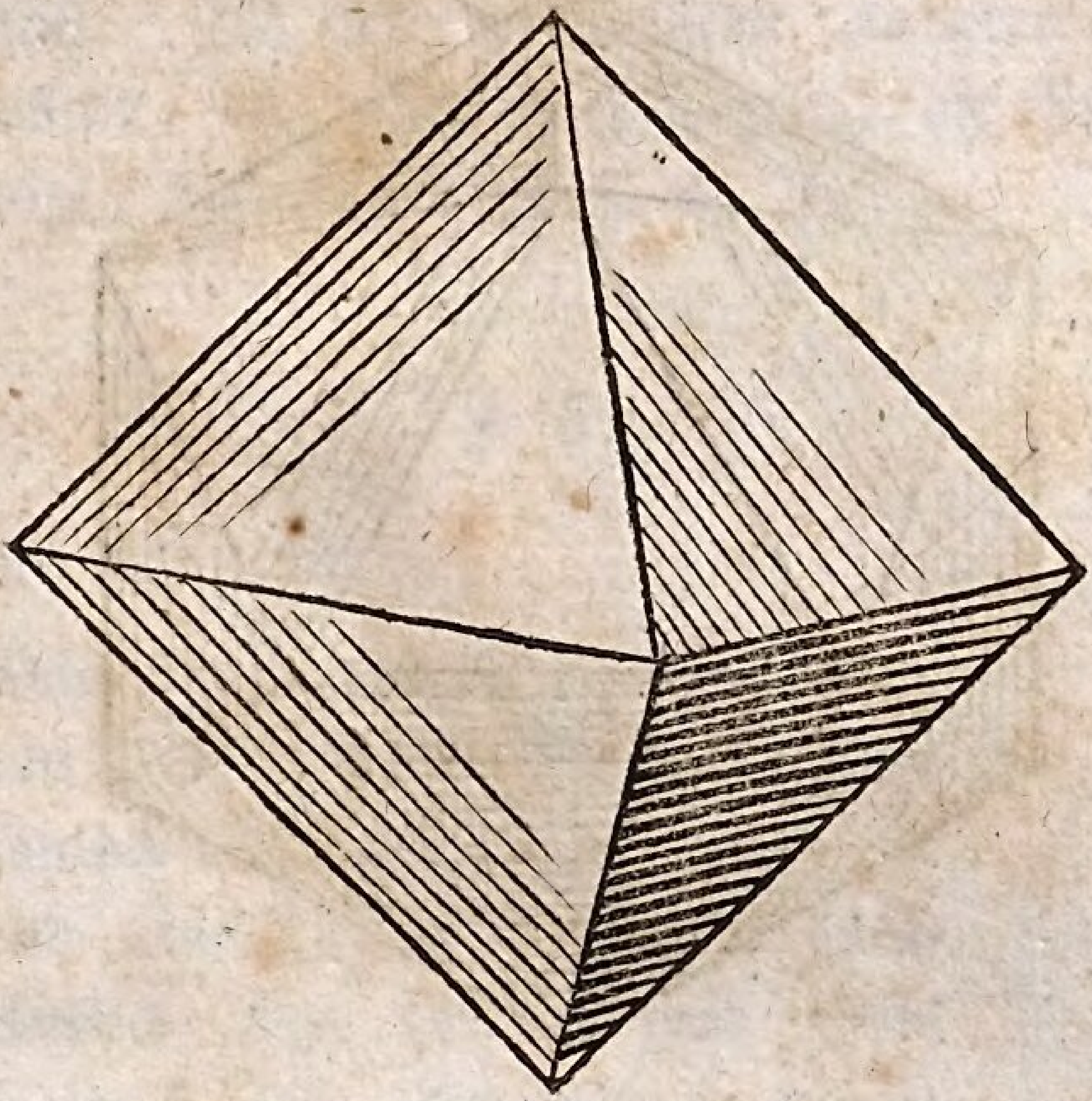
1. Das Tetraedrum ein Körper, welcher von 4 gleichen, gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen wird.



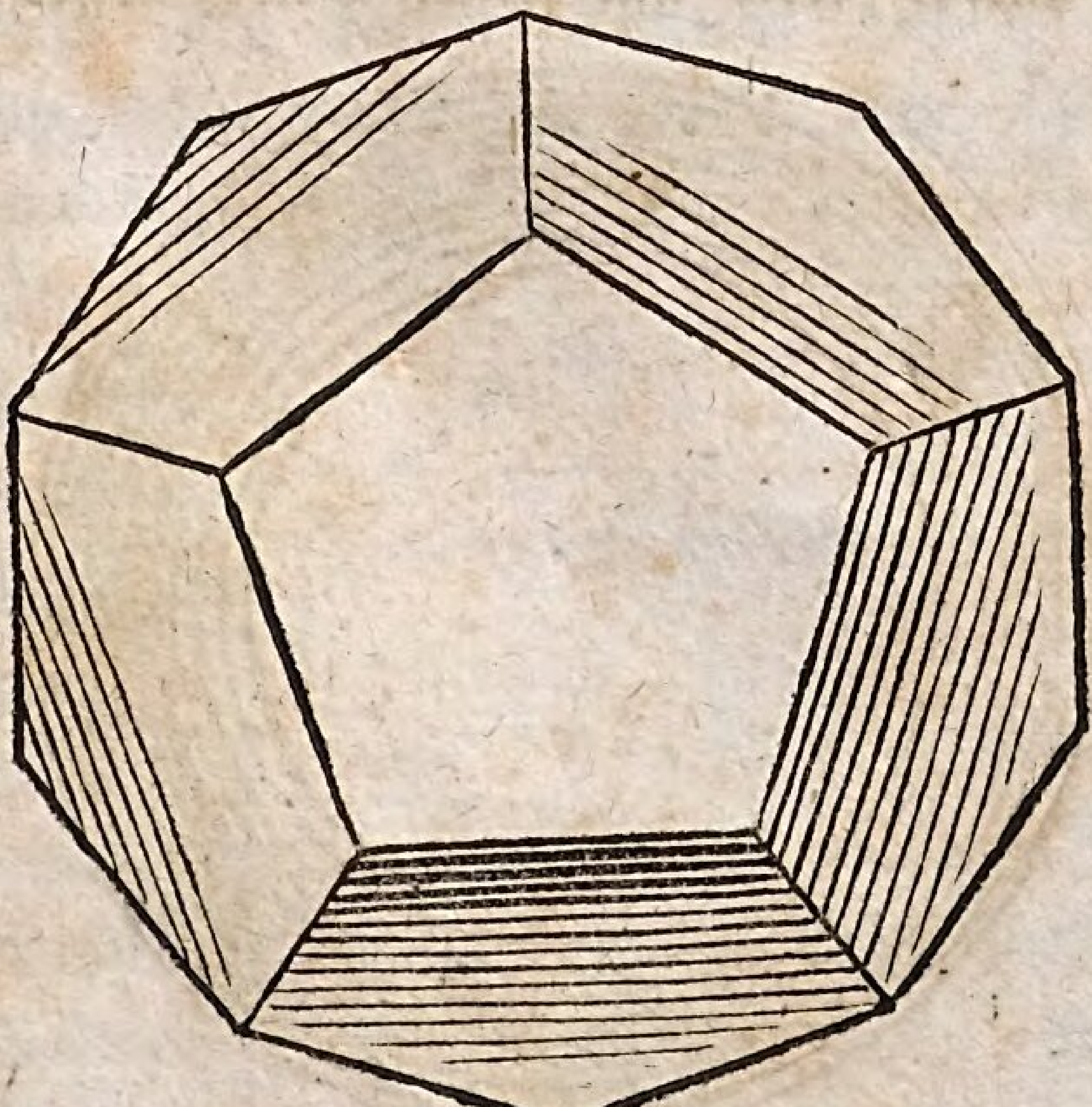
2. Das Hexaedrum oder der Kubus oder Würfel ist ein von 6 gleichen Quadraten eingeschlossener Raum.



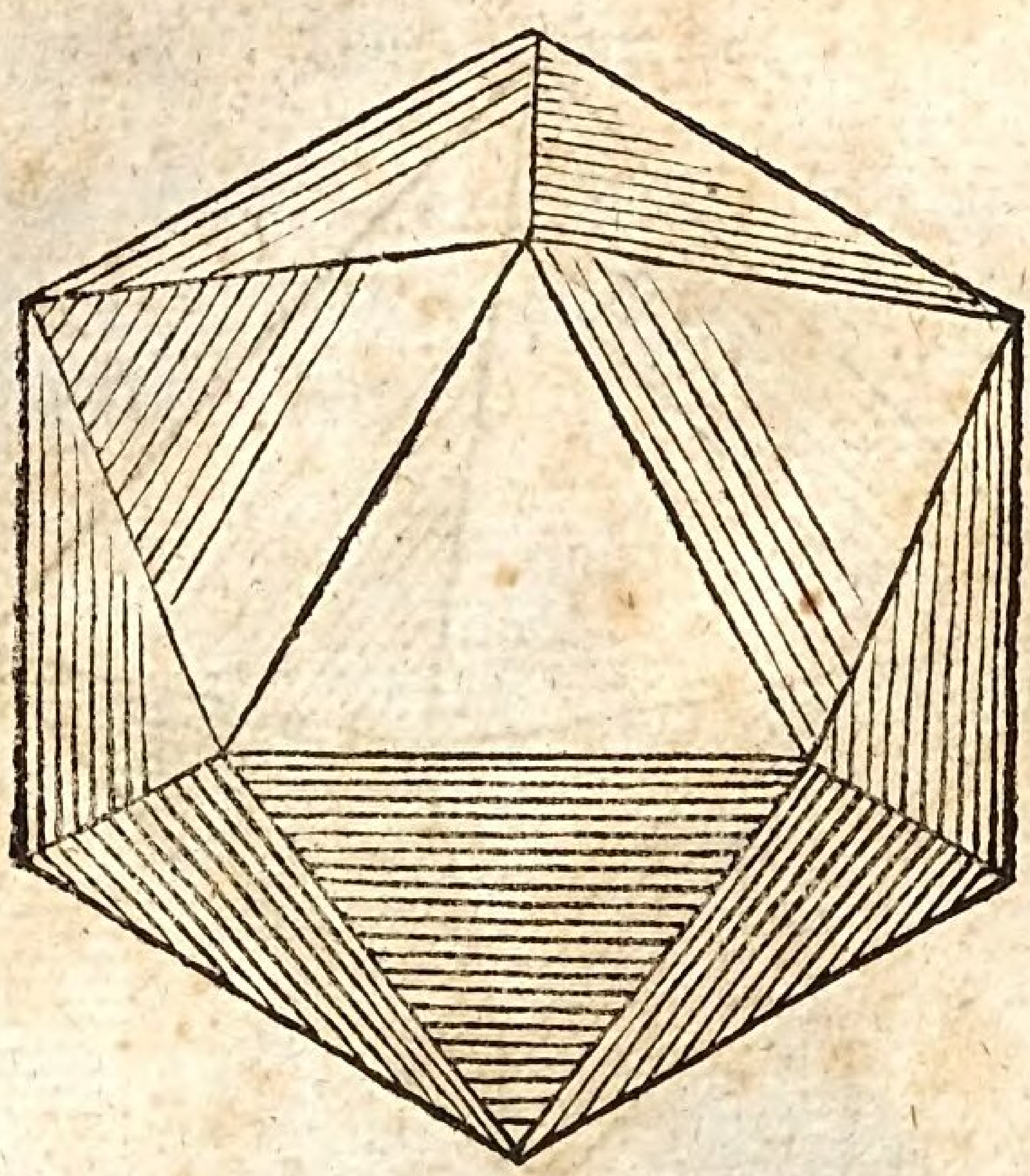
3. Das Oktaedrum ist ein von 8 gleichen, gleichseitigen Dreiecken eingeschlossener Körper.



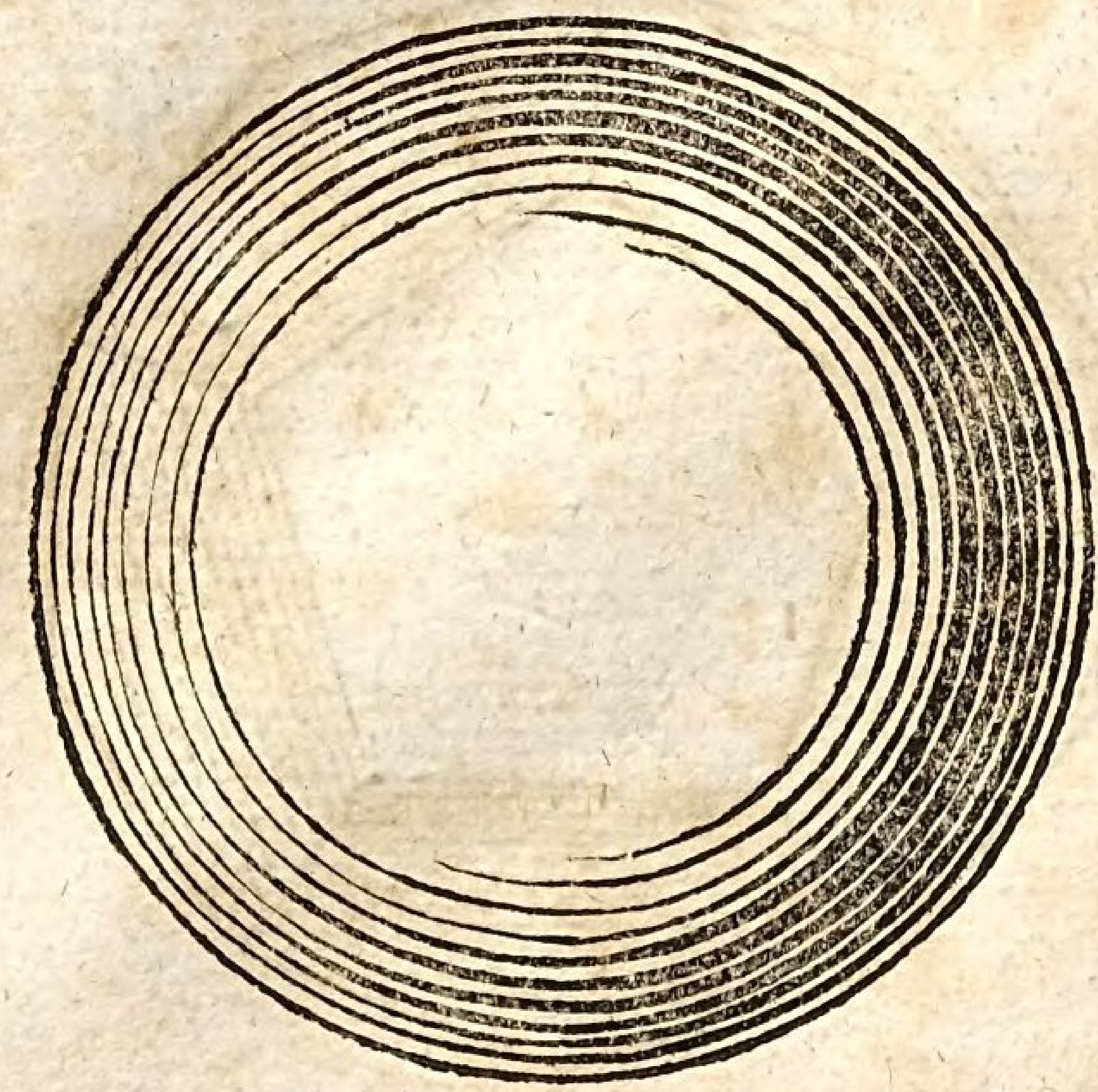
4. Das Dodekaedrum ist ein Körper, welcher von 12 gleichen regulären Fünfecken eingeschlossen ist.



5. Das **Ikosaedrum** ist ein von 20 gleichen, gleichseitigen Dreiecken eingeschlossener Körper.



6. Die **Kugel** ist ein Körper, dessen Oberfläche in allen ihren Theilen gleichweit vom Mittelpunkte entfernt ist. Und sie entstehet, wenn sich ein halber Kreis um seinen Durchmesser bewegt.



§ 52.

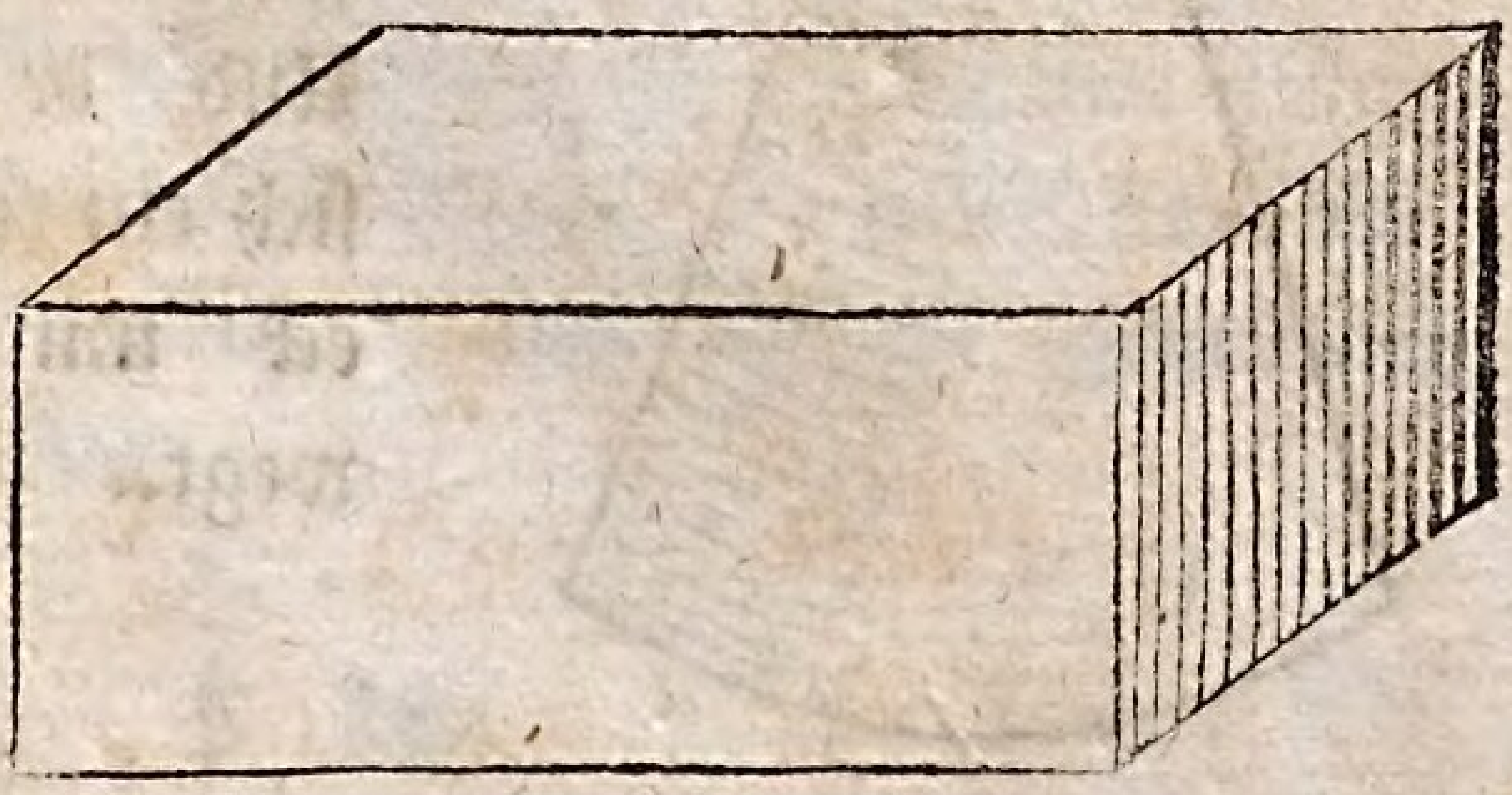
Zusatz. Zu den irregulären Körpern gehören das Prisma, das Parallelepipedum, die Pyramide, die Walze, der Kegel u. s. w.

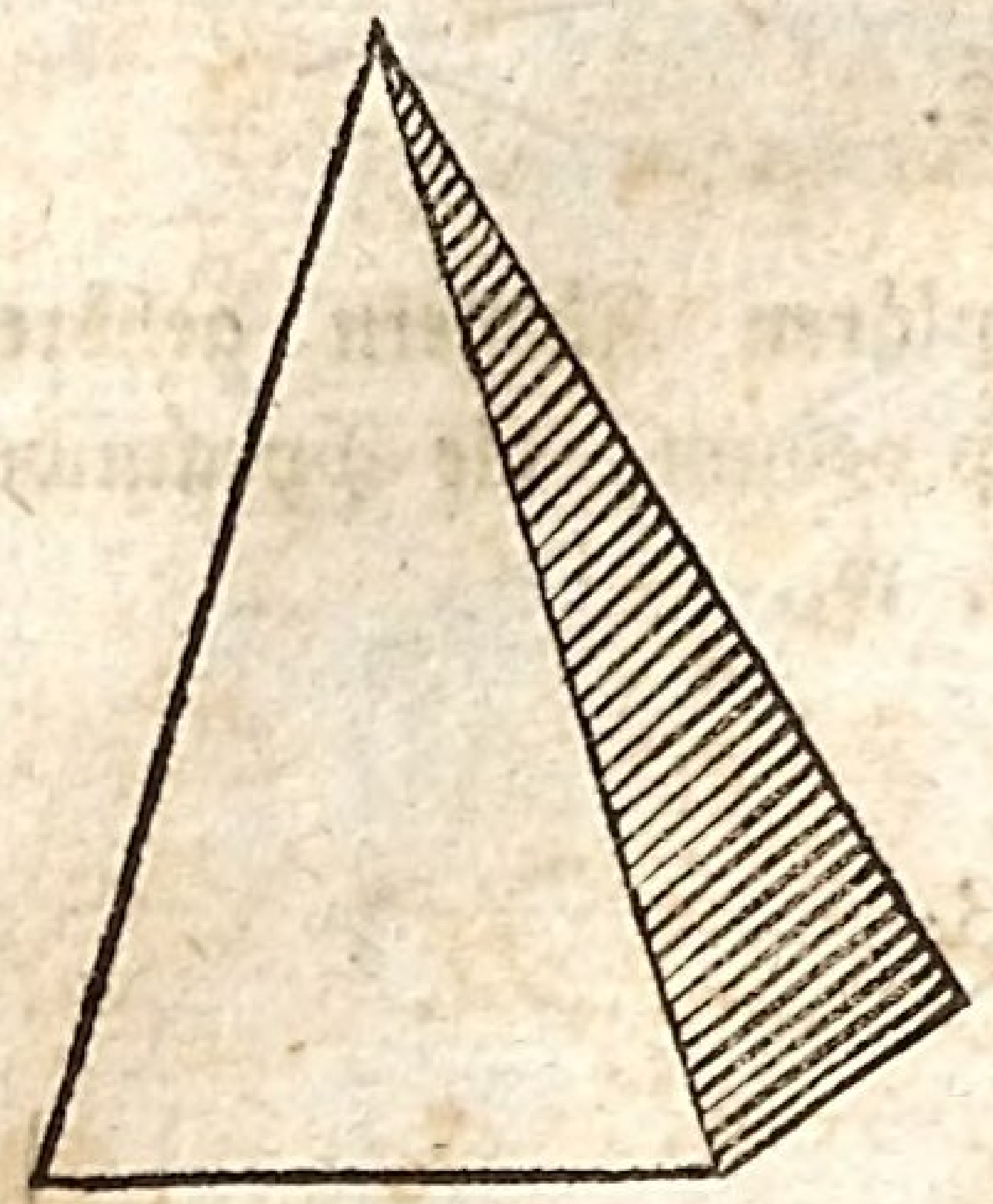
§ 53.

Von diesen ist:

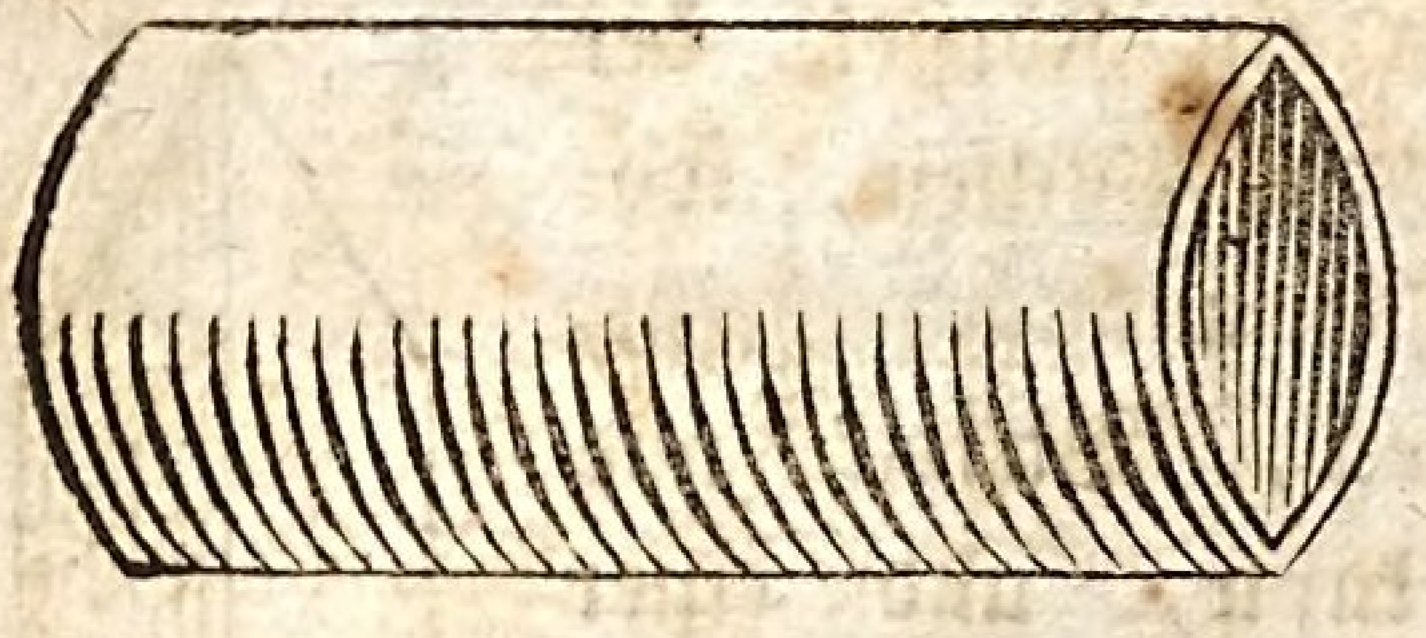
1. Das Prisma ein Körper, der von zwei gleichen Flächen, wovon die eine die Grundfläche heißt, und ein Dreieck, Viereck und Vieleck sein kann, und einer Seitenfläche, die aus so vielen Parallelogrammen bestehet, als die Grundfläche Seiten hat, eingeschlossen ist. Ist die Grundfläche bei diesen Körpern ein Parallelogramm, so heißt derselbe eigentlich

2. ein Parallelepipedum. Das ist demnach ein Körper, der von 6 Parallelogrammen, von welcher die gegenüberliegenden einander gleich und ähnlich sind, eingeschlossen wird.

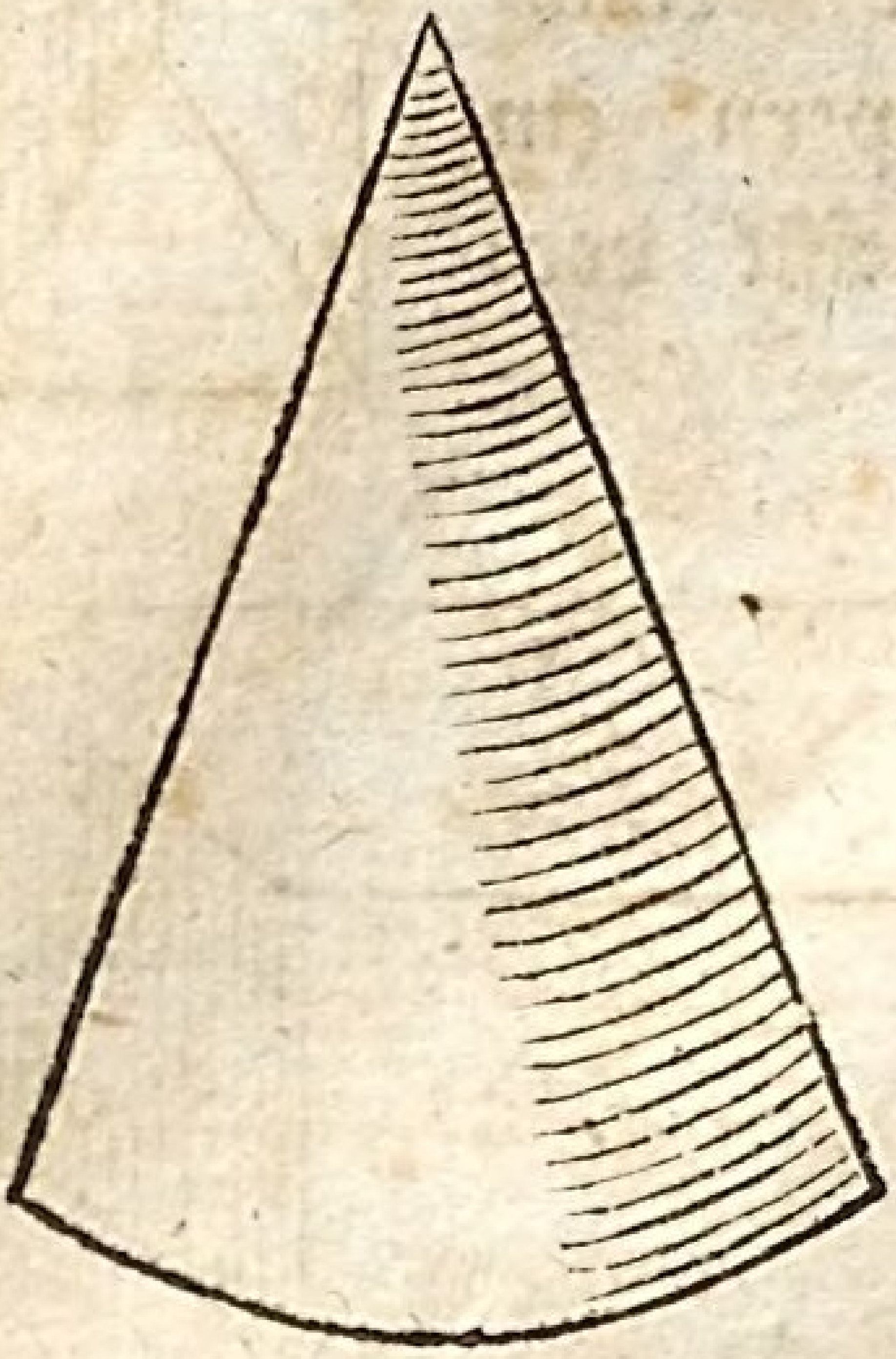




3. Die Pyramide ist ein Körper, dessen Grundfläche ein Dreieck, Viereck, oder Vieleck sein kann und dabei so viele Dreiecke zur Seitenfläche hat, als die Grundfläche Seiten besitzt.



4. Die Walze oder Zylinder ist ein Körper, der von einer krummen Seitenfläche, die überall von der Achse der Walze gleichweit abstehet, und von zwei gleichen Kreisflächen eingeschlossen ist.



5. Der Kegel oder Conus ist ein Körper, der von einer spitzzulaufenden Seitenfläche und einer Kreisfläche eingeschlossen wird. Und er entstehet, wenn sich ein rechtwinkliges Dreieck um seine Höhe bewegt.

§ 54.

Zusatz. Der Würfel, das Prisma, das Pa=

rallelepipedum und die Walze entstehen, wenn sich ihre Grundflächen parallel an ihren Höhen hinunter bewegen.

§ 55.

Erklärung. Unter der Höhe eines Körpers verstehen wir diejenige gerade Linie, welche von der Grundfläche nach der gegenüberparallelstehenden Fläche und bei dem Kegel und der Pyramide nach der Spitze senkrecht gehet, und welche bei der Walze die Achse genannt wird.

§ 56.

Zusatz. Die Grenzen eines Körpers sind also die Flächen — die Grenzen der Flächen sind die Linien — und die Grenzen der Linien sind die Punkte.

§ 57.

Eine Linie messen heißt die Länge derselben nach einer gegebenen Länge bestimmen. Eine Fläche messen heißt ihre Größe nach einer gegebenen Fläche angeben, und einen Körper messen heißt den körperlichen Raum desselben nach einem gegebenen Körpermaße bestimmen.

§ 58.

Linien können daher nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen und Körper nur durch Körper gemessen werden.

§ 59.

Gerade Linien lassen sich nur durch gerade, und krumme nur durch krumme Linien messen. Auf dem Felde geschieht solches bei den geraden Linien durch Messketten oder Messschnüren. Eine solche Messkette ist in 5 gleiche Theile, welche man Ruthen nennt, und eine jede Ruthe ist wieder in 10 gleiche Theile oder in 10 Schuh eingetheilt, und eine solche eingetheilte Kette heißt eine Decimal-Kette. Sind aber die Ruthen daran in 12 Schuh eingetheilt worden, so wird sie eine Duodecimal-Kette genannt. Auf dem Papiere geschieht solches durch willkührlich angenommene oder gezeichnete Linien, die man ebenfalls in Ruthen, Schuh und Zoll eintheilt. Eine solche eingetheilte Linie nennt man einen verjüngten Maßstab. Sind auf diesem die Ruthen in 10 Schuh, und jeder Schuh in 10 Zoll eingetheilt, so heißt ein solches Maß ein Decimal-Maß. Ist die Eintheilung aber durch 12 geschehen, so wird solches ein Duodecimalmaß genannt. Das Zeichen der Ruthen ist eine oben zur Rechten an der Ziffer stehende Null, z. B. 6 Ruthen $= 6^{\circ}$, das der Schuhe ist ein kleiner senkrechter Strich und das der Zolle sind zwei kleine senkrecht stehende Striche, oben zur Rechten an der Ziffer; z. B. $4' \, 6'' = 4$ Schuh und 6 Zoll.

Anmerkung. Eine allgemeine Uebersicht der Gegenstände der Geometrie findet man am Ende dieses Buches auf einer Tabelle dargestellt.

§ 60.

Krumme Linien werden nur durch krumme Linien, das heißt durch einen Kreis selbst oder durch Theile desselben gemessen. Will man daher einen Kreisbogen messen, so muß man untersuchen, was für einen Theil derselbe von dem Kreise, wozu er gehört, ausmacht. Um dieses leichter verrichten zu können, so hat man deswegen einen Kreis in 360 Theile abgetheilt, welche Theile man Grade nennt. Ein jeder dieser Grade wird wieder in 60 Theile getheilt, welche man Minuten nennt, und jede dieser Minuten theilt man wieder in 60 Theile oder Sekunden ab. Ein solcher eingetheilter halbe Kreis heißt ein Transporteur. Das Zeichen der Grade ist so wie das der Ruthen, das für die Minuten ist gleich dem der Schuhe, und das für die Sekunden ist gleich dem der Zolle; z. B. $64^{\circ}\ 39'\ 14'' = 64$ Grade 39 Minuten und 14 Sekunden.

§ 61.

Jeder Kreis, er mag groß oder klein sein, hat 360 Grade, nur mit dem Unterschiede, daß die des kleinen Kreises kleiner, und die des großen größer sind.

§ 62.

Da die Größe eines Winkels nicht von der Länge der Schenkel desselben, sondern von ihrer Neigung gegen einander abhängt, so wird seine

Größe durch die Größe des Zirkelbogens, der aus der Spitze dazwischen kann gezogen werden, bestimmt. Und da bei Bestimmüng der Größe von diesem von dem Kreise, wovon er ein Theil ist, abhängt, so kann solche auch nur durch den Kreis, wozu der Bogen gehört, ausgemittelt werden. Macht dieser den 4ten Theil des Kreises aus, so ist auch dieses das Maß des Winkels. Um dieses leichter bestimmen zu können, so gebraucht man dazu das vorhin erwähnte Werkzeug, den Transporteur. Auf dem Felde geschiehet solches durch das Astrolabium, Boussole, Mensul, und in der höhern Geometrie durch Quadranten, Oktanten und Sextanten u. s. w.

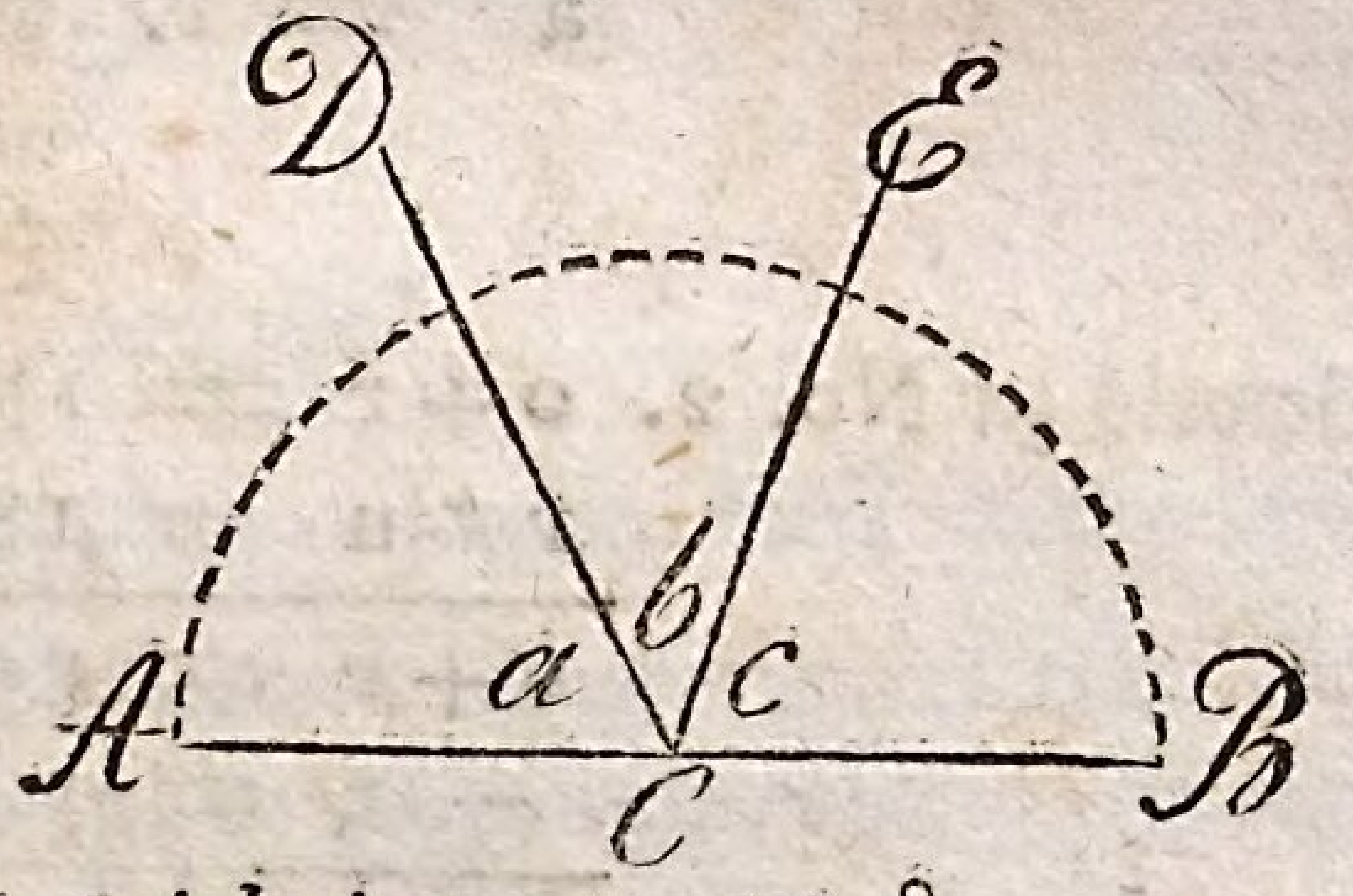
I. Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verwandlung der Figuren.

§ 1.

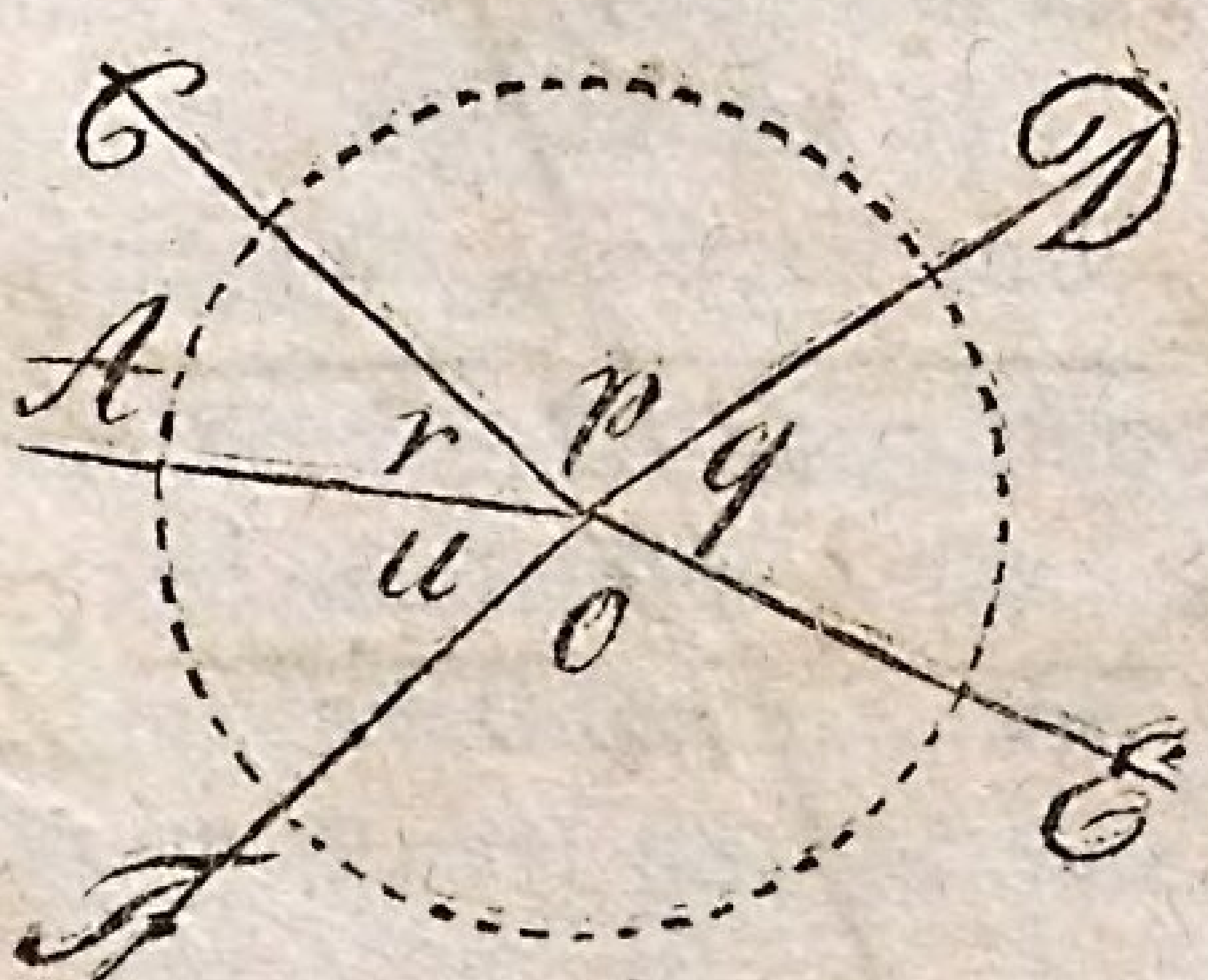
Grundsätze. 1. Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind sich gleich.

2. Jeder halbe Kreis hat 180°; daher müssen alle Nebenwinkel, weil sie in einen halben Kreis eingeschlossen werden können, 180° haben. Siehe $a + b + c = 180°$.

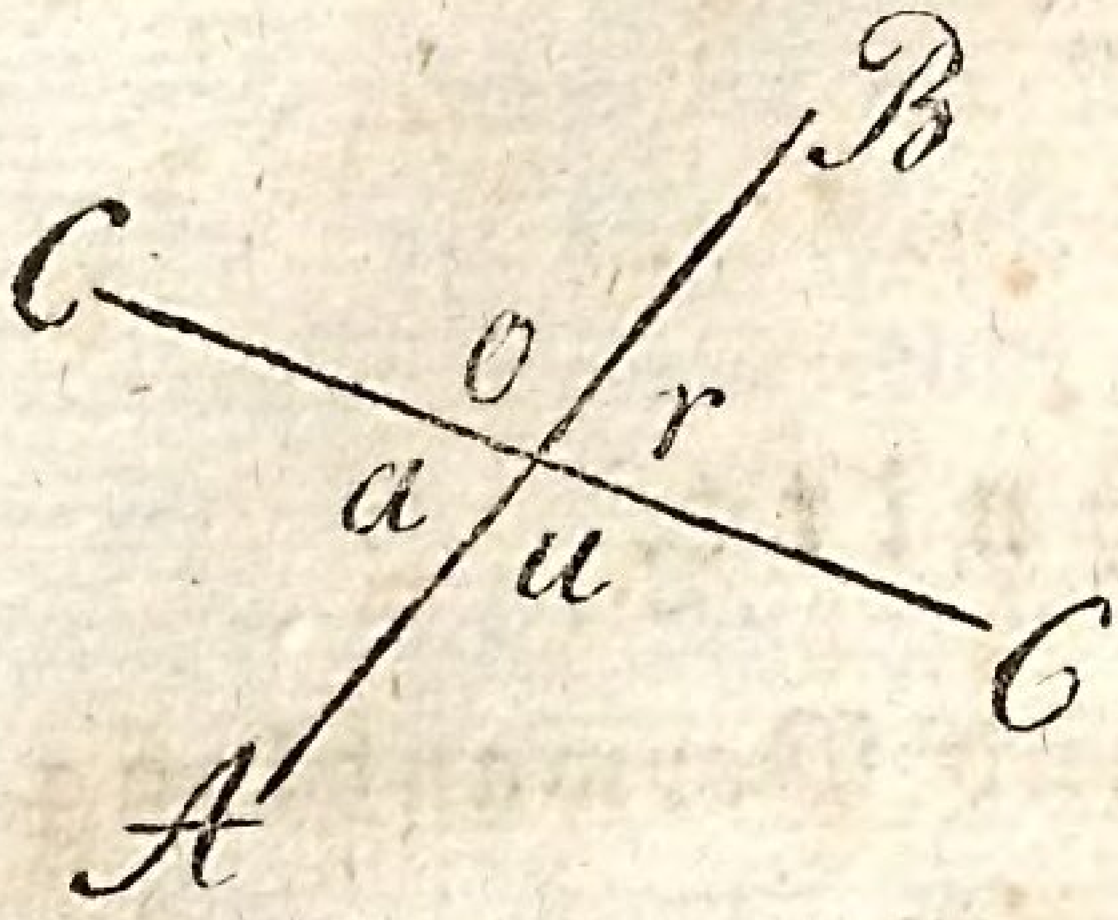


3. Jeder Quadrant hat 90°, weil er den vierten Theil von einem Kreise ausmacht.

4. Alle benachbarte Winkel müssen 360° haben, weil sie in einen ganzen Kreis eingeschlossen werden können. S. $o + u + r + p + q = 360°$.



§ 2.



Lehrsatz. Die Vertical- oder Scheitelwinkel sind sich gleich.

Es muß demnach bewiesen werden: 1. daß $a = r$ und 2. $o = u$ sei.

Beweis zu No. 1. $a + o = 180°$ weil es Nebenwinkel sind

$o + r = 180°$ aus eb. dem Grunde

$a + o = o + r$

$- o = - o$

$a = r.$ Gleiches von gleichem abgezogen gibt gleiche Differenzen.

Beweis zu No. 2. $o + r = 180°$

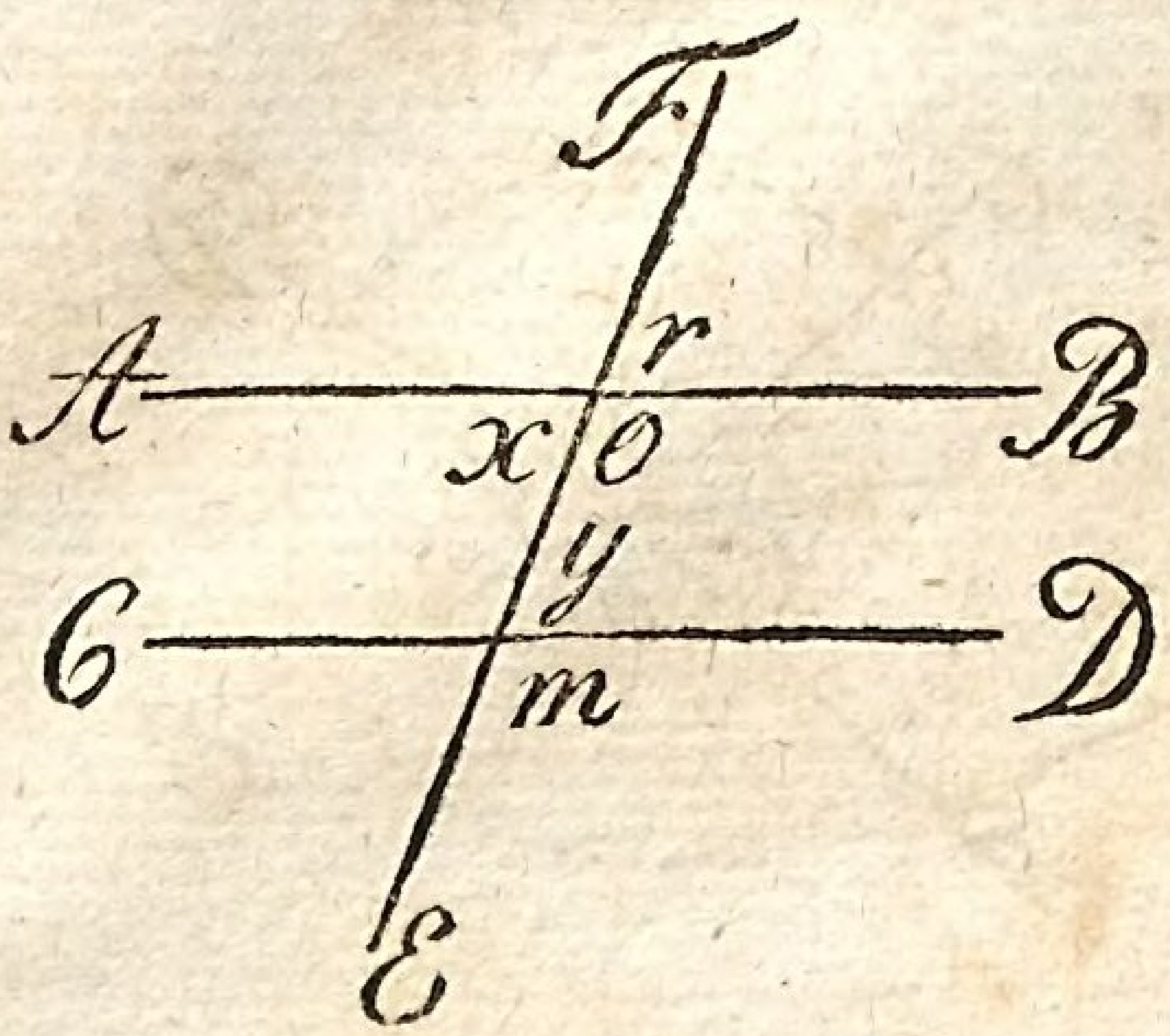
$r + u = 180°$

$o + r = r + u$

$- r = - r$

$o = u$

§ 3.



Wenn bei zwei Linien AB und CD die von einer dritten EF durchschnitten werden,

I. $o + y = 180°$ sind

so ist 1. $x = y$

2. $r = y$

3. $r + m = 180°$

II. Wenn $x = y$ ist,

so ist 1. $r = y$

2. $r + m = 180°$

3. $o + y = 180°$

III. Wenn $r = y$ ist,

so ist 1. $x = y$

2. $r + m = 180°$

3. $o + y = 180°$

IV. Wenn $r + m = 180°$ sind,

so ist 1. $r = y$

2. $x = y$

3. $o + y = 180°$

Mit Worten ausgedrückt, lauten diese Sätze also:

I. Wenn die beiden innern Winkel gleich 180° sind,

so sind 1. die innern Wechselswinkel sich gleich

2. der äußere Winkel ist gleich dem innern

3. die äußern Winkel sind = 180°.

II. Wenn die Wechselswinkel sich gleich sind,

so ist 1. der äußere Winkel gleich dem innern

2. die innern Winkel sind = 180°

3. die äußern Winkel sind = 180°

III. Wenn der äußere Winkel gleich dem innern ist,

so sind 1. die Wechselswinkel sich gleich

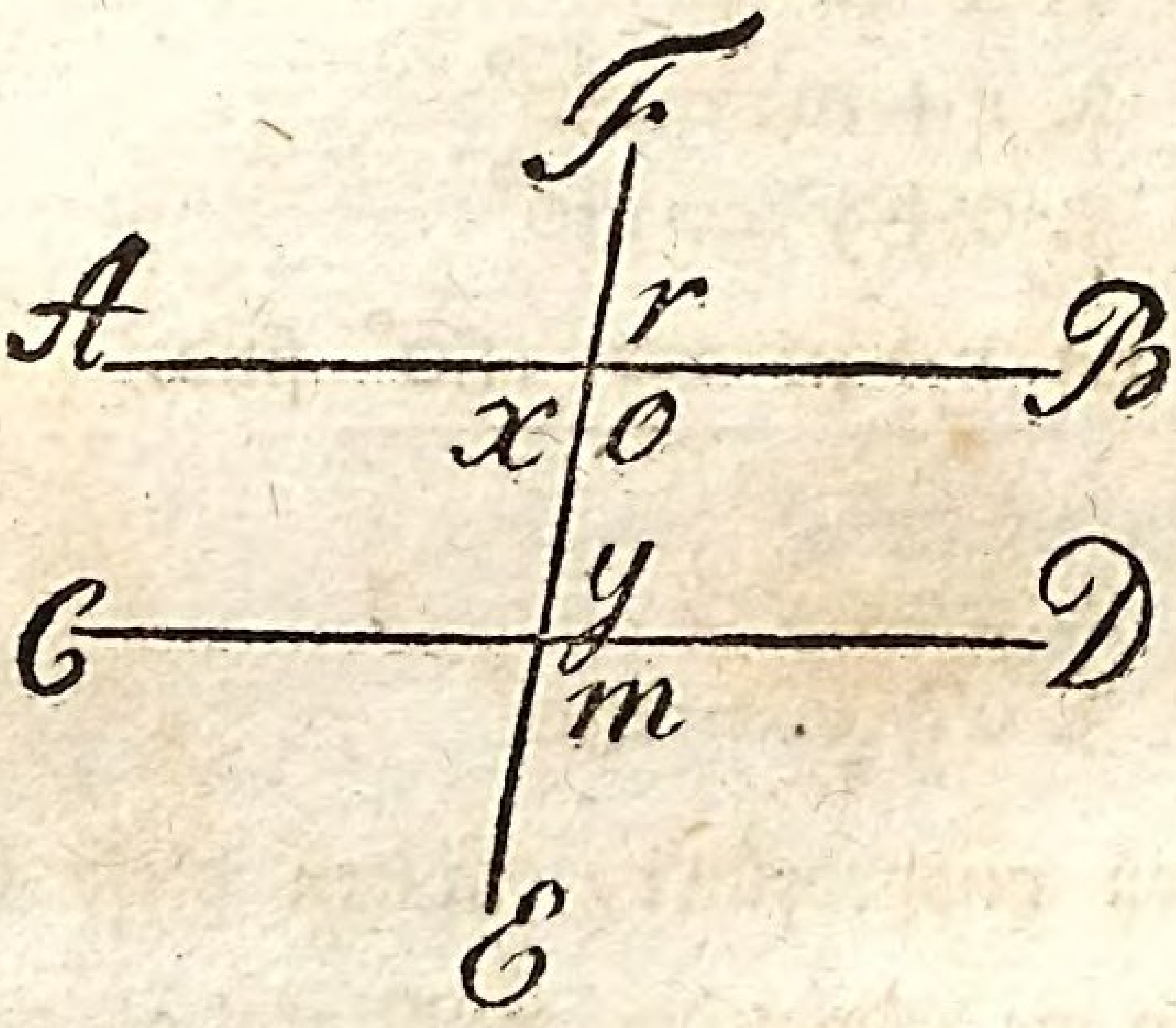
2. die innern Winkel sind = 180°

3. die äußern Winkel sind = 180°

IV. Wenn die äußern Winkel = $180°$ sind,
so sind 1. die Wechselswinkel sich gleich
2. die innern sind gleich $180°$
3. der äußere Winkel ist gleich dem innern.

§ 4.

Lehrsatz. Wenn die beiden innern Winkel, d. i. $o + y = 180°$ sind, so ist nach § 3. 1, $x = y$; 2, $r = y$; 3, $r + m = 180°$.



Beweis zu No. 1. $x + o = 180°$ nach § 1. n. 2.

$o + y = 180°$ vermöge der Bedingung.

$$\begin{array}{rcl} x+o & = & 180° \\ o+y & = & 180° \\ \hline x+o & = & o+y \\ -o & = & -o \\ \hline x & = & y \end{array}$$

Beweis zu No. 2. $r + o = 180°$ nach § 1. n. 2.

$o + y = 180°$ vermöge der Bedingung.

$$\begin{array}{rcl} r+o & = & 180° \\ o+y & = & 180° \\ \hline r+o & = & o+y \\ -o & = & -o \\ \hline r & = & y \end{array}$$

Beweis zu No. 3. $r + o = 180°$ nach § 1. n. 2.

$$y + m = 180° \quad - \; - \; - \; -$$

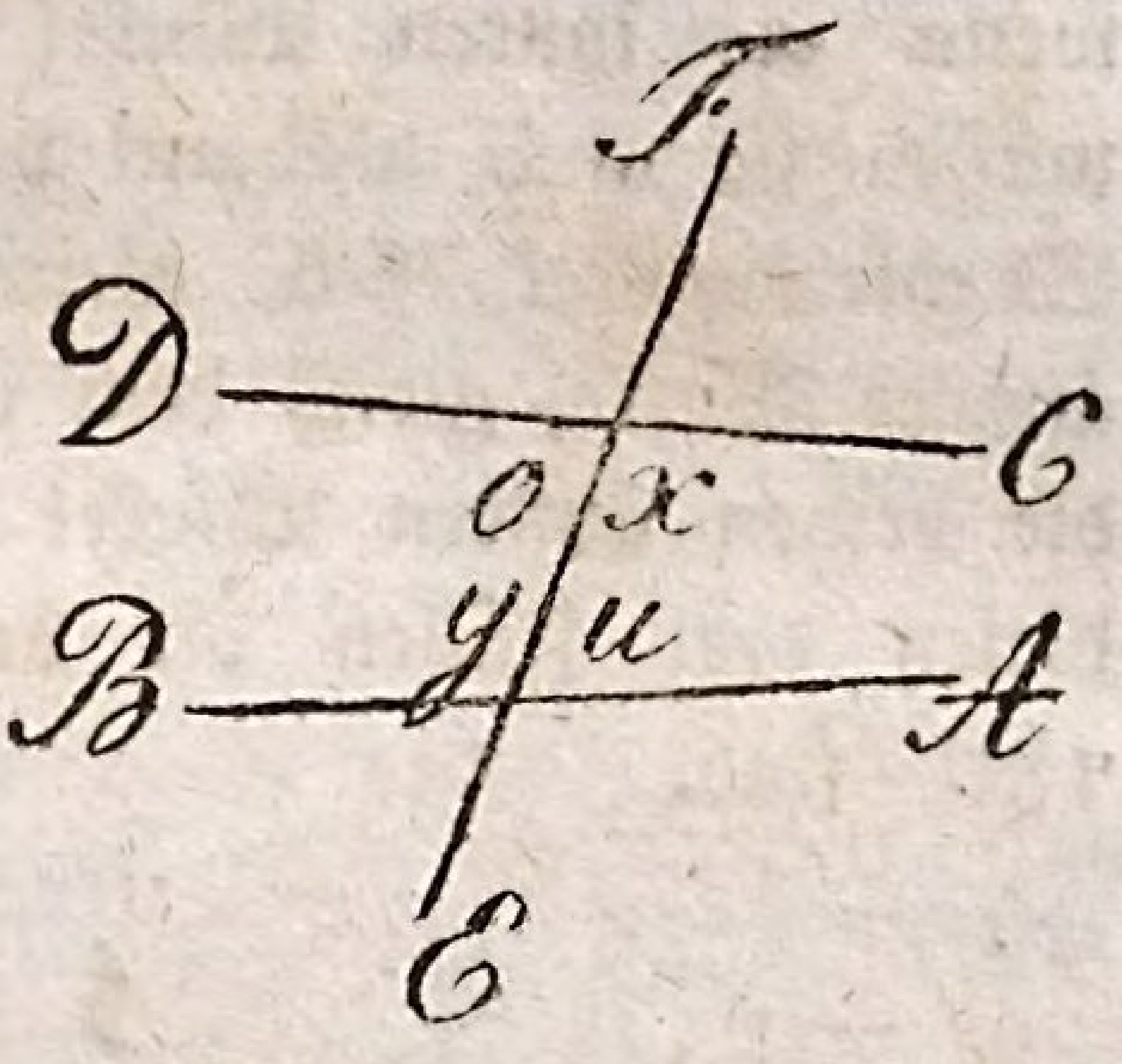
$$r + o + y + m = 180° + 180°$$

$$-(o + y) = -180°$$

$$r + m = 180°.$$ § 2. *)

§ 5.

Lehrsatz. Sind die innern Winkel bei zwei Linien, welche von einer dritten durchschnitten werden, gleich 180°, so sind die **Linien parallel**.



Beweis. Sollten die Linien AB und CD nicht parallel sein, so müßten sie bei A und C zusammen- oder auseinanderlaufen. Würden die beiden Linien bei A und C zusammenlaufen, so würden die beiden innern Winkel $x + u$ kleiner als 180° und die andern beiden innern Winkel $o + y$ größer als 180° werden, welches aber gegen die Bedingung ist. Und wenn die beiden Linien bei A und C auseinander laufen würden, so würden die beiden innern Winkel $x + u$ größer als 180° und die andern beiden $o + y$ kleiner als 180° werden, welches ebenfalls gegen die Voraussetzung ist; daher müssen die bei-

*) Die Beweise von den Sätzen II. III und IV. im § 3. werden auf eine ähnliche Weise geführt, weswegen sie hier ausgelassen sind.

den Linien, wenn die innern Winkel $o+y$ oder $x+u = 180°$ sein sollen, parallel sein.

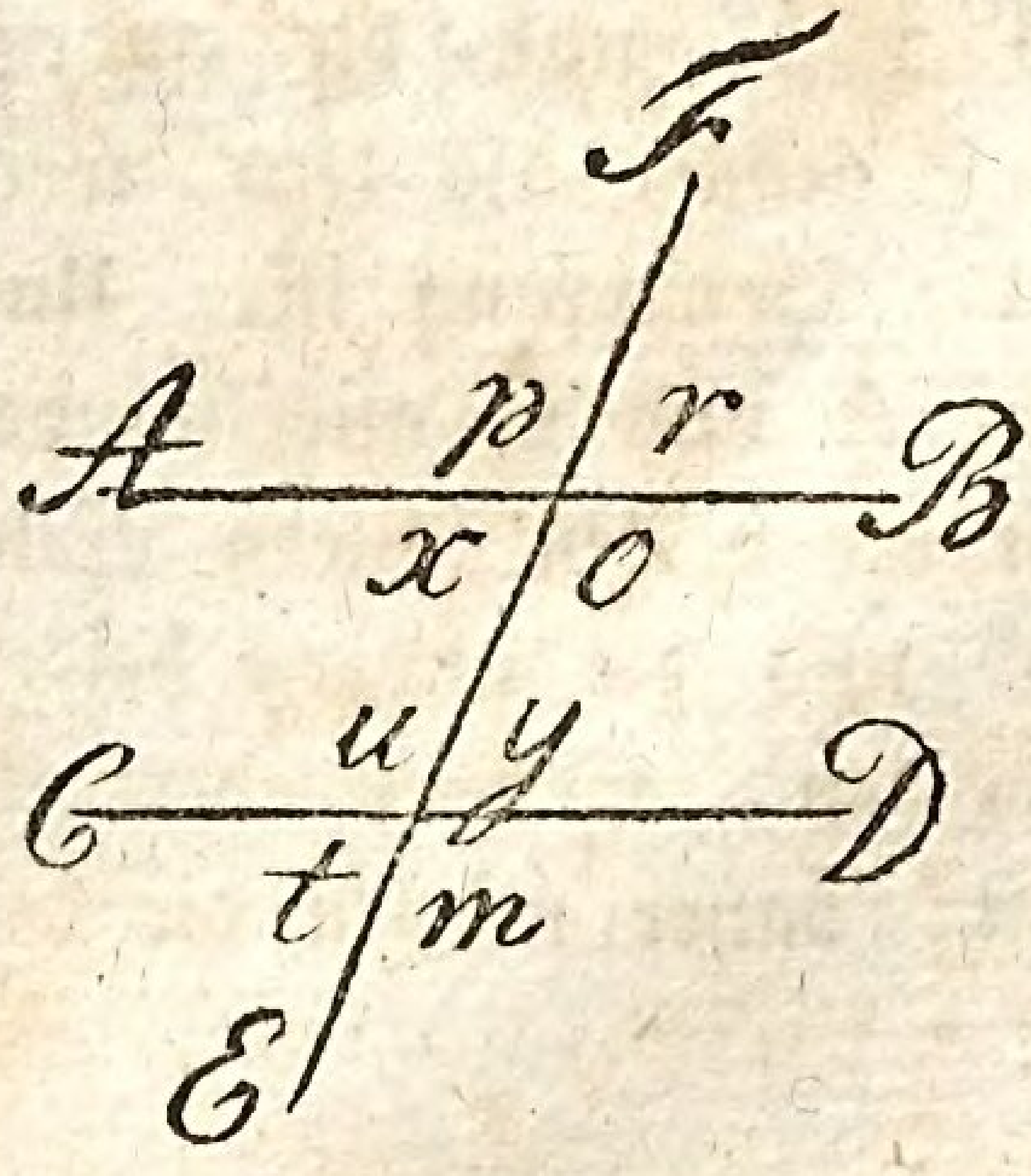
§ 6.

Zusatz. Wenn die beiden innern Winkel $o+y = 180°$ sind, so sind auch die andern beiden innern Winkel $x+u = 180°$.

§ 7.

Zusatz. Zwei Linien sind demnach parallel, wenn die innern Winkel $= 180°$ sind; daher müssen sie auch alsdann parallel sein, wenn 1. die Wechselswinkel sich gleich sind. 2. Wenn der äußere Winkel gleich dem innern ist. Und 3. wenn die beiden äußern Winkel $= 180°$ sind, weil in diesen drei Fällen die beiden innern Winkel $= 180°$ sind.

§ 8.



Zusatz. Wenn demnach zwei Linien parallel sind, so sind 1. die innern Winkel $= 180°$

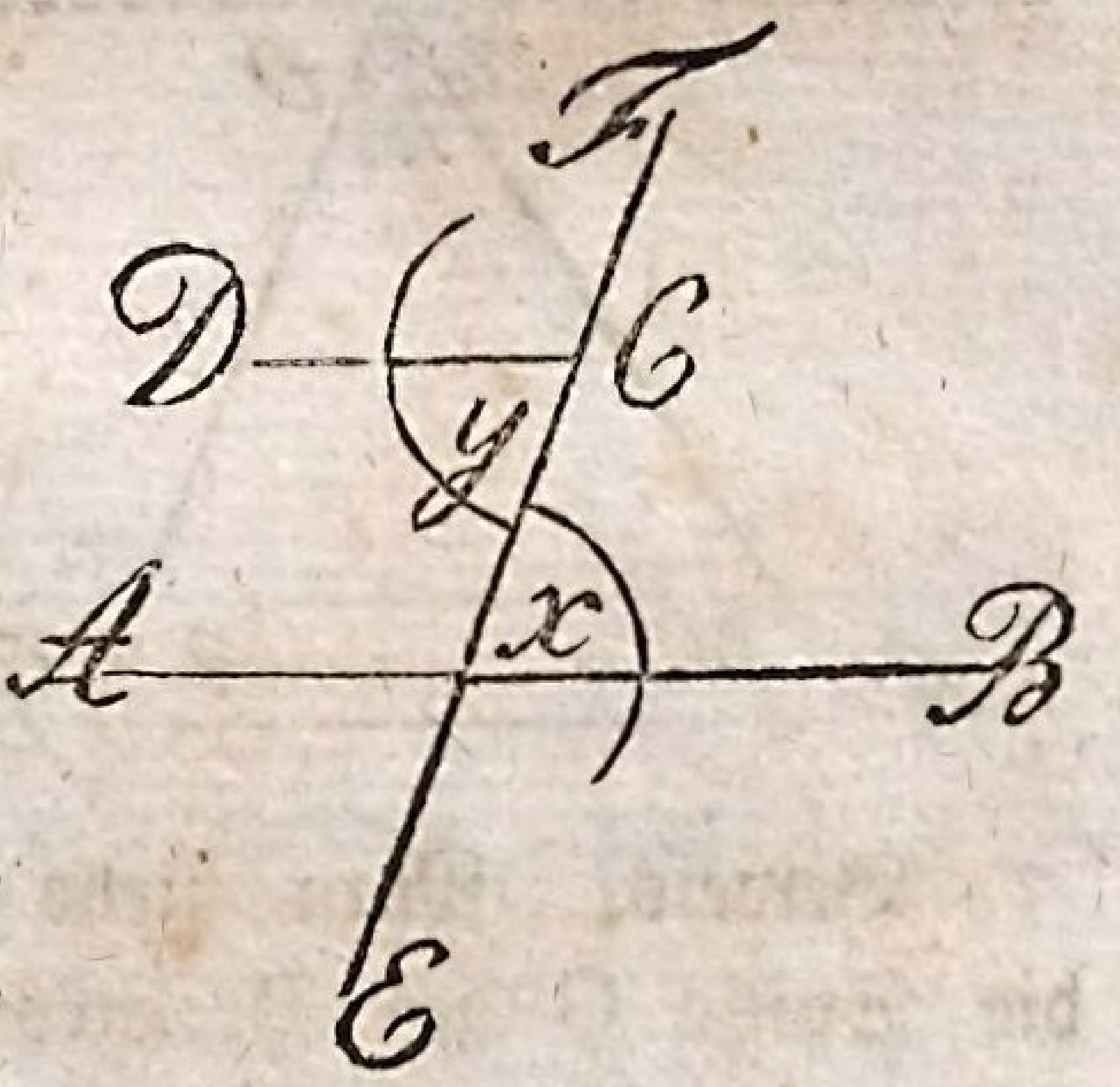
das heißt $o+y = 180°$ und $x+u = 180°$.

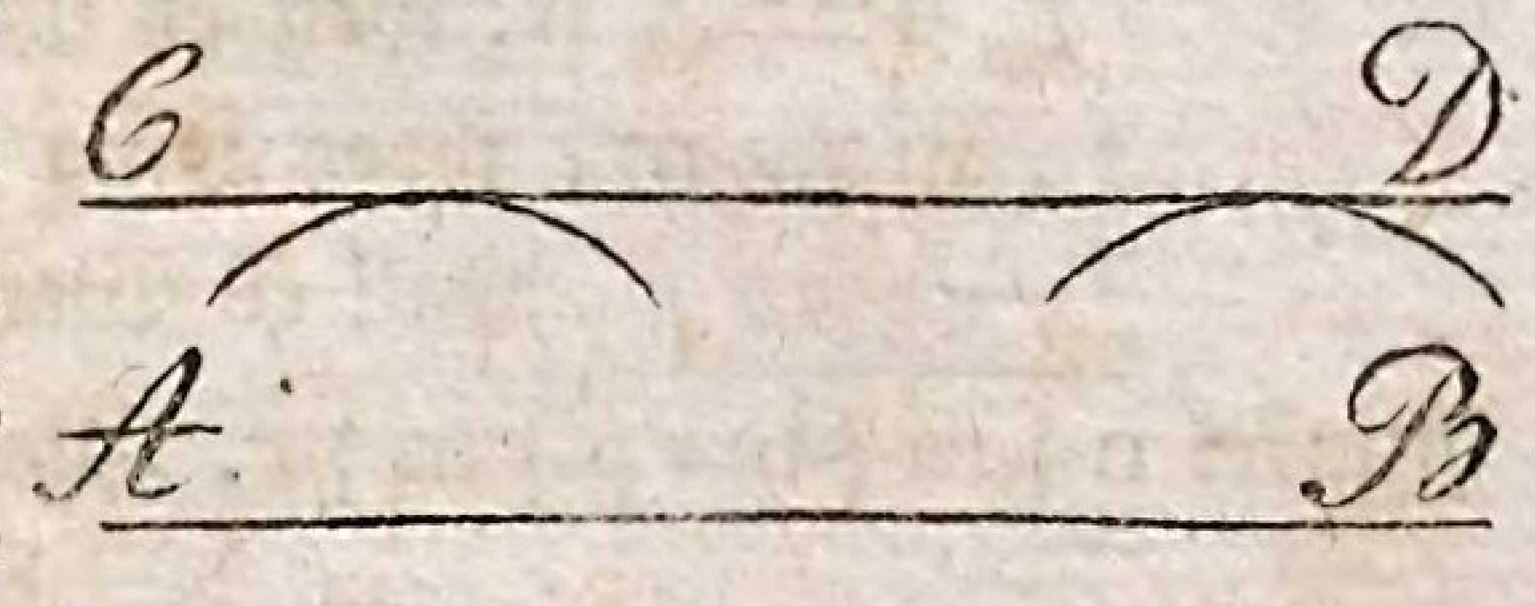
2. Die Wechselswinkel sind sich gleich, das heißt $x = y$ und $o = u$.

3. Der äußere Winkel gleich dem innern, daß heißt $r = y$ und $p = u$.
4. Die äußern Winkel sind gleich 180°, das heißt $r + m = 180°$ und $p + t = 180°$.

§ 9.

Aufgabe. Parallellinien zu ziehen auf verschiedene Arten und zwar 1. durch Hülfe eines Parallellineals. 2. Durch Hülfe eines Winkelmaßes und eines Lineals. 3. Durch Abtragung und Antragung eines Winkels. Und 4. durch Hülfe eines Zirkels.

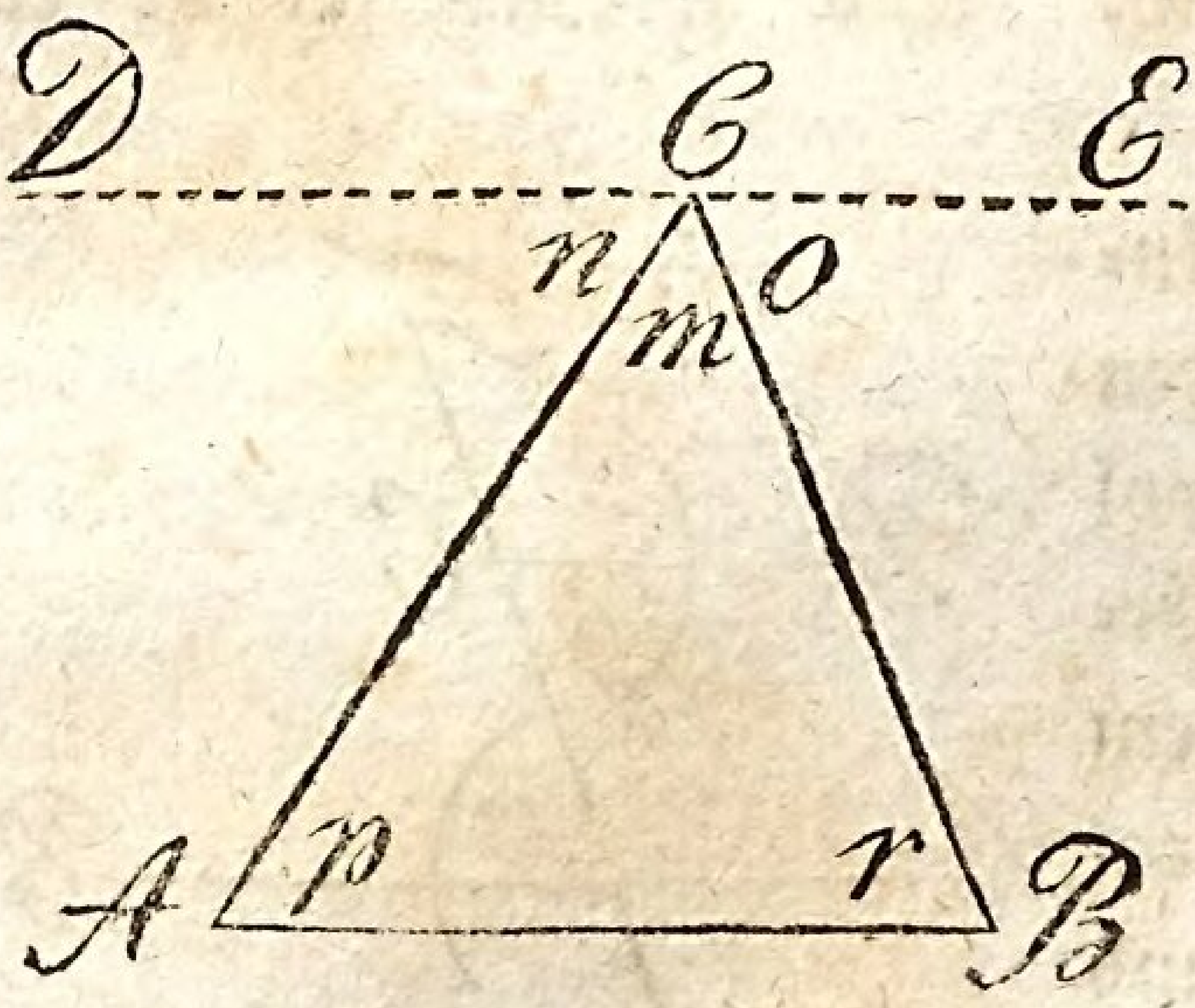




Auflösung. In Ansehung des 1sten und 2ten Punktes bedarf man wol keiner weitläuftigen Erläuterung, indem bei dem ersten das Parallellineal an die gegebene Linie und bei dem 2ten das Winkelmaß daran gelegt, welches hierauf an dem fest daran liegenden Lineal hinabgeschoben wird. In Ansehung des dritten Punktes wird durch die gegebene Linie eine andere gezogen, und der dadurch entstandene Winkel ae wird auf die andere Seite dieser Linie nach § 23 an den gegebenen Punkt angesetzt, wie es bei der Figur mit dem ∠ y ge-

schehen ist. Hierdurch ist der $\angle x = \angle y$ gemacht, und da beide Winkel Wechsels-Winkel und sich gleich sind, so muß AB parallel CD sein. Bei dem 4ten Punkte werden Kreisbogen aus zwei beliebigen Punkten der gegebenen Linie AB in einer bestimmten gleichen Höhe über derselben gemacht, und durch die äußersten Punkte derselben wird die Linie CD gezogen, welche alsdann mit AB ♯ *) ist.

§ 10.



Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel in einem Dreiecke ist = 180°.

Es muß daher bewiesen werden, daß die Winkel $p + m + r = 180°$ sind.

Beweis. Man ziehe eine Parallellinie durch die Spitze C des Dreiecks mit der Grundlinie desselben, so ist alsdann

$\angle n = \angle p$, weil es Wechselswinkel sind.
$m = m$, jedes Ding ist sich selbst gleich.
$o = r$, weil es Wechselswinkel sind.

Winkel $n + m + o = p + m + r$. Gleiches zu Gleichen addirt gibt Gleiches.

Da nun $n + m + o = 180°$ nach § 1. no. 2.
so müssen auch $p + m + r = 180°$ haben.

*) Dieß Zeichen bedeutet parallel.

§ 11.

Aufgaben: 1. Wenn daher $\angle p = 50°$
$\angle r = 100°$ enthält,
wie groß ist alsdann m? Antw. 30°.

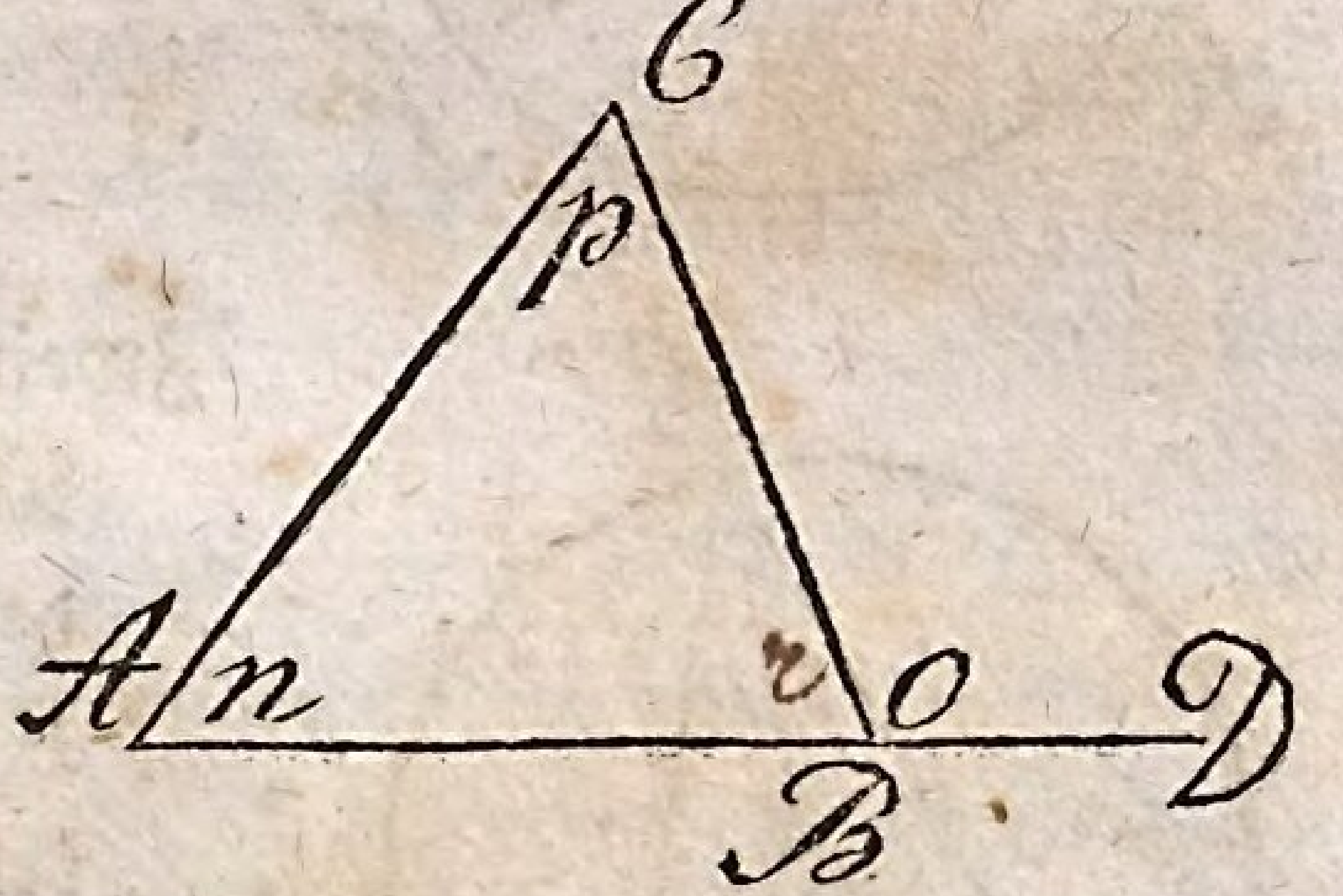
2. Wenn $\angle p = r$ und $p = 70°$ hat,
wie groß ist m? Antw. 40°.

3. Wenn $p = r$ und m 80° hat,
wie groß ist p? Antw. 50°.

4. Wenn $\angle p = r = m$,
wie groß ist jeder dieser Winkel? Antw. 60°.

§ 12.

Lehrsatz. Der äußere Winkel eines Dreiecks ist gleich den beiden innern desselben, von welchen keiner mit ihm einen Nebenwinkel ausmacht.



Es muß daher bewiesen werden, daß $\angle o = \angle n + p$ sei.

Beweis. $\angle o + \angle r = 180°$. Nach § 1. No. 2.
$\angle p + \angle n + \angle r = 180°$. Nach § 10.

$$\angle o + \angle r = \angle p + \angle n + \angle r$$
$$- \angle r = \quad - \quad \angle r$$
$$\angle o \quad = \angle p + \angle n.$$

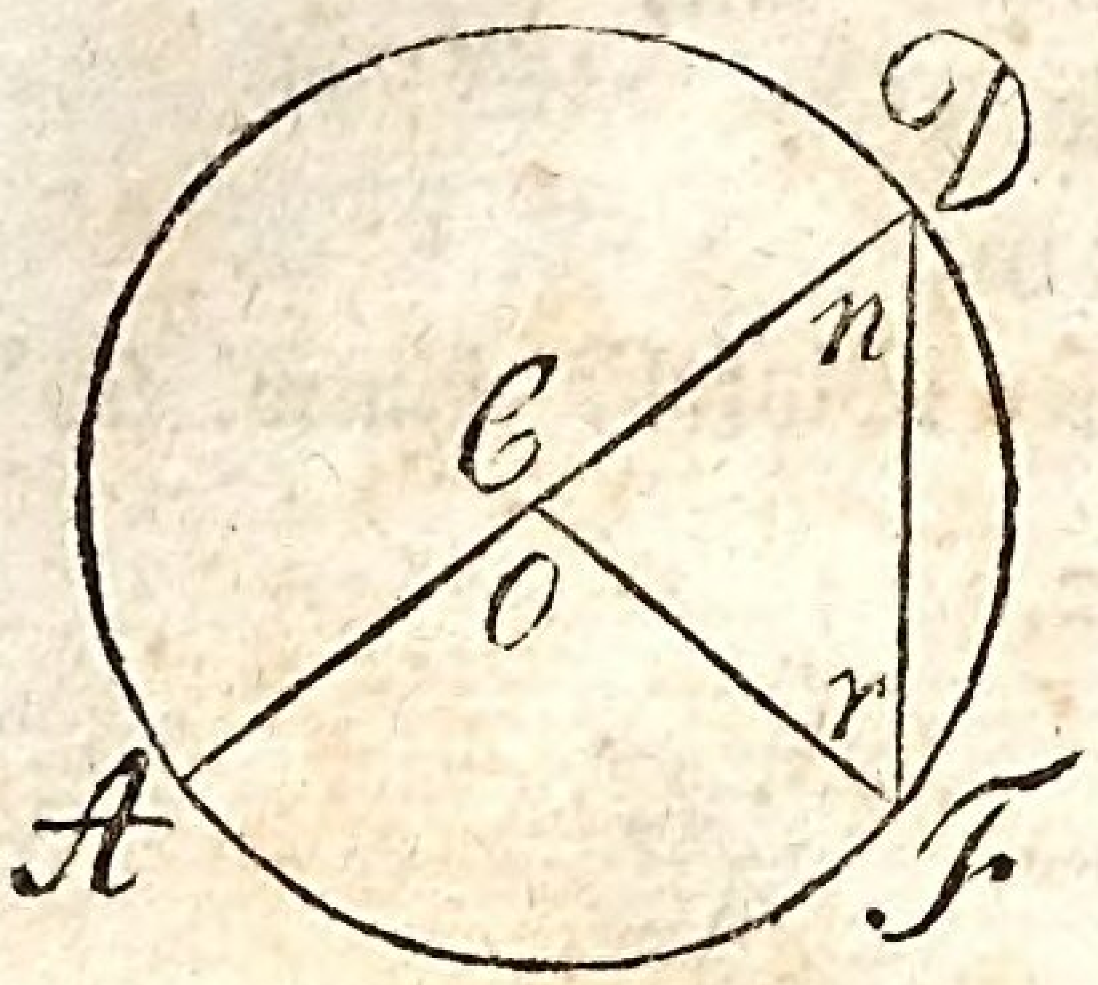
§ 13.

Aufgabe. Wenn $\angle o = 120°$ ist
und $\angle n = 80°$
wie groß ist alsdann $\angle p$?

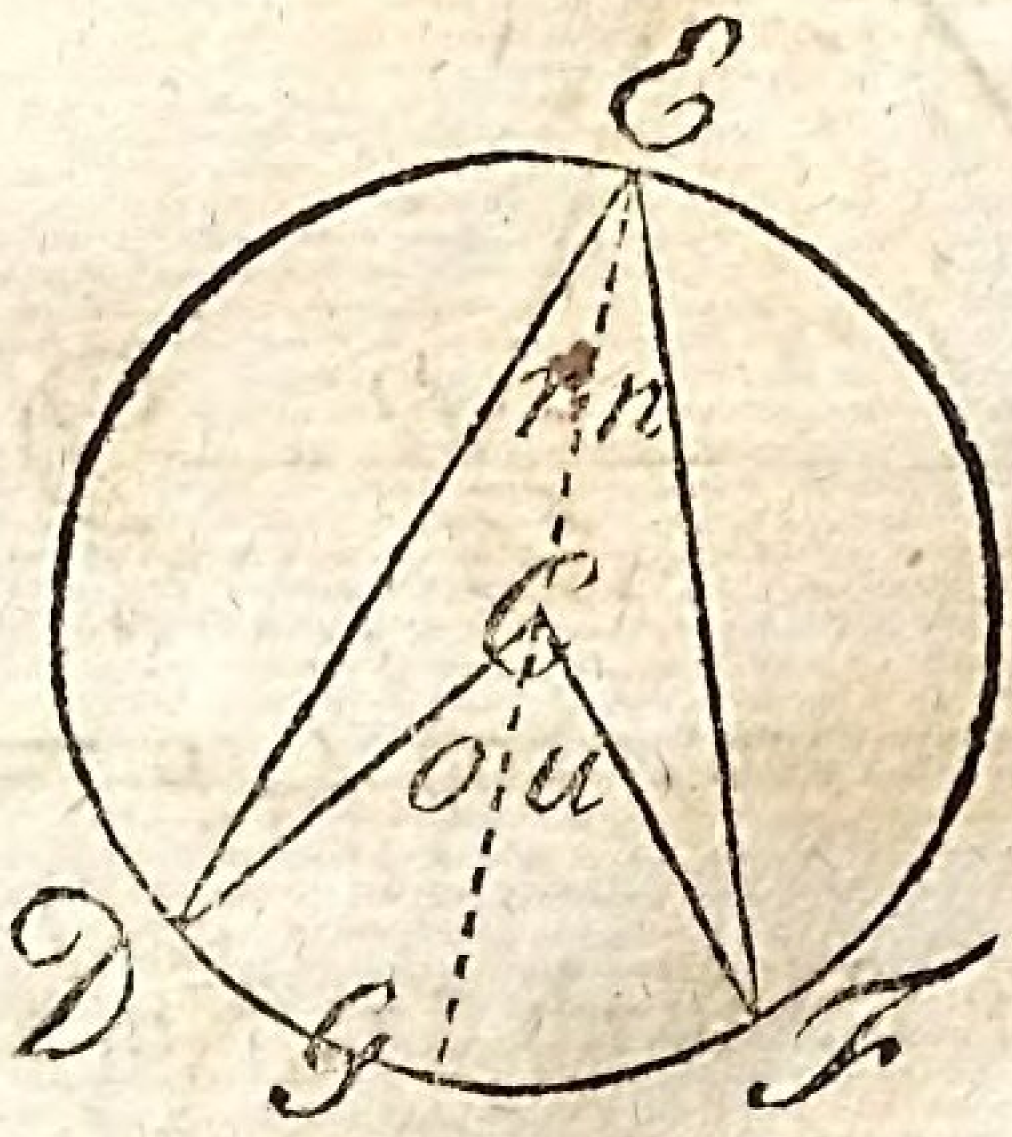
§ 14.

Lehrsatz. Der Mittelpunkts-Winkel ist noch einmal so groß als der Peripherie-Winkel, wenn die Schenkel von beiden gleiche Bogen haben.

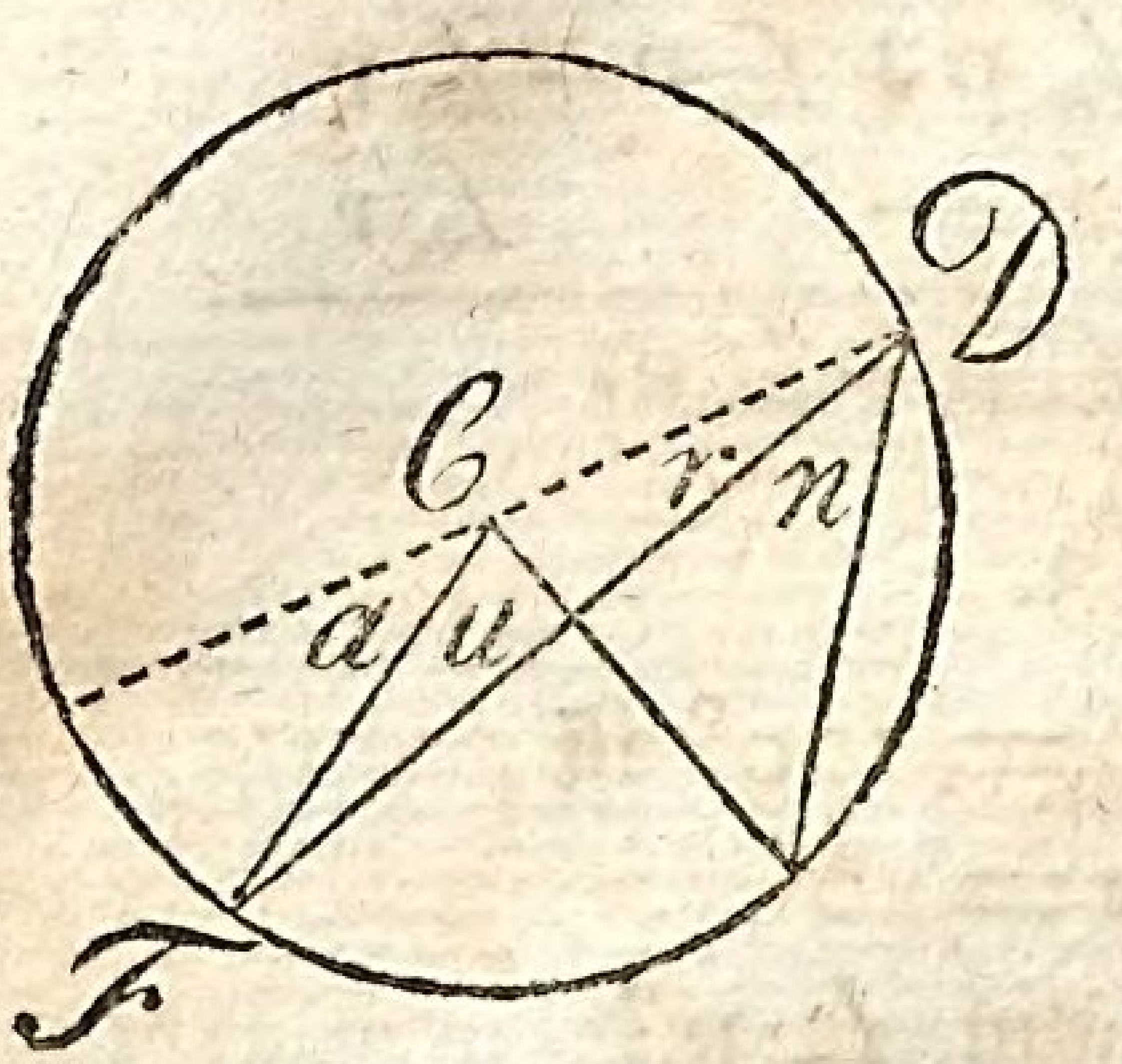
Es finden hierbei 3 Fälle statt:



Erster Fall, in welchem der Mittelpunkt C in dem einen Schenkel AD des Peripherie-Winkels liegt.



Zweiter Fall, in welchem der Mittelpunkt C zwischen den Schenkeln DE und EF des Peripherie-Winkels liegt. S. Fig.



Dritter Fall, in welchem C außerhalb der Schenkel FD und DE des Peripherie-Winkels liegt. S. Fig.

Beweis des 1sten Falles, in welchem C oder o = 2 n sein soll.

$$o = n + r \text{ nach § 12.}$$
$$n = r. \quad \text{Siehe § 35 Vorbericht.}$$
$$\text{daher } o = n + n = 2n.$$

Beweis des 2ten Falles, in welchem C oder o + u = 2 E sein soll. Man ziehe die Hülfslinie EG, alsdann ist

$$\angle o = 2r \text{ nach dem 1sten Falle.}$$
$$\angle u = 2n \text{ nach dem 1sten Falle.}$$
$$\angle o + \angle u = 2r + 2n = 2(r+n)$$
$$\text{da nun } \angle o + \angle u = C$$
$$\text{und } \angle r + \angle n = E \text{ ist,}$$
$$\text{so muß } C = 2E \text{ sein.}$$

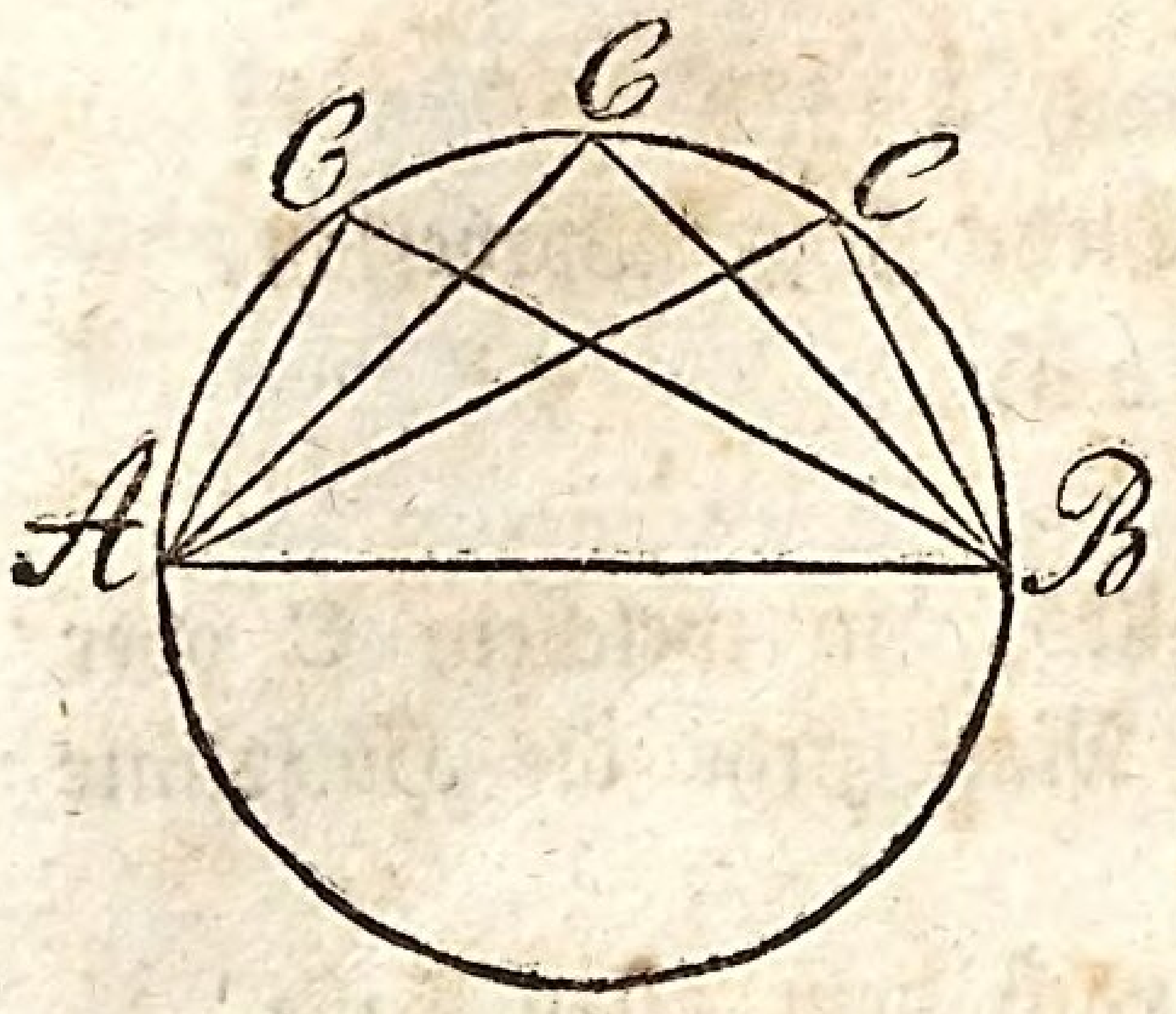
Beweis des 3ten Falles, in welchem $\angle u = 2n$ ist. Man ziehe die Hülfslinie GD, alsdann ist

$$\angle C = 2 \angle D \text{ nach dem ersten Falle.}$$
$$\text{oder } \angle o + \angle u = 2(r+n)$$
$$\text{also } \angle o + \angle u = 2r + 2n$$
$$-\angle o = -2\angle r \text{ nach dem 1sten Falle.}$$
$$\angle u = 2\angle n.$$

§ 15.

Zusatz. Wenn demnach der Peripherie-Winkel 55° hat, so hat der Mittelpunkts-Winkel = 2 × 55° = 100. Hat demnach jener 90°, so hat dieser = 180°, wo alsdann seine Schenkel eine gerade Linie, nämlich den Durchmesser bilden.

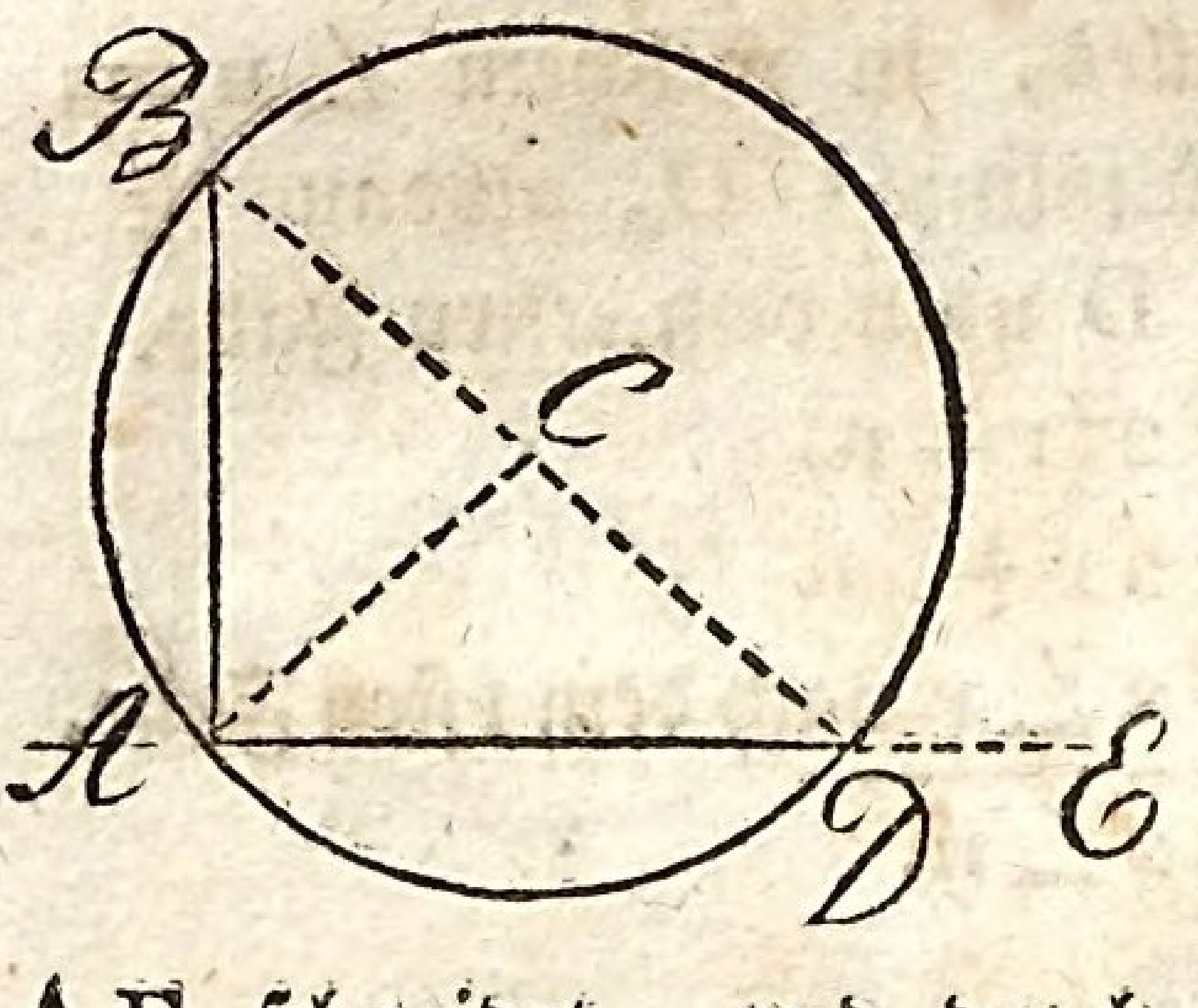
§ 16.



Zusatz. Wenn also die Schenkel des Peripherie-Winkels auf den Endpunkten des Durchmessers eines Kreises stehen, so ist der Peripherie-Winkel ein rechter Winkel. Siehe Figur.

§ 17.

Aufgabe. An dem Endpunkte einer geraden Linie eine senkrechte Linie durch Hülfe eines Zirkels und Lineals aufzurichten.



Auflösung. Man setze den Zirkel über AE, etwa in C, fasse hierauf mit demselben die Weite AC und reiße mit derselben den Kreis ADB. Durch den Punkt D, in welchem der Kreis die gerade Linie AE schneidet, und durch den Mittelpunkt C des Kreises ziehe man die gerade Linie BD, welche gleich dem Durchmesser des Kreises ist. Von dem Punkte B lasse man endlich die Linie AB fallen, so muß solche senkrecht auf AE stehen, weil der Winkel A ein Peripherie-Winkel ist, dessen Schenkel die Endpunkte des Durchmessers des Kreises ABD berühren.

§. 18.

Erklärung. Dreiecke und überhaupt alle Figuren sind sich gleich, wenn der Raum der einen eben so groß als der Raum der andern ist; daher kann ein Dreieck einem Quadrate am Raume gleich sein. Sie sind sich ähnlich, wenn immer zwei Seiten der einen mit zwei Seiten der andern eine Proportion ausmachen; daher kann nur ein Quadrat einem Quadrate, ein gleichseitiges Dreieck einem andern gleichseitigen Dreiecke ähnlich sein u. s. w.

Aehnlich und gleich sind sich die Figuren, wenn die Grenzen der einen auf die der andern fallen, in welchem Falle sie sich einander decken. Das Zeichen der Gleichheit ist $=$, wie schon vorher angeführt ist. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$, und das Zeichen der Deckung ist $\cong$.

§ 19.

Grundsätze. Zwei Dreiecke sind sich gleich und ähnlich:

1. Wenn die drei Seiten einzeln genommen des einen Dreiecks eben so groß sind, als die drei Seiten einzeln genommen des andern Dreiecks.

2. Wenn zwei Seiten einzeln genommen des einen Dreiecks eben so groß sind, als zwei Seiten einzeln genommen eines andern Dreiecks, und der Winkel, welcher von den bei-

den Seiten des einen Dreiecks eingeschlossen wird, eben so groß ist, als der Winkel, welcher von den beiden Seiten des andern Dreiecks eingeschlossen wird.

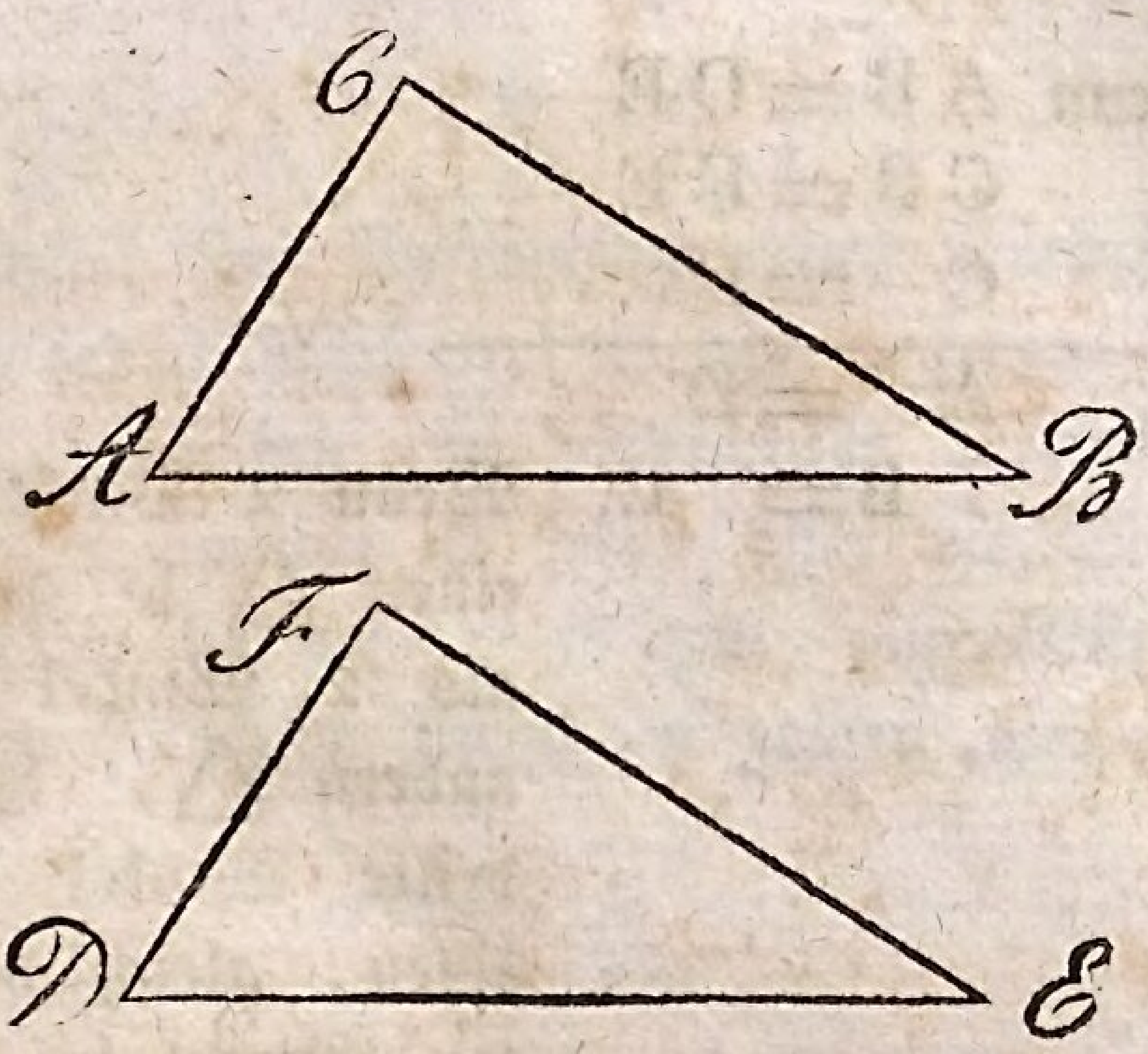
3. Wenn zwei Seiten einzeln genommen des einen Dreiecks eben so groß sind, als zwei Seiten, einzeln genommen des andern Dreiecks, und der Winkel, welcher der größern von den gegebenen Seiten gegenüber stehet, in dem einen Dreieck eben so groß, wie in dem andern ist.

4. Wenn eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel einzeln genommen in dem einen Dreiecke eben so groß sind, als eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel einzeln genommen in dem andern Dreiecke.

5. Wenn eine Seite und zwei Winkel, wovon nur der eine auf der Seite liegt, einzeln genommen des einen Dreiecks, eben so groß ist als eine Seite und zwei Winkel mit eben der Bedingung des andern Dreiecks.

§ 20.

Zusatz. Wenn einer von diesen fünf Sätzen Statt findet, so decken sich die Dreiecke, und gleichen Seiten stehen alsdann gleiche Winkel, und gleichen Winkeln stehen alsdann gleiche Seiten gegen über.



Wenn demnach

1. $AB = DE.$
   $AC = DF.$
   $BC = EF.$

so ist $\angle C = \angle F$; weil $\angle C$ der Seite AB gegenübersteht, und diese nach der Bedingung $= DE$ ist, und diese dem $\angle F$ gegenübersteht.

$\angle B = \angle E.$ Eben so.
$\angle A = \angle D.$ Eben so.

$\triangle ABC \cong \triangle EDF.$

2. Wenn $AB = DE$
   $AC = DF.$
   $A \;\; = D$

So ist $BC = EF$; denn BC steht A gegenüber, und A ist $= D$, und dem $\angle D$ steht EF gegenüber.

— : $B = E.$
— : $C = F.$

$\triangle ABC = \triangle DEF.$

3. Wenn $AB = DE$
$CB = FE$
$C = F$

$A = D$
$B = E$. Wenn 2 Winkel in dem einen $\triangle$ so groß sind, als 2 Winkel in dem andern $\triangle$, so ist der dritte Winkel in dem einen, gleich dem dritten Winkel in dem andern $\triangle$.

also $AC = DE$.

$\triangle ACB \cong \triangle DEF$.

4. Wenn $AB = DE$
$A = D$
$B = E$.

$AC = DF$
$CB = FE$
$C = F$

$\triangle ABC \cong \triangle DFE$.

5. Wenn $AB = DE$
$A = D$
$C = F$

$B = E$. Siehe die vorhergehende Anmerkung nr. 3.

$AC = DF$
$BC = EF$

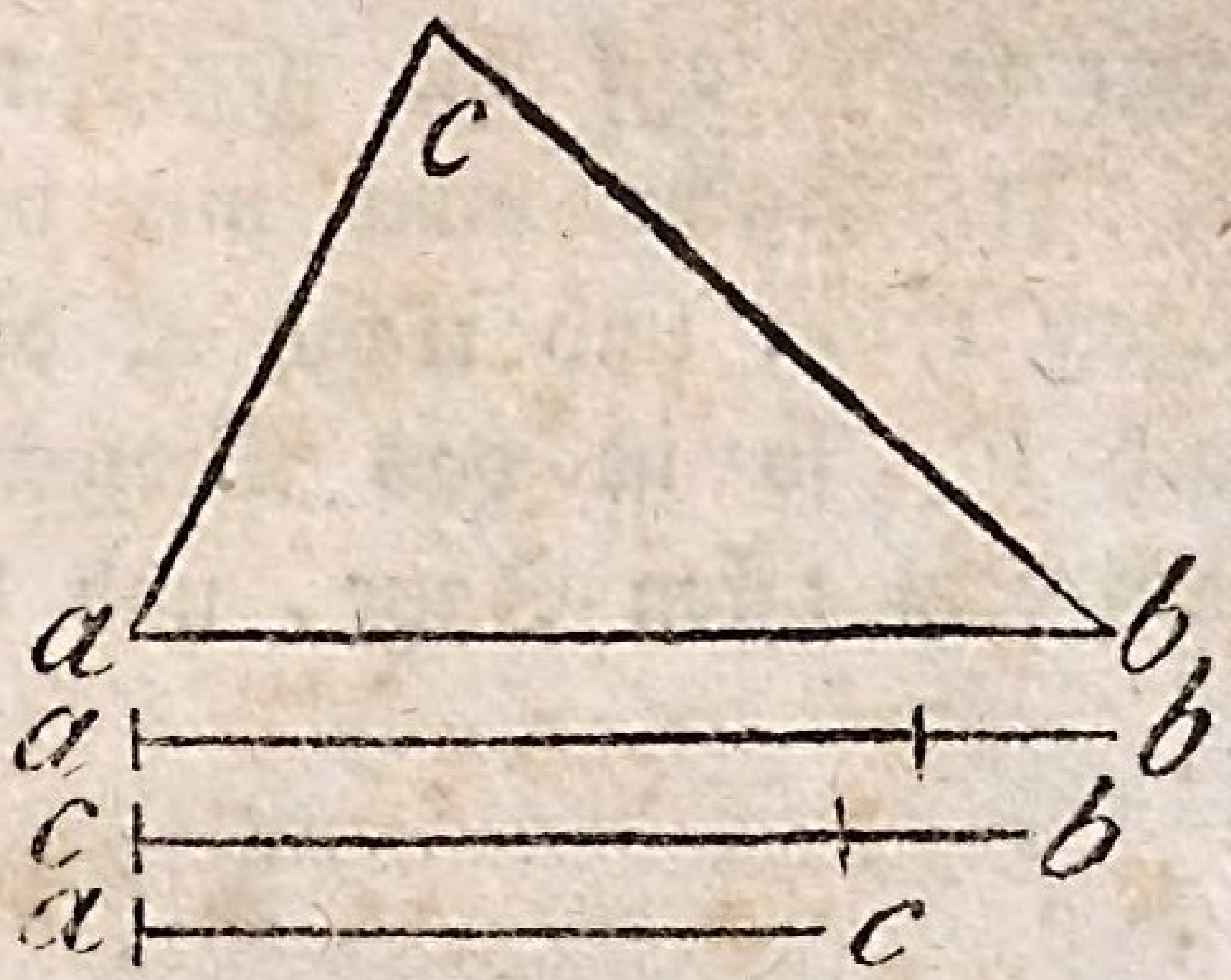
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

§ 21.

Zusatz. Zur Aufreißung eines Dreiecks müssen demnach jedes Mal drei Stücke gegeben sein, und soll aus denselben ein bestimmtes Dreieck gebildet werden, so müssen es jedes Mal die Stücke sein, welche hier in den 5 Sätzen aufgestellt worden sind, wie folgende Aufgaben zeigen werden.

§ 22.

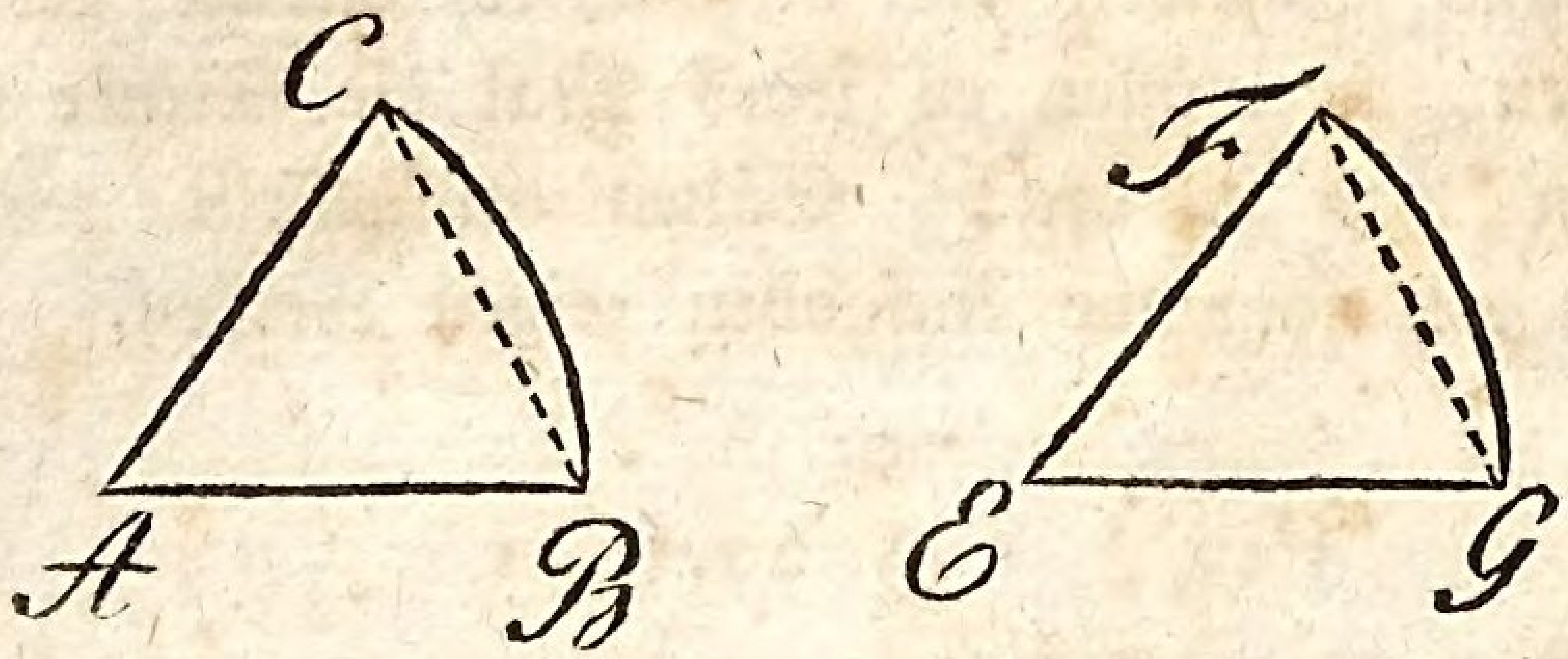
Aufgabe. Aus drei gegebenen Seiten ein Dreieck aufzurichten. Es sei $ab = 2^\circ\, 6''$, $cb = 1^\circ\, 8'\, 9''$ und $ac = 1^\circ\, 4'\, 7''$.



Auflösung. Man ziehe 1. eine gerade Linie, und trage auf solche 2. die gemessene Länge von ab. 3. Fasse man mit dem Zirkel die Länge von ac, und mache mit dieser Weite aus dem Endpunkte der Linie ab oberhalb derselben einen Kreisbogen, und verfahre 4. mit der Weite von bc, eben so aus dem andern Endpunkte der Linie ab. Da, wo sich alsdann diese Kreisbogen durchschneiden, ist der Punkt, nach welchem Linien aus a und b hingezogen werden müssen. Und da in diesem Dreiecke die drei Seiten einzeln genommen so groß, als die 3 gegebenen Linien einzeln genommen sind, so muß dieß das verlangte Dreieck sein.

§ 23.

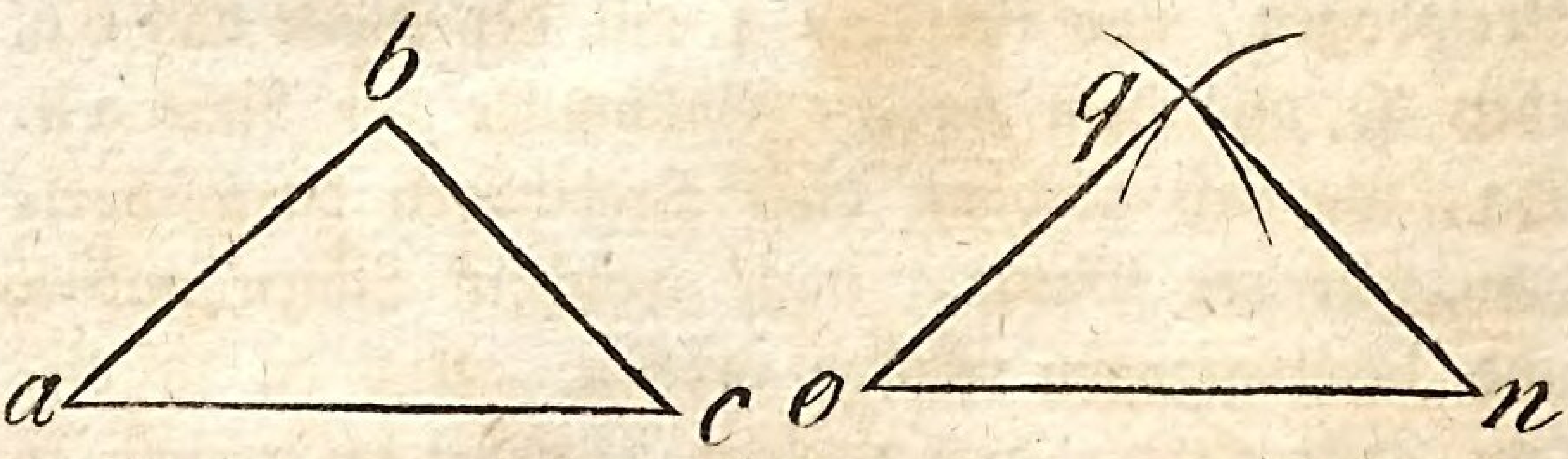
Aufgabe. Einen gegebenen Winkel an den Endpunkt einer geraden Linie anzusetzen.



Auflösung. Man schneide 1. mit dem Zirkel von den Schenkeln des gegebenen Winkels A gleiche Stücke ab, wie solches in B und C geschehen ist. 2. Fasse man mit dem Zirkel die Weite AB, und trage solche auf die gegebenen Linien aus E nach G. 3. Mache man mit dieser Weite den Kreisbogen FG, und trage 4. die Winkel BC aus G nach F, so ist das Dreieck $ABC \cong \triangle EFG$ nach dem 1sten Satze, und der $\angle A$ ist $= \angle E$.

§ 24.

Aufgabe. Ein Dreieck abzutragen.



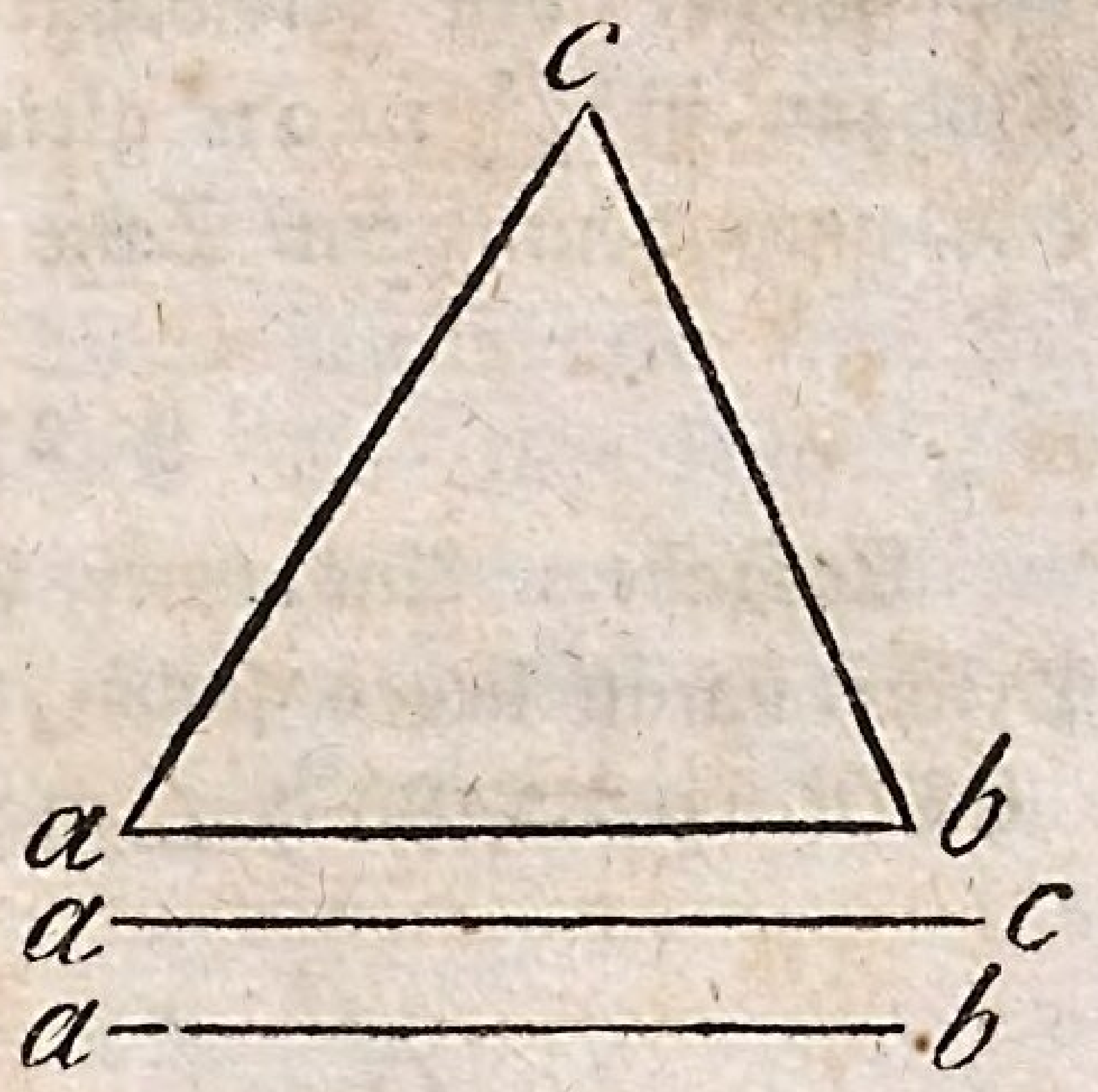
Auflösung. Man fasse mit dem Zirkel 1. die Seite a c, und setze die Weite davon auf eine Linie o n hin. 2. Fasse man auch die Weite b c

und mache mit solcher den Kreisbogen n q; und 3. fasse man die Weite der Linie a b, und mache mit dieser ebenfalls einen Kreisbogen o q, wo sich alsdenn diese durchschneiden, da ist der Punkt, nach welchem aus den Endpunkten o und n Linien gezogen werden müssen, ist dieses geschehen, so ist das $\triangle$ a b c $\cong$ $\triangle$ o q n.

§ 25.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher dazwischen liegen soll, ein Dreieck zu errichten.

Es sei a b = 1° 8′ 7″ a c = 2° 0′ 7″ und Winkel a = 56°.



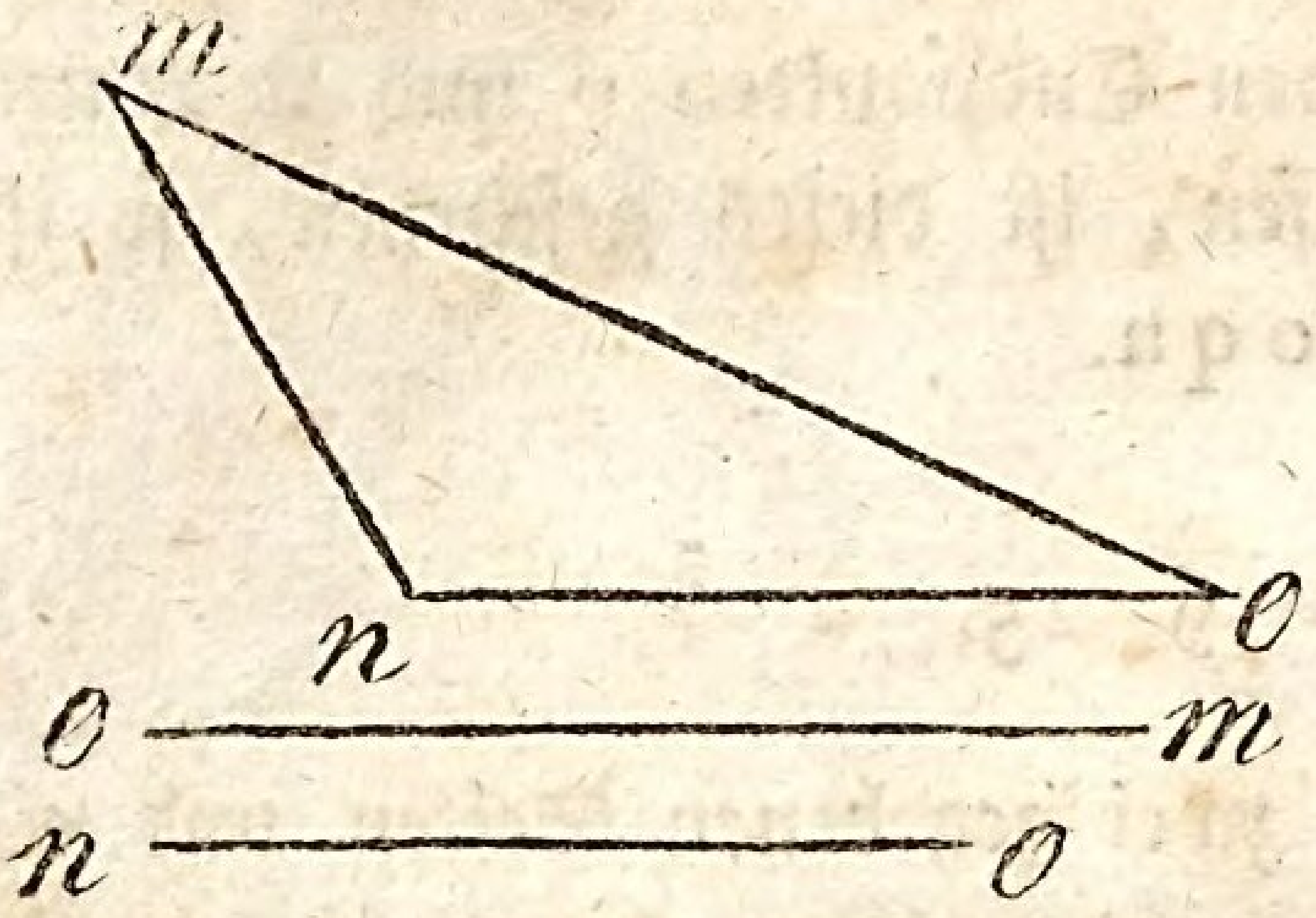
Auflösung. Man setze 1. die Länge der gegebenen Linie a b hin. 2. Lege man an den Endpunkt a dieser Linie den Transporteur und trage dadurch den Winkel, wenn solcher wie hier in Graden gegeben ist = 56°, an die Linie a b, und verlängere 3. den Schenkel so lange, bis er der gegebenen Linie a c gleich ist. Alsdenn ist $\triangle$ a b c das verlangte Dreieck nach dem 2ten Satze des § 19.

§ 26.

Aufgabe. Aus zwei Seiten und einem Winkel,

welcher der größern dieser Seiten gegenüber liegt, ein Dreieck zu errichten.

Es sei om = 2° 2′; no = 1° 7′ 9″ ∠n = 120°.

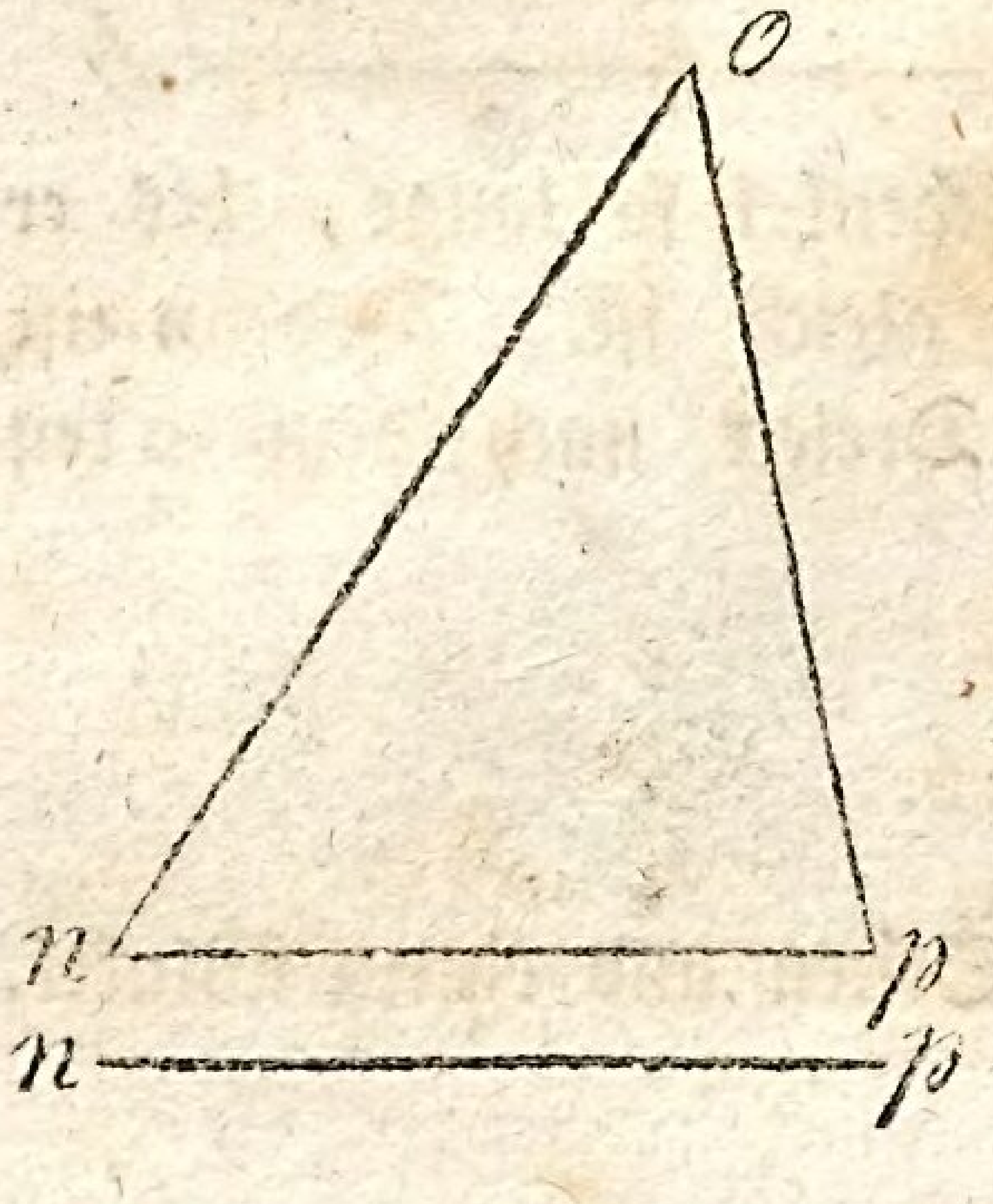


Auflösung. Man ziehe 1. eine Linie, welche gleich der gegebenen Linie no ist. 2. Man fasse mit dem Zirkel die Linie mo und mache mit der Weite desselben aus dem Endpunkte o einen Kreisbogen, und setze 3. an den Punkt n den gegebenen Winkel von 120°, verlängere hierauf den Schenkel dieses Winkels, bis solcher den Kreisbogen in m durchschneidet. Alsdann ist △ mon gleich dem verlangten Dreiecke nach dem 3ten Satze des § 19.

§ 27.

Aufgabe. Aus einer Linie und zwei Winkeln, welche daran liegen sollen, ein Dreieck zu errichten.

Es sei np = 186″; ∠n = 57°; ∠p = 79°.



Auflösung. Man ziehe 1. eine Linie, welche gleich der gegebenen Linie np ist. 2. Setze man an den Endpunkt n den Winkel von 57° und an den Endpunkt p den Winkel von 79°. 3. Verlängere man ihre Schenkel so lange bis sie sich durchschneiden,

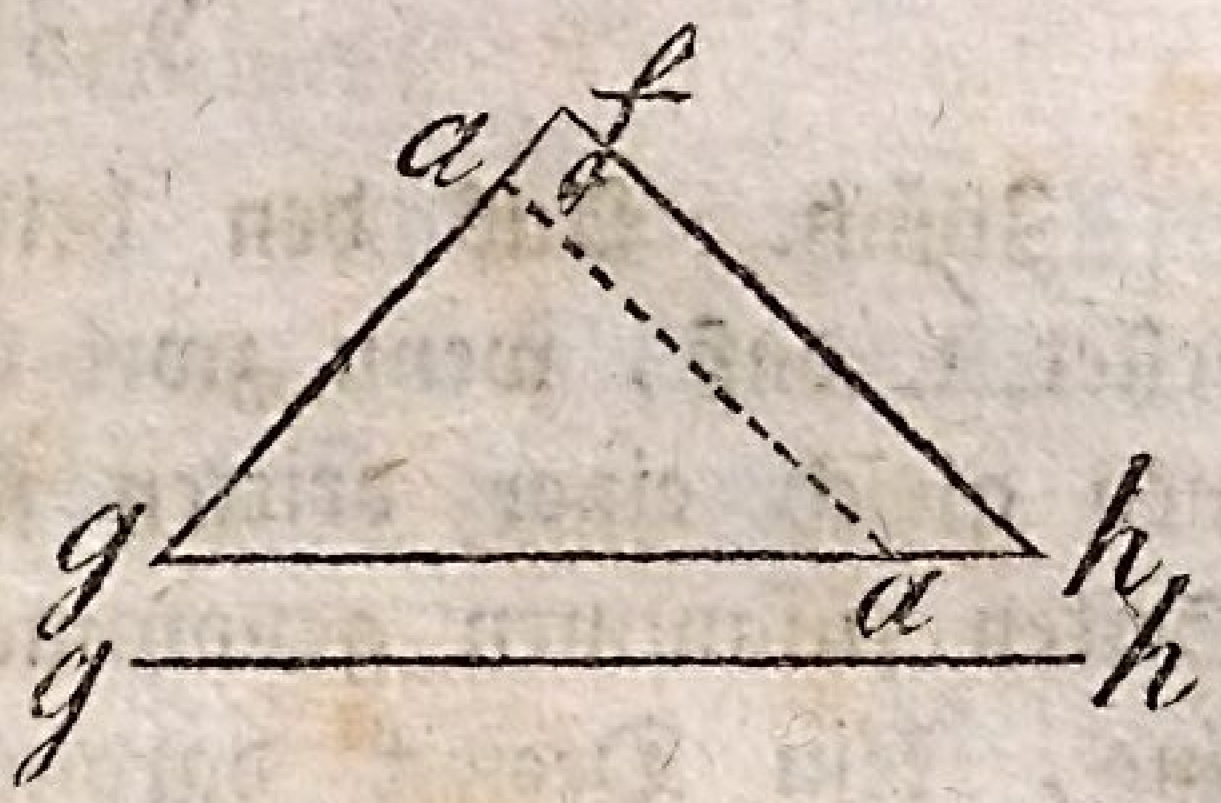
wie solches in r geschiehet. Alsdenn ist △ npr gleich dem verlangten nach dem 4ten Satze § 19.

§ 28.

Aufgabe. Aus einer Linie und zwei Winkeln, wovon nur der eine auf der Linie liegen soll, ein Dreieck zu errichten.

Es sei gh = 176″; ∠ g = 48° und ∠ f = 89°.

Auflösung. Man ziehe, wie vorhin 1. eine Linie und mache solche der Linie gh gleich. 2. An den Endpunkt g dieser Linie setze man Winkel g von 48°. 3. An den Schenkel gh dieses Winkels setze man an irgend einen beliebigen Punkt z. B. an a den Winkel von 89° und ziehe dessen Schenkel bis zur Linie gh. 4. Mit dieser Linie ziehe man eine Parallellinie durch den Punkt h, so ist das Dreieck ghf nach dem 5ten Satze des § 19. das verlangte Dreieck.

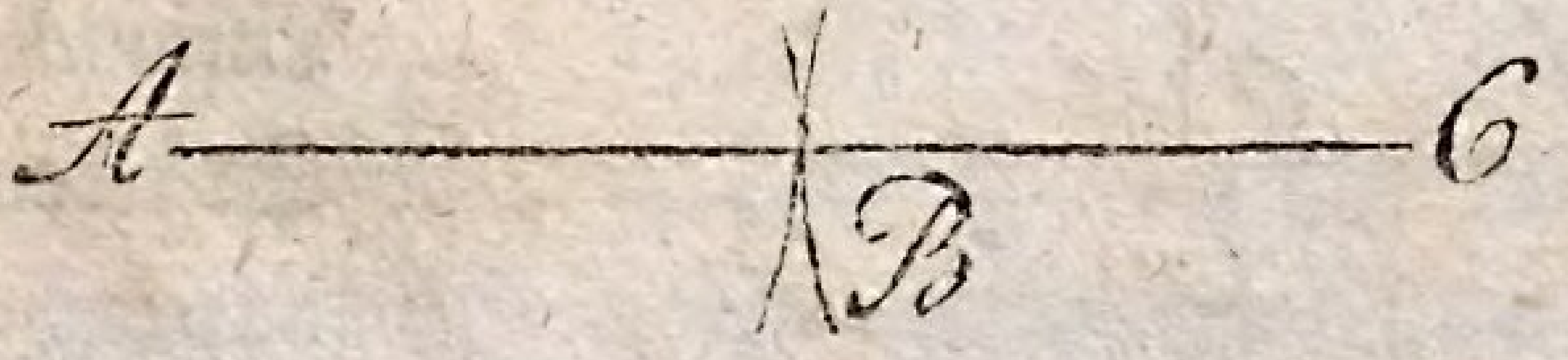


§ 29.

Aufgabe. Ein Dreieck aus folgenden Stücken zu machen: 1. Aus AC = 2° 4′ 6″;

2. Aus AB = 1° 0′ 3″ und 3. BC = 1° 4′ 3″.

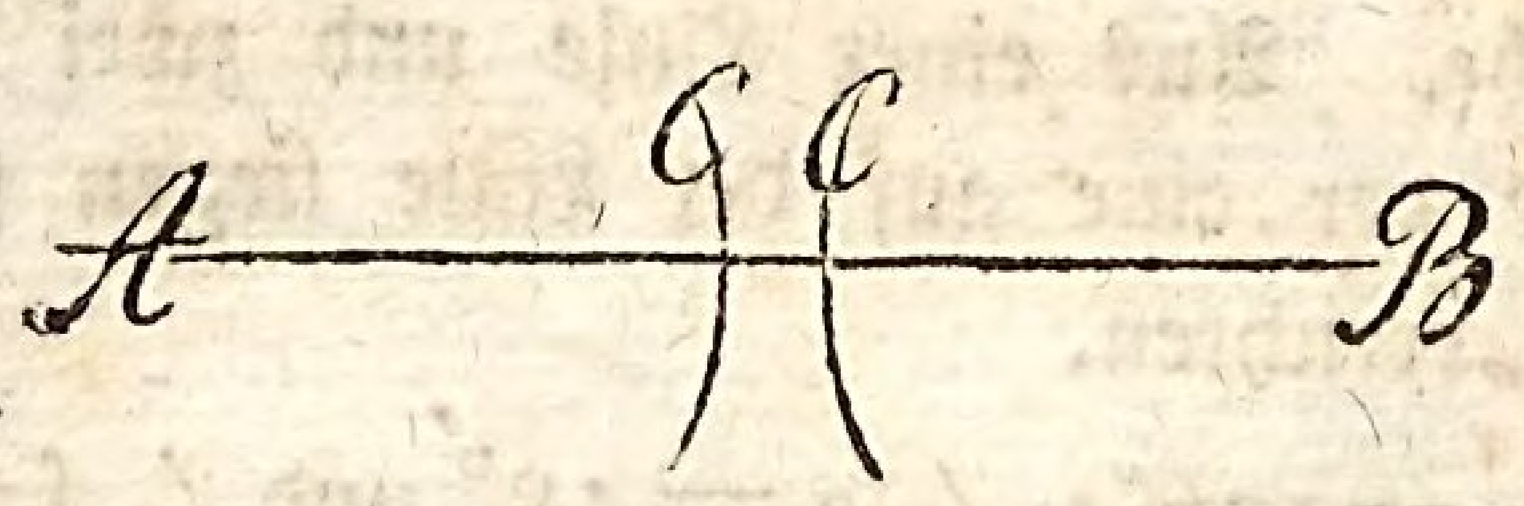
Auflösung. Siehe Figur.



§ 30.

Aufgabe. Ein Dreieck aus folgenden Linien zu bilden: 1. AB=186″, 2. BC=9′3″, 3. AC=7′2″.

Auflösung. Siehe Figur.

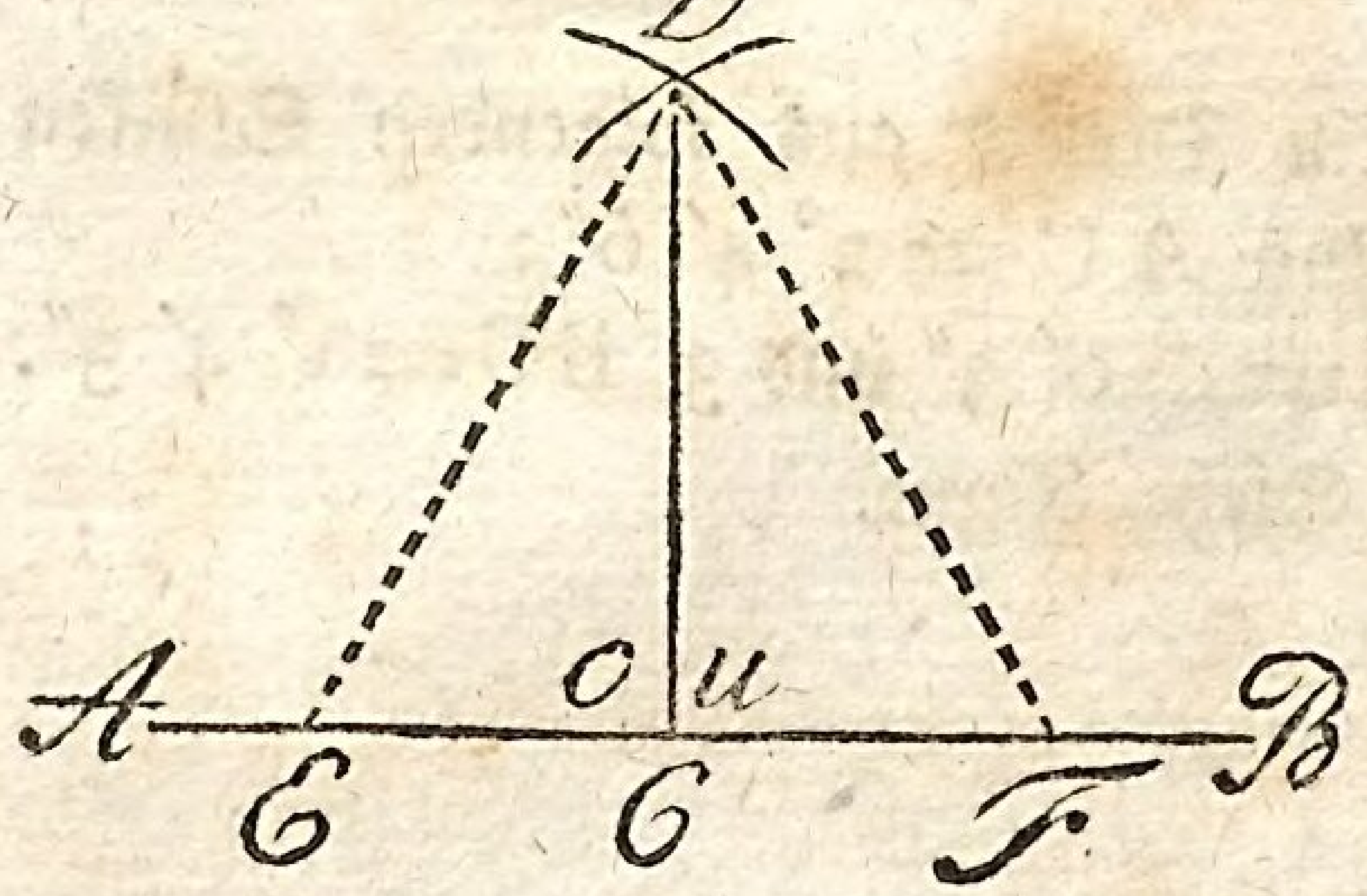


§ 31.

Zusatz. Aus den beiden letzten Aufgaben erhellet 1. daß, wenn zwei Seiten zusammen genommen gleich einer dritten sind, oder 2. wenn zwei Seiten zusammen genommen kleiner als eine dritte sind, kein Dreieck daraus gebildet werden kann. Soll man demnach ein Dreieck aus drei Seiten errichten, so müssen zwei Seiten zusammen genommen immer größer als die dritte sein.

§ 32.

Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte auf einer geraden Linie eine senkrechte Linie aufzurichten.



Auflösung. Man setze 1. den Zirkel in den gegebenen Punkt C und schneide auf beiden Seiten der Linie A B gleiche Stücke ab, wie

solches in E und F geschehen ist. Hierauf errichte man 2. aus den Punkten E und F ein gleichschenkliges oder gleichseitiges △ über AB; und 3. ziehe man aus der Spitze D dieses Dreiecks eine gerade Linie nach C, so stehet solche auf AB in C senkrecht. Es muß demnach bewiesen werden, daß ∠ o = ∠ u sei.

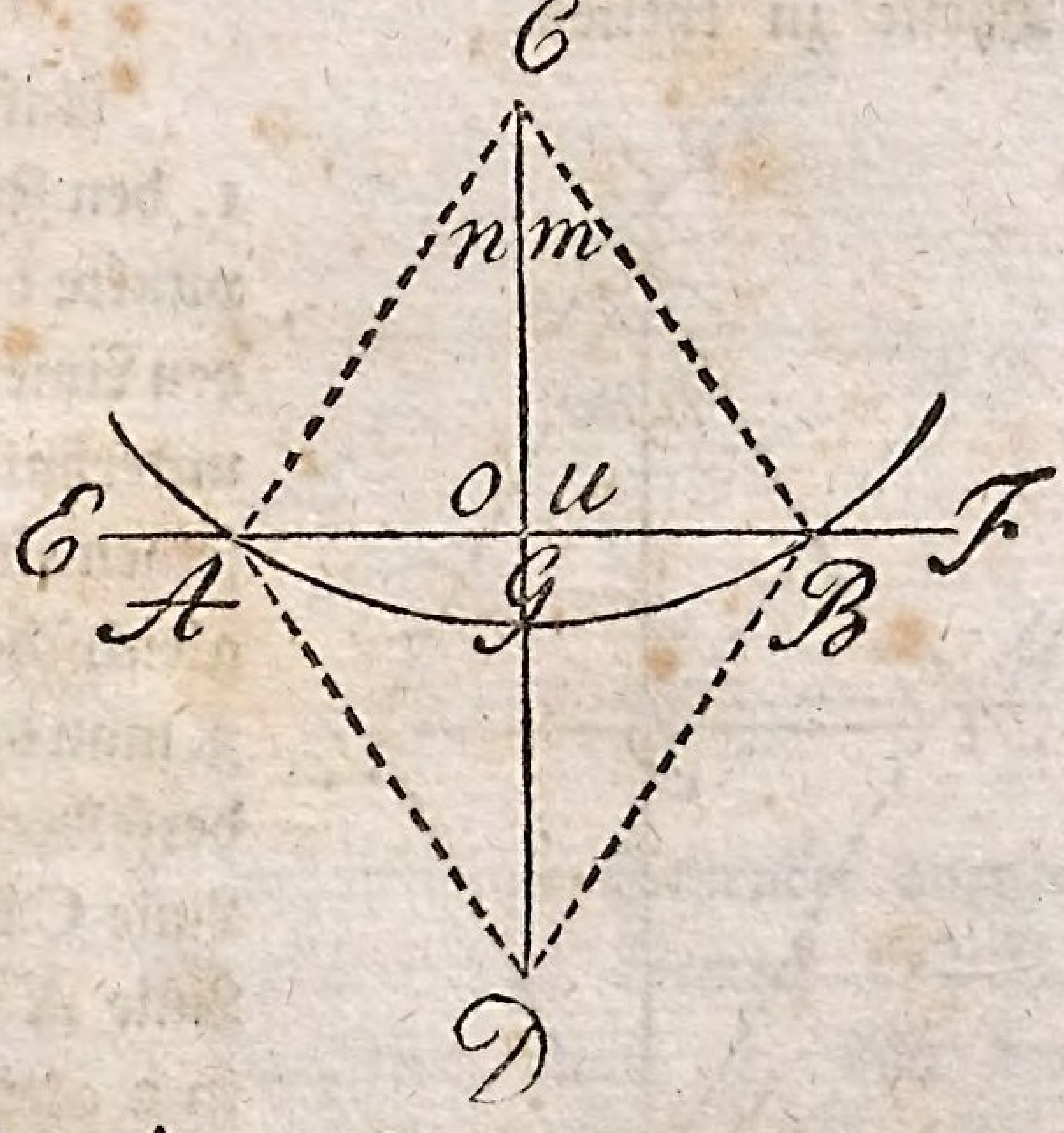
Beweis. EC = CF weil sie gleich gemacht sind.
ED = DF weil es die Schenkel eines gleichschenkligen △ sind.
CD = CD warum?

△EDC ≅ △DCF nach dem 1. Satze §19.
daher ∠ o = ∠ u; und wenn die Nebenwinkel sich gleich sind, so ist die Linie CD senkrecht.

§ 33.

Aufgabe. Aus einem Punkte über einer geraden Linie eine senkrechte Linie nach derselben hinfallen zu lassen.

Auflösung. Man setze den Zirkel in C und beschreibe aus diesem Punkte unterhalb der geraden Linie EF einen Kreisbogen, durch welchen dieselbe in 2 Punkten durchschnitten wird. Aus diesen



Durchschnittspunkten A und B errichte man unterhalb der geraden Linie ein gleichschenkliges Dreieck,

und ziehe hierauf eine gerade Linie von dem gegebenen Punkte C nach der Spitze D des unterhalb der Linie AB errichteten Dreiecks ABD, so stehet CG auf AB senkrecht. Es muß demnach bewiesen werden, daß o = u sei.

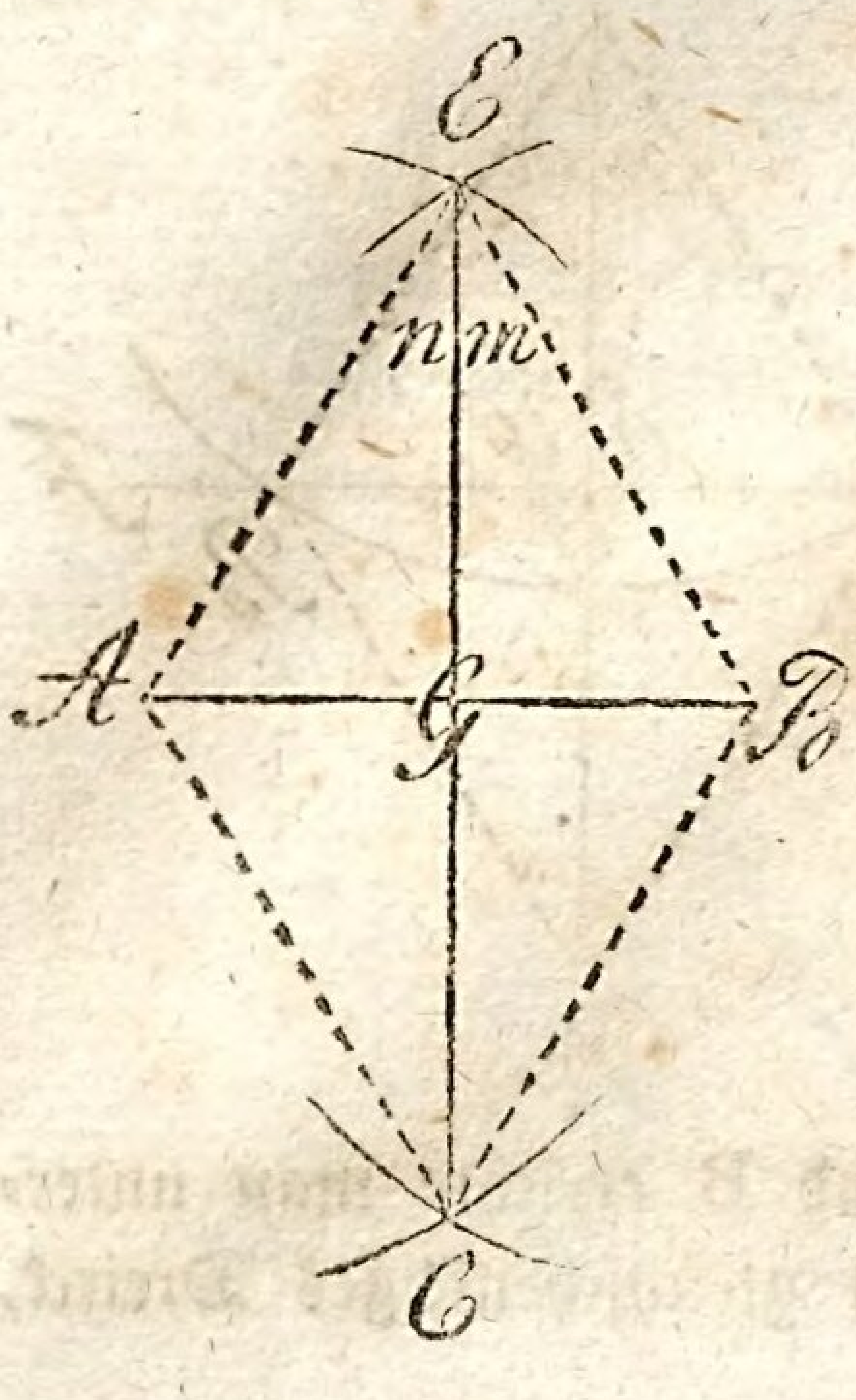
Beweis. AC = CB warum? Siehe § 35 Vorbericht.
AD = DB warum? — — —
CD = CD warum?

△ ACD ≅ CBD nach dem 1sten Satze § 19.
folglich n = m warum?
und da AC = CB
CG = CG

△ ACG ≅ CBG nach dem 2ten Satze § 19.
also o = u.

§ 34.

Aufgabe. Eine gerade Linie in zwei gleiche Theile zu theilen.



Auflösung. Man setzt 1. den Zirkel in beide Endpunkte der gegebenen geraden Linie. 2. Man beschreibt unterhalb und oberhalb derselben ein gleichseitiges oder gleichschenkliges Dreieck, u. 3. man verbindet die Spitzen derselben durch die gerade Linie CE, so ist dadurch die Linie AB in dem Punke G in 2 gleiche Theile getheilt. Es muß demnach bewiesen werden daß AG = GB sei.

Beweis. AE = EB warum?
AC = CB warum?
CE = CE warum?

$\triangle$ ACE $\cong$ $\triangle$ CEB. Nach dem 1sten Satze § 19.
Folglich ist n = m
und da AE = EB
EG = EG

$\triangle$ AEG $\cong$ $\triangle$ BEG
also AG = GB.

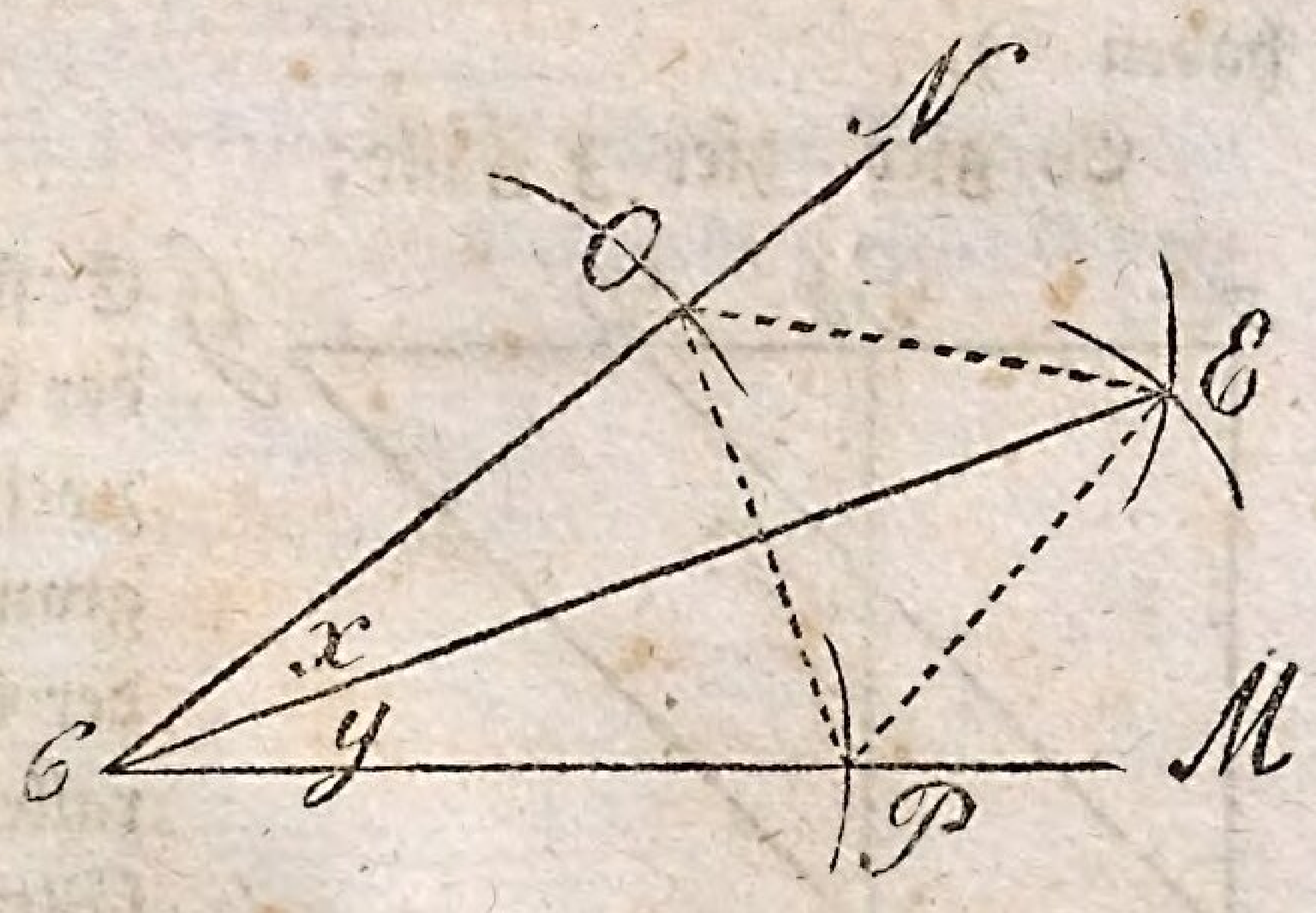
§ 35.

Zusatz. Theilt man jeden Theil AG und GB wieder in zwei gleiche Theile, so wird dadurch die Linie AB in 4 gleiche Theile rc. eingetheilt.

§ 36.

Aufgabe. Einen Winkel in zwei gleiche Theile einzutheilen.

Auflösung. 1. Man setzt den Zirkel in C und schneidet von beiden Schenkeln gleiche Stücke ab, u. 2. man beschreibt aus den



Punkten O und P, in welchen die Schenkel durchschnitten sind, das gleichschenklige Dreieck OPE. Ist dieses geschehen, so ziehet man 3. von der Spitze dieses Dreiecks nach der Spitze des Winkels C eine gerade Linie, welche hierauf den ge-

gebenen Winkel in zwei gleiche Theile theilt. Es muß daher bewiesen werden, daß $\angle x = \angle y$ sei.

Beweis. $OC = CP$ warum?
$OE = PE$ warum?
$CE = CE$

$\triangle COE \cong \triangle CPE$
$\angle x = \angle y$.

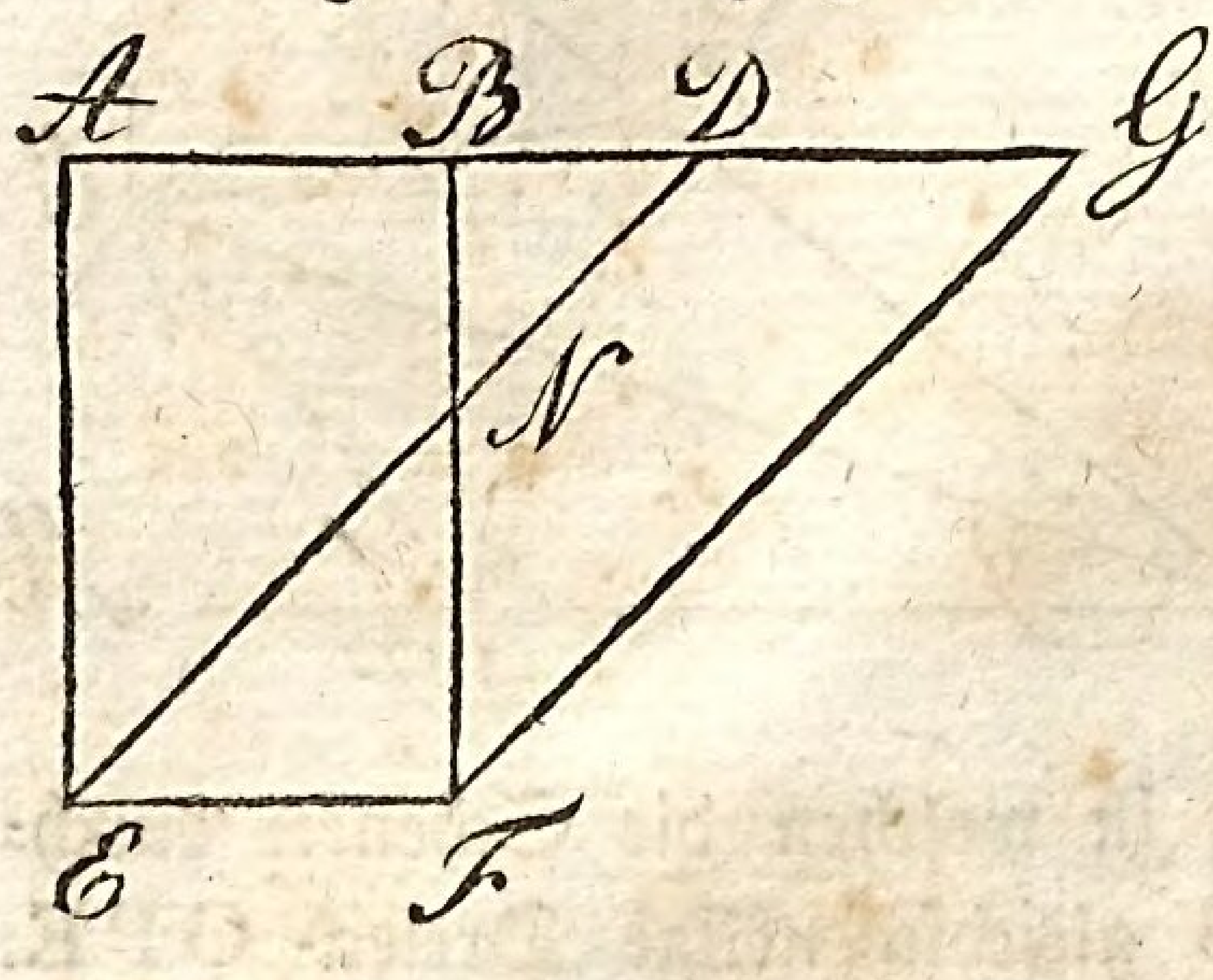
§ 37.

Zusatz. Theilt man hierauf jeden Theil des Winkels wieder in zwei gleiche Theile, so wird dadurch derselbe in 4 gleiche Theile ꝛc. eingetheilt.

§ 38.

Lehrsatz. Zwei Parallelogramme sind sich am Raume gleich, wenn beide gleiche Grundlinien haben und zwischen einerlei Parallellinien liegen, oder wenn beide gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben *).

Es giebt hier 3 Fälle:



Erster Fall, wo der Endpunkt D des zweiten Parallelogramms außerhalb der Seite des 1. Parallelogramms AB fällt.

*) Die gemeinschaftliche Grundlinie beider Parallelogramme ist EF, und die Parallellinien, zwischen welchen beide liegen, sind AG und EF.

Zweiter Fall, wo der Punkt D in dem Punkte B liegt.

Dritter Fall, wo der Punkt D zwischen A und B fällt.

Erster Fall, in welchem demnach bewiesen werden muß, daß □ABFE = □DEFG sei.

Beweis. $AE = BF$ weil es die gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind.

$ED = FG$ aus demselben Grunde.

$AD = BG$ *

△AED ≅ △BFG nach dem 1sten Satze § 19.

— △BDN = - △BDN.

Trap. ABNE = Trap. DNFG. Gleiches vom Gleichen abgezogen giebt gleiche Differenzen.

△ENF = △ENF.

□ABFE = □DEFG. Gleiches zu Gleichen addirt giebt gleiche Summen.

* $AB = EF$ warum?

$EF = DG$ warum?

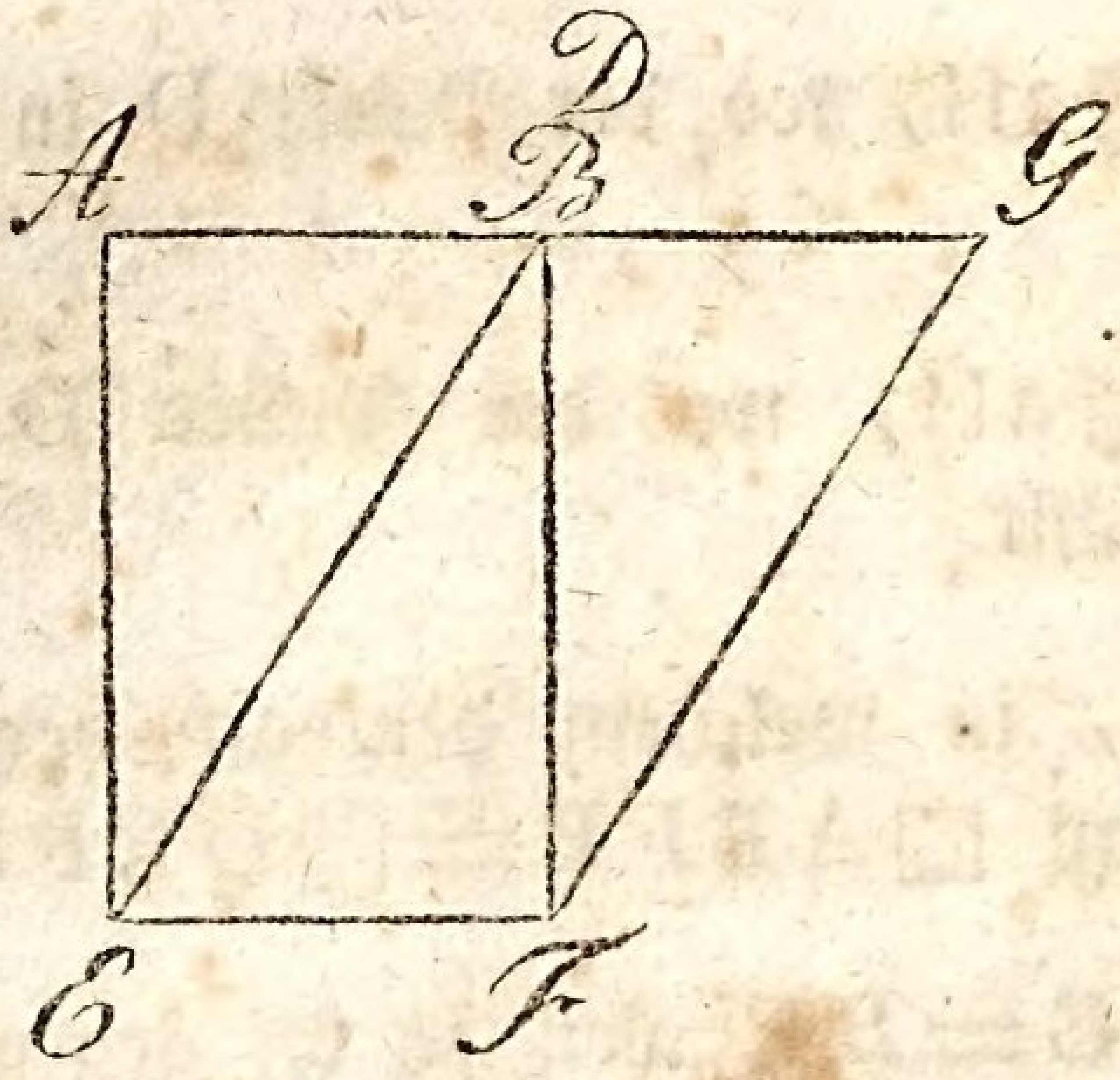
$AB = DG$

$+BD = +BD$

$AB + BD = DG + BD$

$AD = BG.$

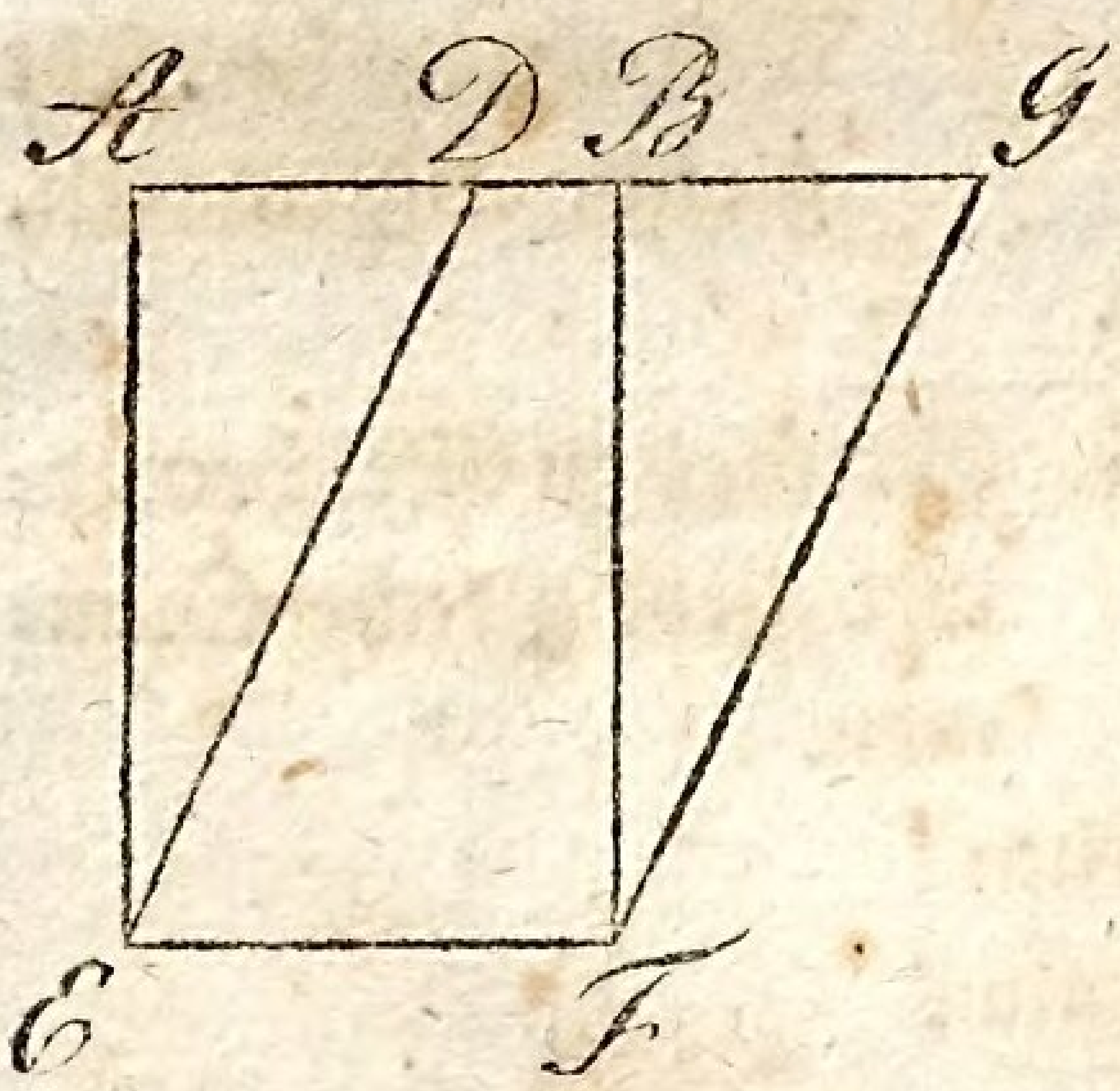
Zweiter Fall, wo bewiesen werden muß, daß □ABFE = □BGFE sei. Siehe die erste Figur auf folgender Seite.



Beweis. $AE = BF$ warum?
$EB = FG$ warum?
$AB = BG$ warum?

$\triangle AEB \cong \triangle DFG$
$+ \triangle BEF = \triangle BEF$

$\square ABFE = \square DEFG$.



Dritter Fall, in welchem bewiesen werden muß, daß $\square ABFE = \square DEFG$ sei.

Beweis. $AE = BF$
$DE = FG$
$AD = BG$ *

$\triangle ADE \cong \triangle BFG$
$+$ Trp. $DBFE = +$ Trap. $DBFE$

$\square ABFE = \square DEFG$.

$$\begin{array}{r} *\ AB = DG \\ -\ DB = -DB \\ \hline AB - DB = DG - DB \end{array}$$

oder

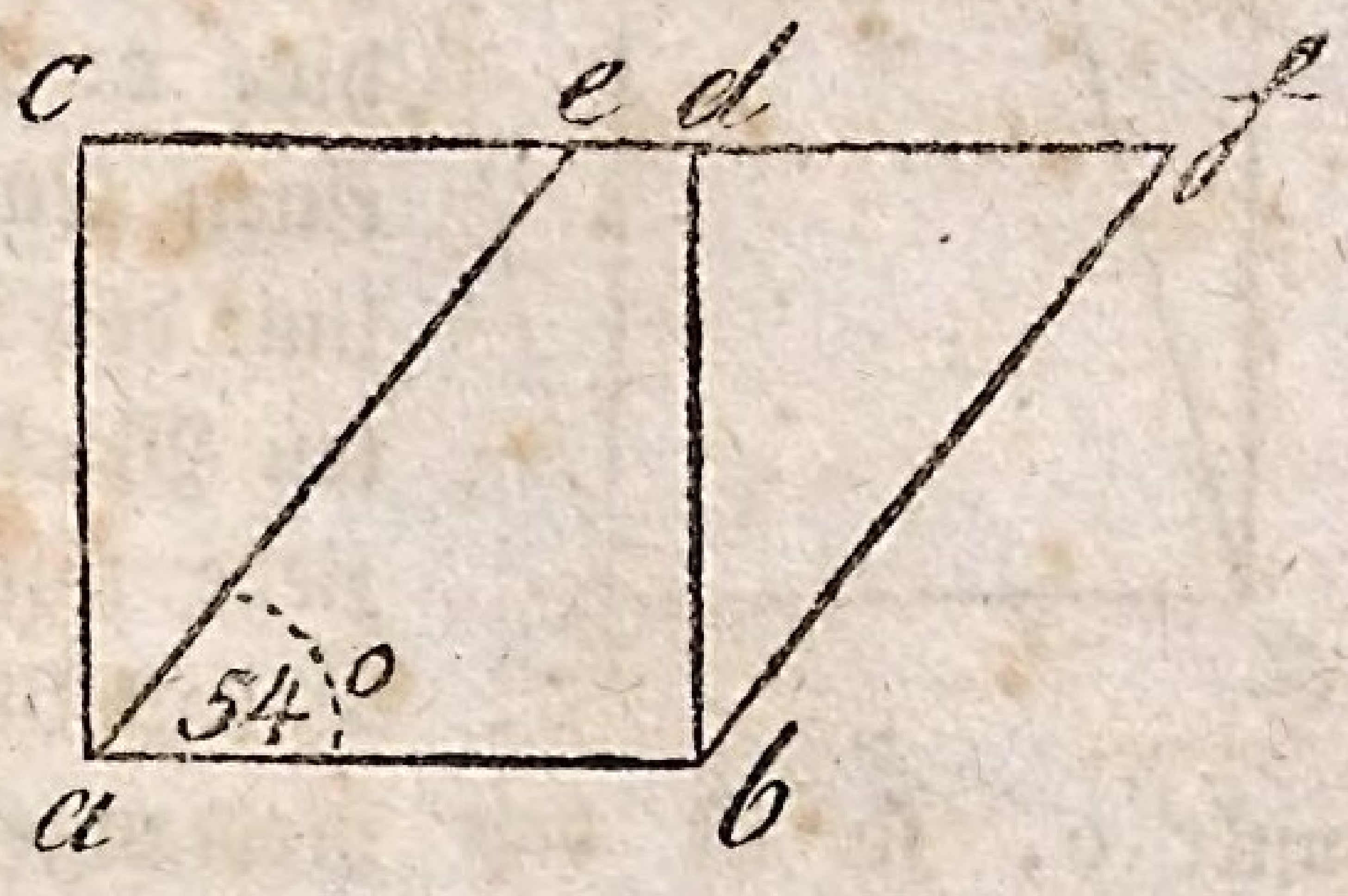
$$AD = BG.$$

§ 39.

Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes, wovon nur die in ein Quadrat, welche im 2ten Abschnitt vorkommt, und die in einen Rhombus, wovon die Verwandlung nicht Statt findet, ausgeschlossen sind; daher finden hier folgende vier Aufgaben Statt.

§ 40.

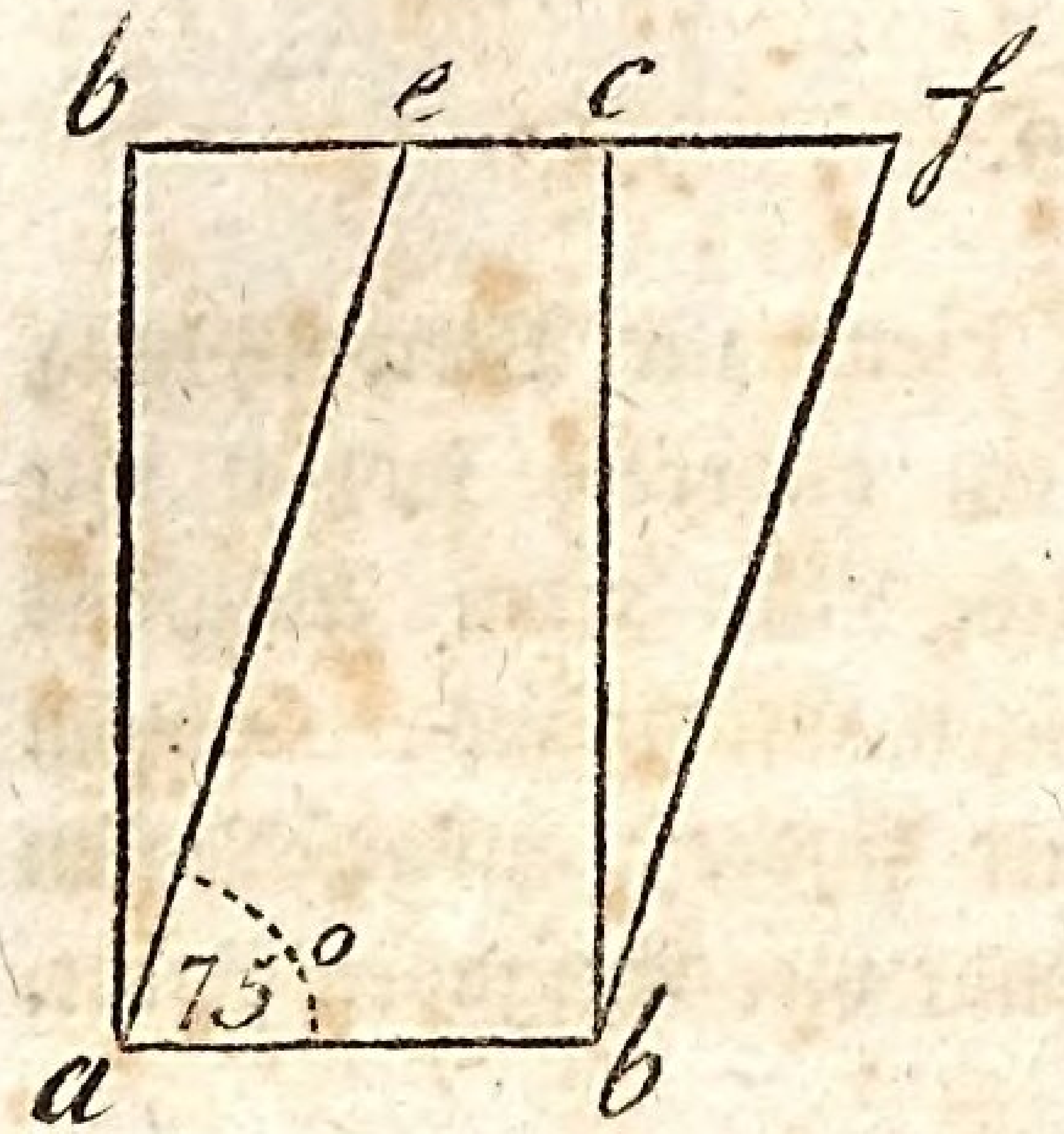
1ste Aufgabe. Ein Quadrat in ein Rhomboides, worin sich ein Winkel von 54° befindet, zu verwandeln.



Auflösung. Man verlängere die obere Seite des Quadrats und setze an irgend einen Endpunkt der Grundlinie desselben z. B. an a den Winkel von 54°, verlängere hierauf den Schenkel bis e, und ziehe mit demselben durch den andern Endpunkt der Grundlinie die Parallellinie b f, so ist □ a c d b = □ a e f b.

§ 41.

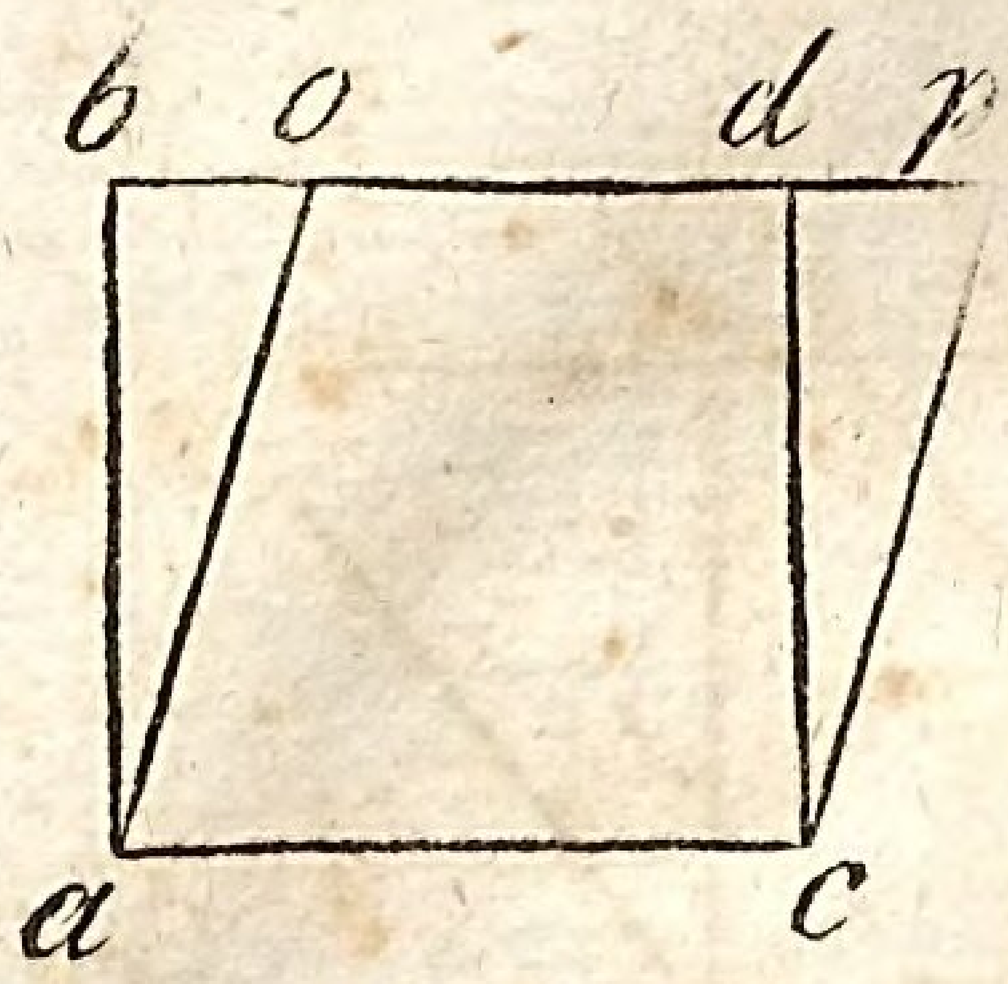
IIte Aufgabe. Ein Rektangel in ein Rhomboides, worin ein Winkel von 75° ist, zu verwandeln.



Auflösung ist der vorhergehenden gleich. S. Fig.

§ 42.

IIIte Aufgabe. Einen Rhombus in ein Rektangel zu verwandeln.

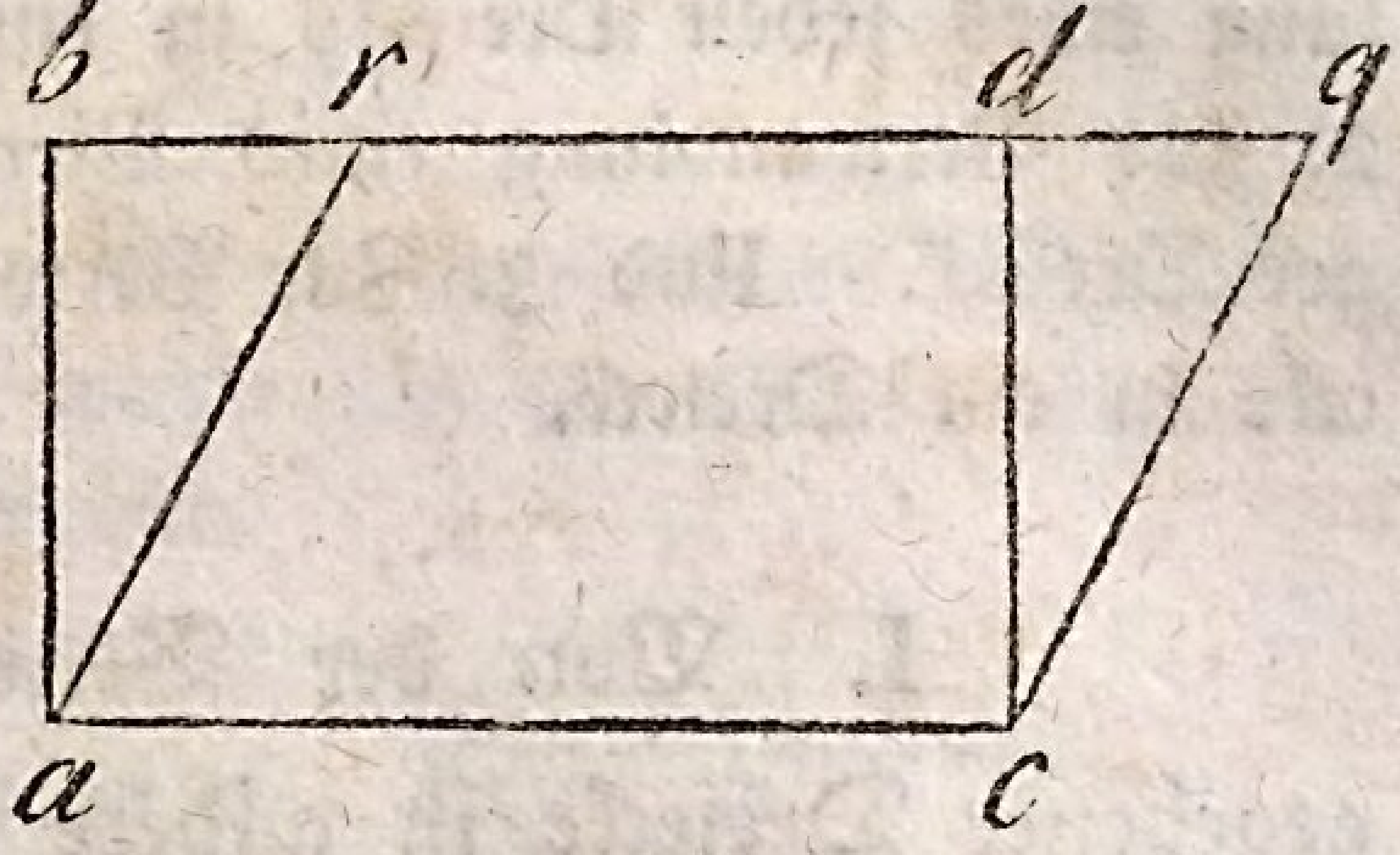


Auflösung. Man verlängere 1. die Linie o p nach b hin. 2. Man setze an irgend einen Endpunkt der Grundlinie des Rhombus einen rechten Winkel z. B. in a, und ziehe mit der Linie a b eine Parallellinie durch den Endpunkt c, so ist das Rektangel a b d c = dem Rhombus o p c a.

§ 43.

IVte Aufgabe. Ein Rhomboides in ein Rektangel zu verwandeln.

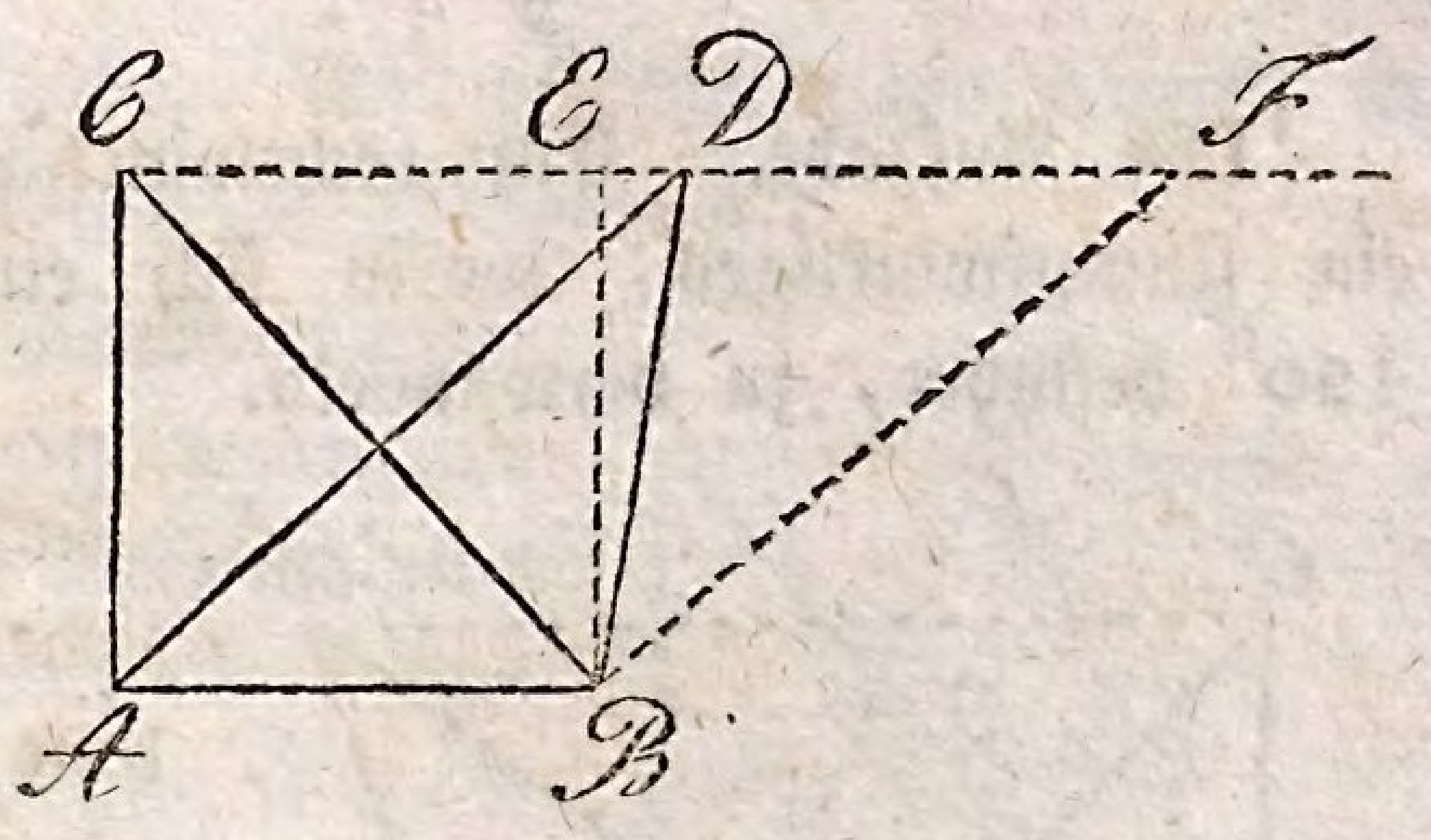
Auflösung ist der im § 42 gleich.



§ 44.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind am Raume sich gleich, wenn beide gleiche Grundlinien haben und zwischen einerlei Parallellinien liegen, oder wenn beide gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben. Es muß demnach bewiesen werden, daß △ ABC = △ ABD sei.

Beweis. Man ziehe mit AC durch d. Punkt B u. mit AD durch d. Punkt B die Parallellinien BE und BF, alsdann



ist □ ACEB = □ ADFB nach § 42.
und ½ □ ACEB = ½ □ ADFB
aber ½ □ ACEB = △ ACB nach Vorbericht § 44.
und ½ □ ADFB = △ ABD — = — = — =

△ ACB = △ ABD.

§ 45.

Zusatz. Dieser Lehrsatz dient 1. zur Verwand=

lung eines jeden Dreiecks in ein anderes beliebiges. 2. Zur Verwandlung eines Vierecks in ein beliebiges Dreieck. Und 3. Zur Verwandlung eines Vielecks in ein Dreieck.

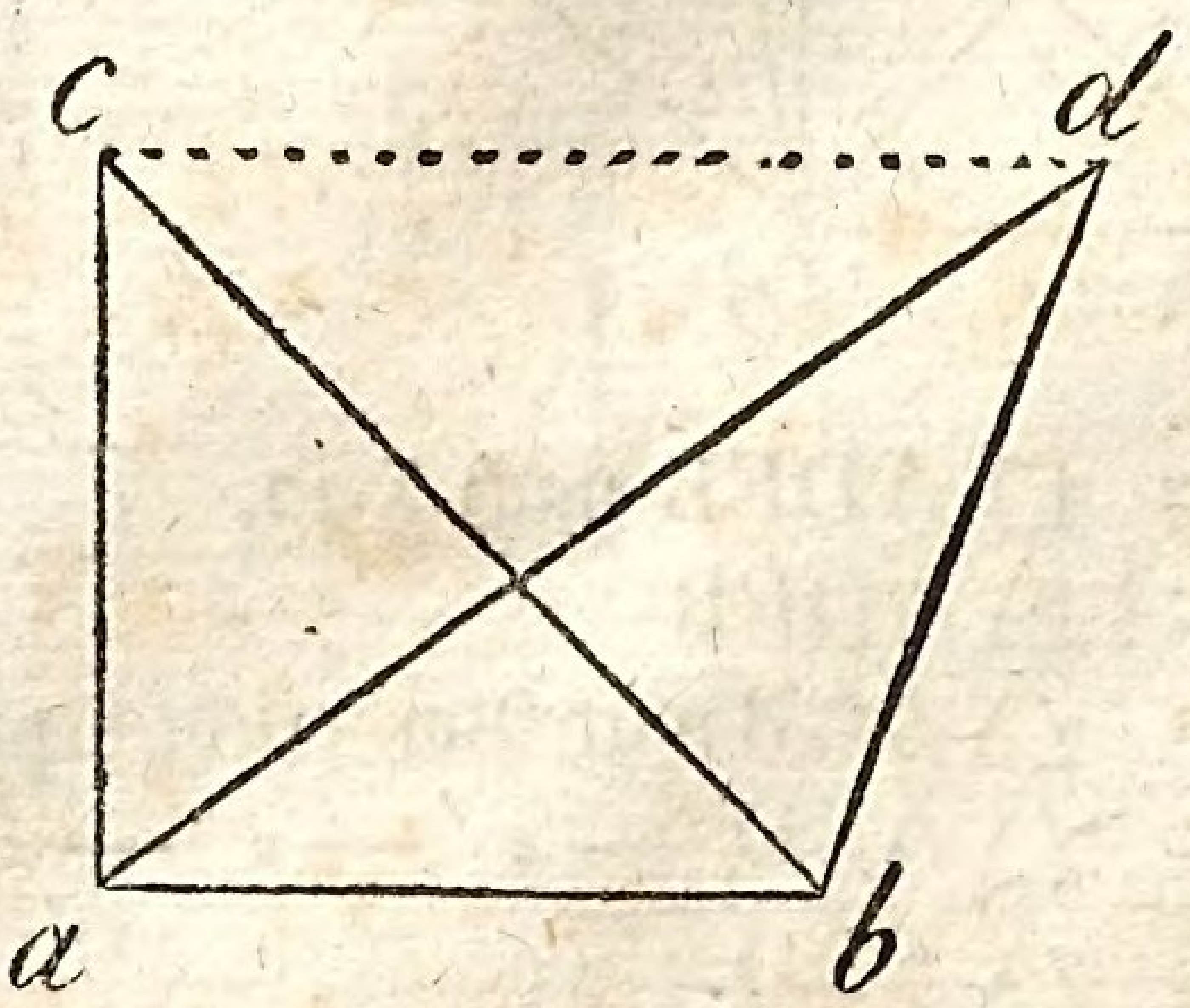
I. Von der Verwandlung gegebener Dreiecke in andere beliebige Dreiecke.

§ 46.

Willkührlicher Satz. Bei allen diesen Verwandlungen muß man Parallellinein mit den Grundlinien durch die Spitzen der zu verwandelnden Dreiecke ziehen, wie folgende Aufgaben lehren werden.

§ 47.

1ste Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck in ein stumpfwinkliges, worin sich ein Winkel von 120° befindet, zu verwandeln.

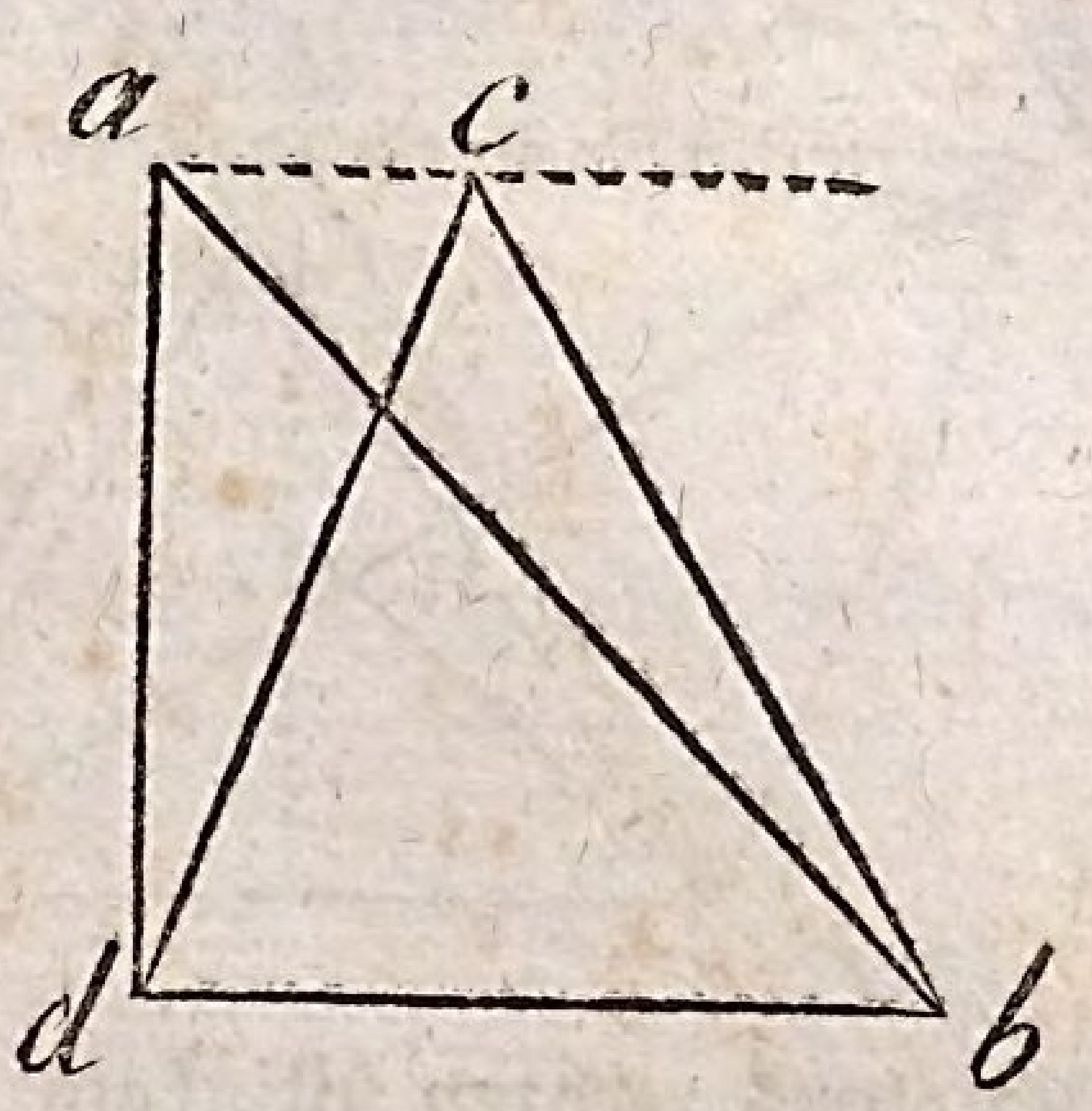


Auflösung. 1. Man ziehe mit der Grundlinie ab des Dreiecks abc eine Parallellinie durch die Spitze c desselben. 2 Man lege an b den Winkel von 120° u. verlängere dessen Schenkel bis zu der Parallellinie d. i. bis zu dem Punkte d, und ziehe 3. die Linie ad, so ist △abc = △abd nach dem vorhergehenden Lehrsatze.

§ 48.

IIte Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck in ein spitzwinkliges, worin sich ein Winkel von 70° befindet, zu verwandeln.

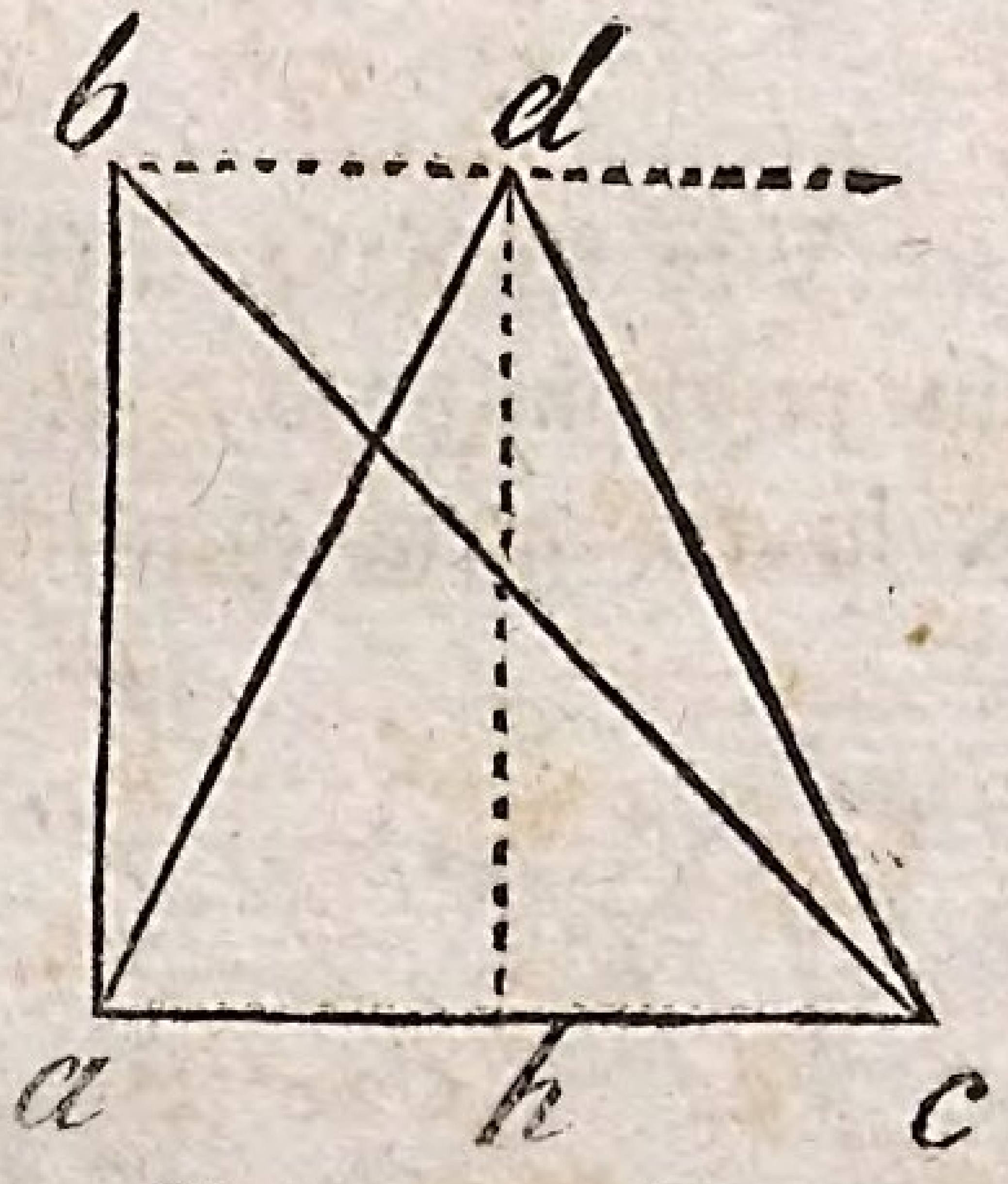
Auflösung. Bei dieser Auflösung setzt man an d einen Winkel von 70°, übrigens aber verfährt man eben so, wie bei der vorhergehenden Verwandlung.



§ 49.

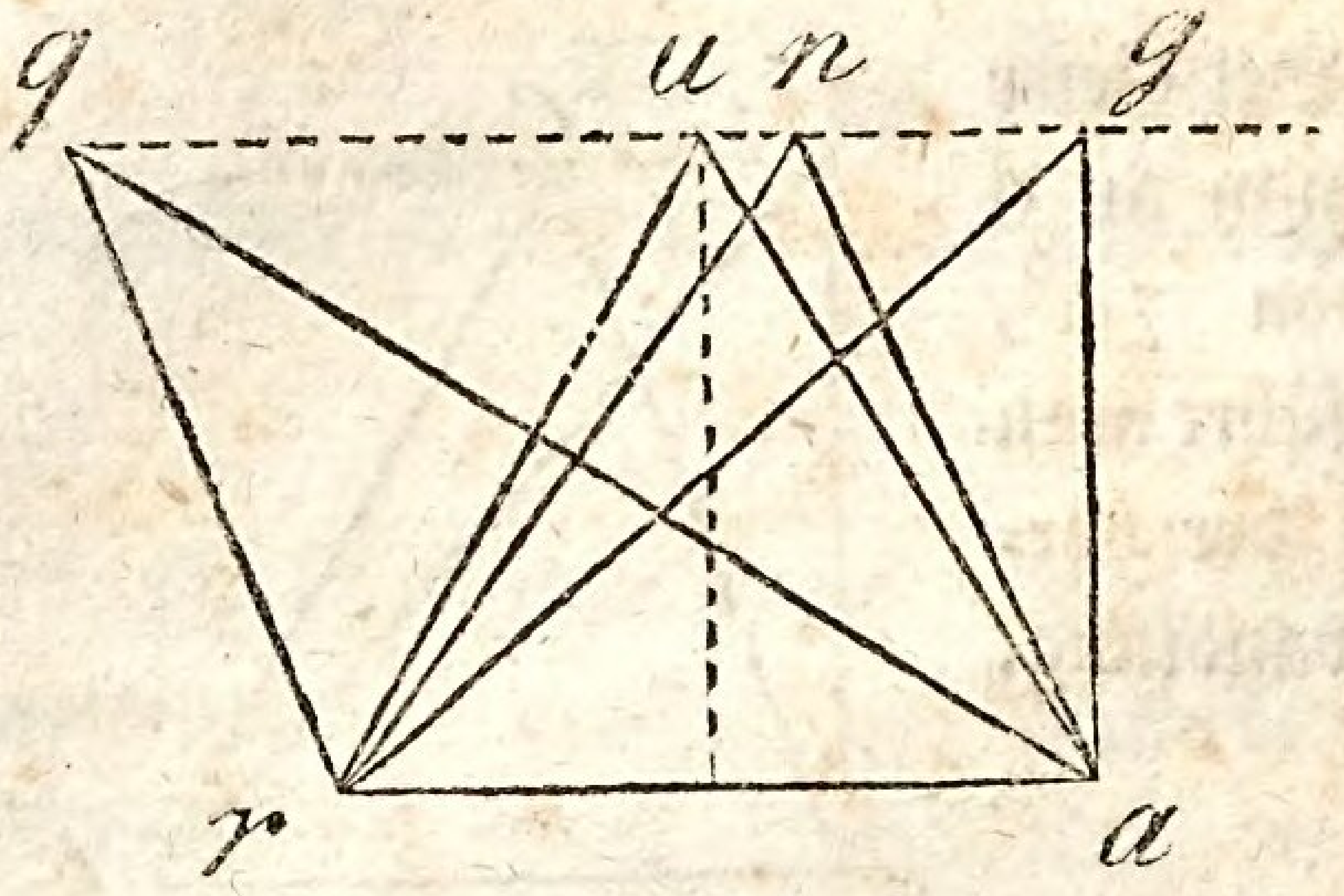
IIIte Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Auflösung. Nachdem man, wie zuvor, mit der Grundlinie des gegebenen Dreiecks eine Parallellinie durch die Spitze desselben gezogen hat, so theilt man hierauf 1. die Grundlinie in zwei gleiche Theile. Aus dem Theilungspunkte oder aus der Mitte der Grundlinie errichtet man 2. eine senkrechte Linie zur Parallellinie hin, und ziehet 3. aus den Endpunkten der Grundlinie nach dem Punkte d, in welchem die senkrechte Linie die Parallellinie geschnitten hat, Linien. Ist dieses geschehen, so ist △abc = △adc.



§ 50.

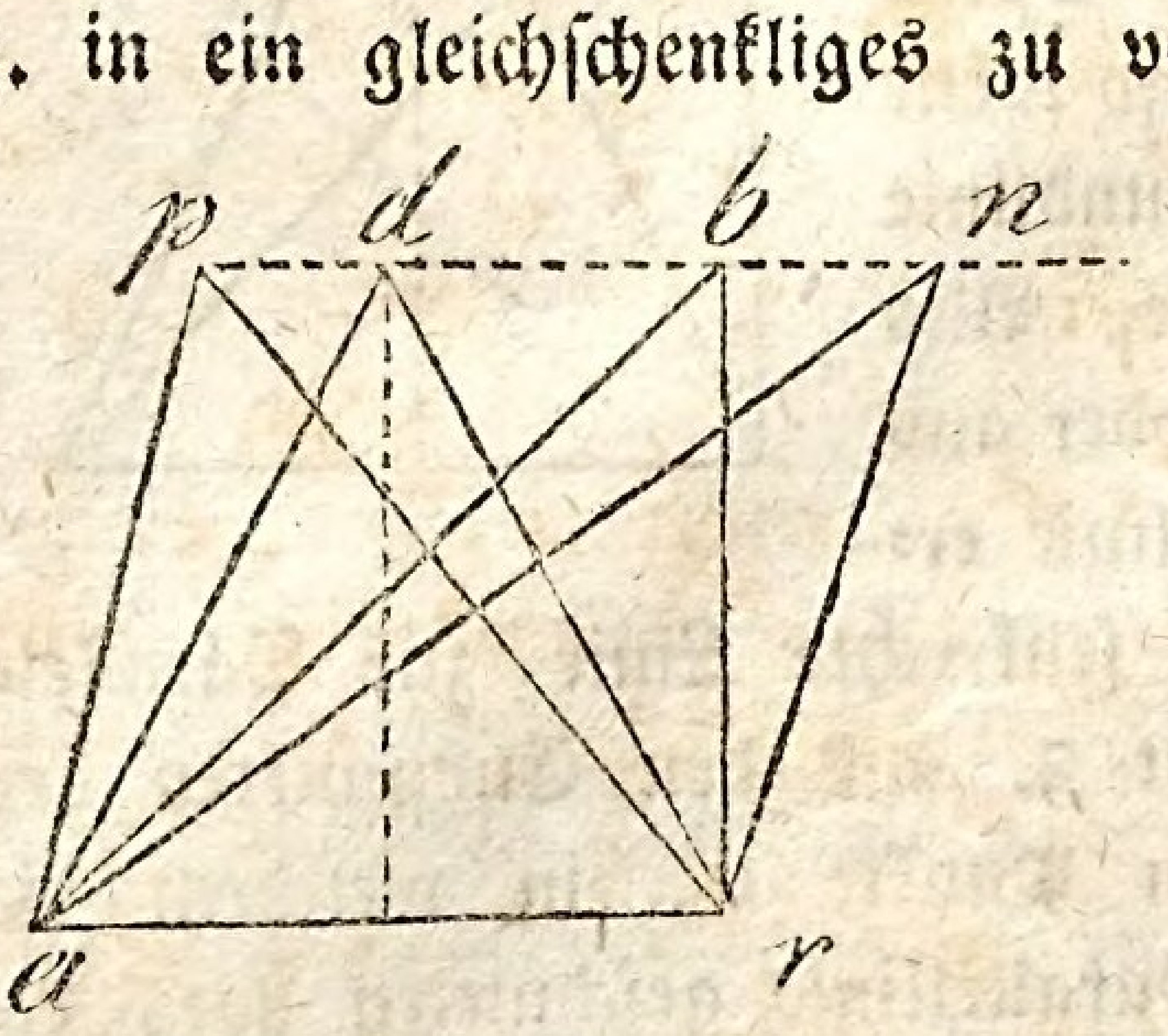
IVte Aufgabe. Ein stumpfwinkliges Dreieck 1. in ein rechtwinkliges, 2. in ein spitzwinkliges und 3. in ein gleichschenkliges zu verwandeln.



Die Auflösung davon erhellet aus den Vorhergehenden. In der Figur ist das stumpfwinklige Dreieck aqr durch die Errichtung eines rechten Winkels in a 1. in das rechtwinklige Dreieck agr, 2. durch die Ansetzung eines Winkels von 50° in das spitzwinklige Dreieck anr, und 3. durch die Theilung der Grundlinie in das gleichschenklige Dreieck aur verwandelt worden.

§ 51.

Vte Aufgabe. Ein spitzwinkliges Dreieck 1. in ein rechtwinkliges, 2. in ein stumpfwinkliges und 3. in ein gleichschenkliges zu verwandeln.



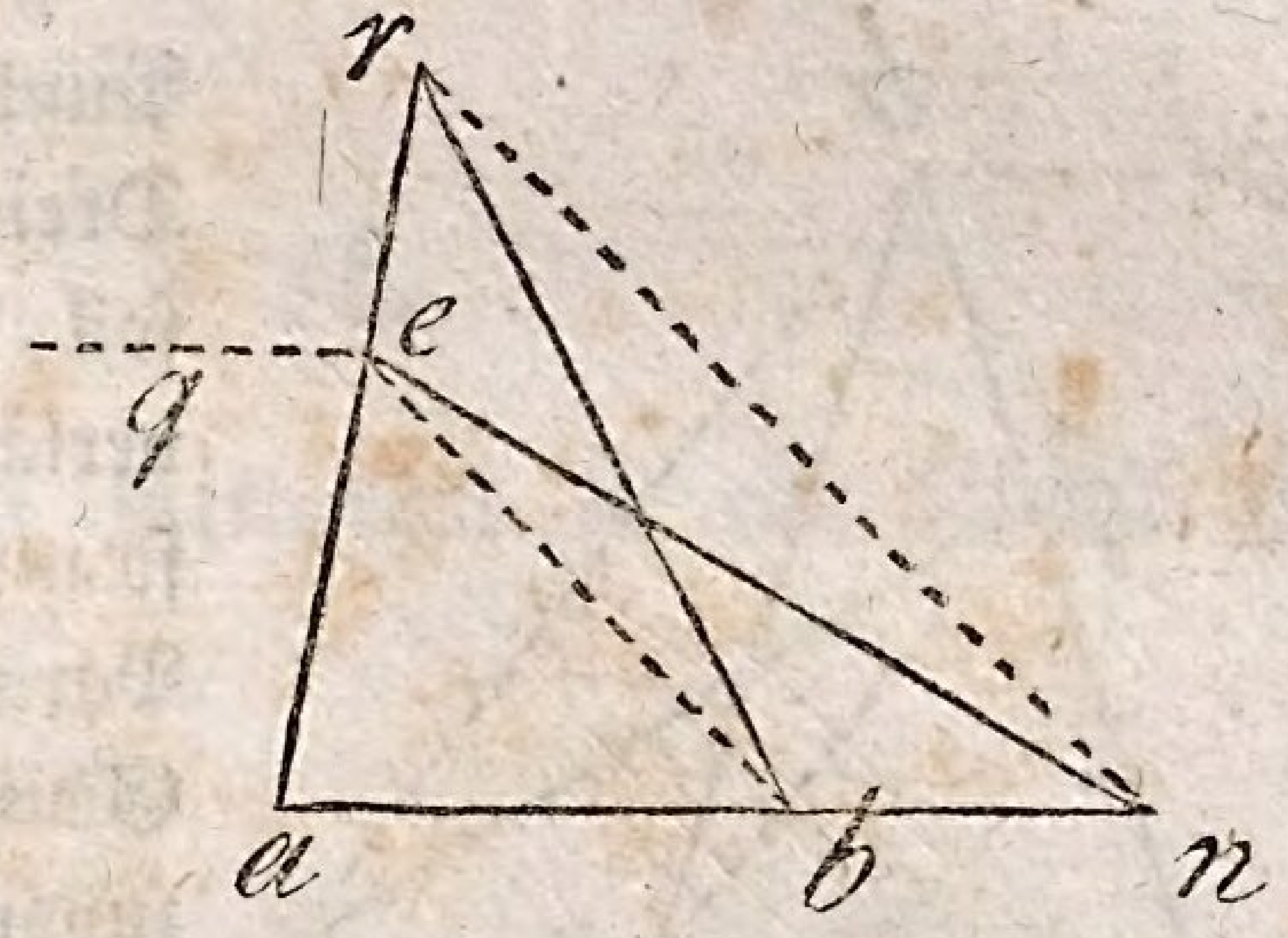
Auflösung wie vorher. In der Figur ist das spitzwinklige Dreieck apr in das rechtwinklige △abr, 2. in das stumpfwinklige Dreieck anr und 3. in das gleichschenklige Dreieck adr verwandelt worden.

§ 52.

Zusatz. Auf eben diese Weise kann ein gleichschenkliges Dreieck in ein rechtwinkliges, stumpf- und spitzwinkliges Dreieck verwandelt werden.

§ 53.

Aufgabe. Ein hohes Dreieck in ein niedriges zu verwandeln.



Auflösung. Liegt der Punkt, wie hier q, außerhalb der Seite, zu welcher das Dreieck niedriger gemacht werden soll, so ziehe man 1. eine Parallellinie mit der Grundlinie durch diesen Punkt bis zur Seite des Dreiecks. 2. Hierauf ziehe man von dem Punkte e bis zum Endpunkte der Grundlinie eine Hülfslinie eb, und verlängere 3. die Grundlinie von b aus um etwas. 4. Ziehe man eine Parallellinie als Hülfslinie mit eb durch die Spitze des Dreiecks r bis zur Grundlinie hin. Und hierauf ziehe man endlich 5. die Linie en d. i. von dem Punkte, zu welchem das Dreieck niedriger gemacht werden sollte, bis zu dem, wo die Hülfs-Parallellinie die Grundlinie abschneidet. Ist dies geschehen, so ist △arb = △aen.

Beweis. $\triangle aeb = \triangle aeb$
$\triangle erb = \triangle ben$ *)

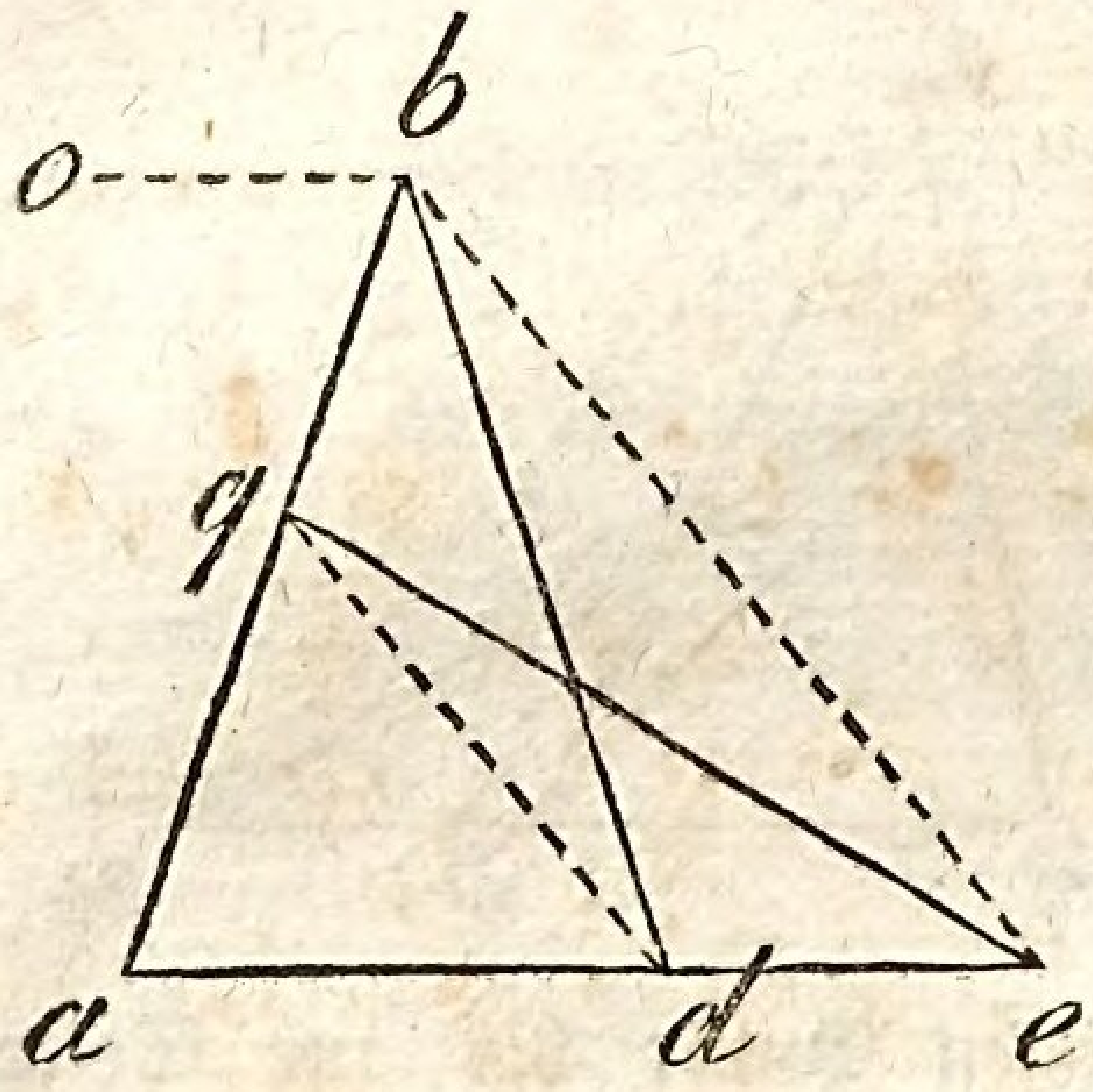
$$\triangle aeb + \triangle erb = \triangle aeb + \triangle ben$$

das ist

$$\triangle arb = \triangle aen.$$

§ 54.

Aufgabe. Ein niedriges Dreieck in ein höheres zu verwandeln.



Auflösung. Liegt der Punkt o, zu welchem das Dreieck erhöhet werden soll, noch nicht in der verlängerten Seite ab, so muß solcher durch eine Parallellinie mit der Grundlinie in dieselbe zuvor gebracht werden. Ist dies geschehen, so ziehet man 1. von b nach e, das ist nach dem Endpunkte der Grundlinie eine Hülfslinie. Mit dieser ziehet man 2. durch den Punkt q eine Hülfsparallellinie qd, wo alsdann diese die Grundlinie in d durchschneidet, daselbst ist der Punkt, nach welchem, von b aus, die Linie bd gezogen wird. Alsdann ist das $\triangle abd = \triangle aqe$.

Der Beweis wie vorhin.

---

*) Weil beide Dreiecke eine gleiche Grundlinie eb haben und zwischen einerlei Parallellinien eb und rn liegen.

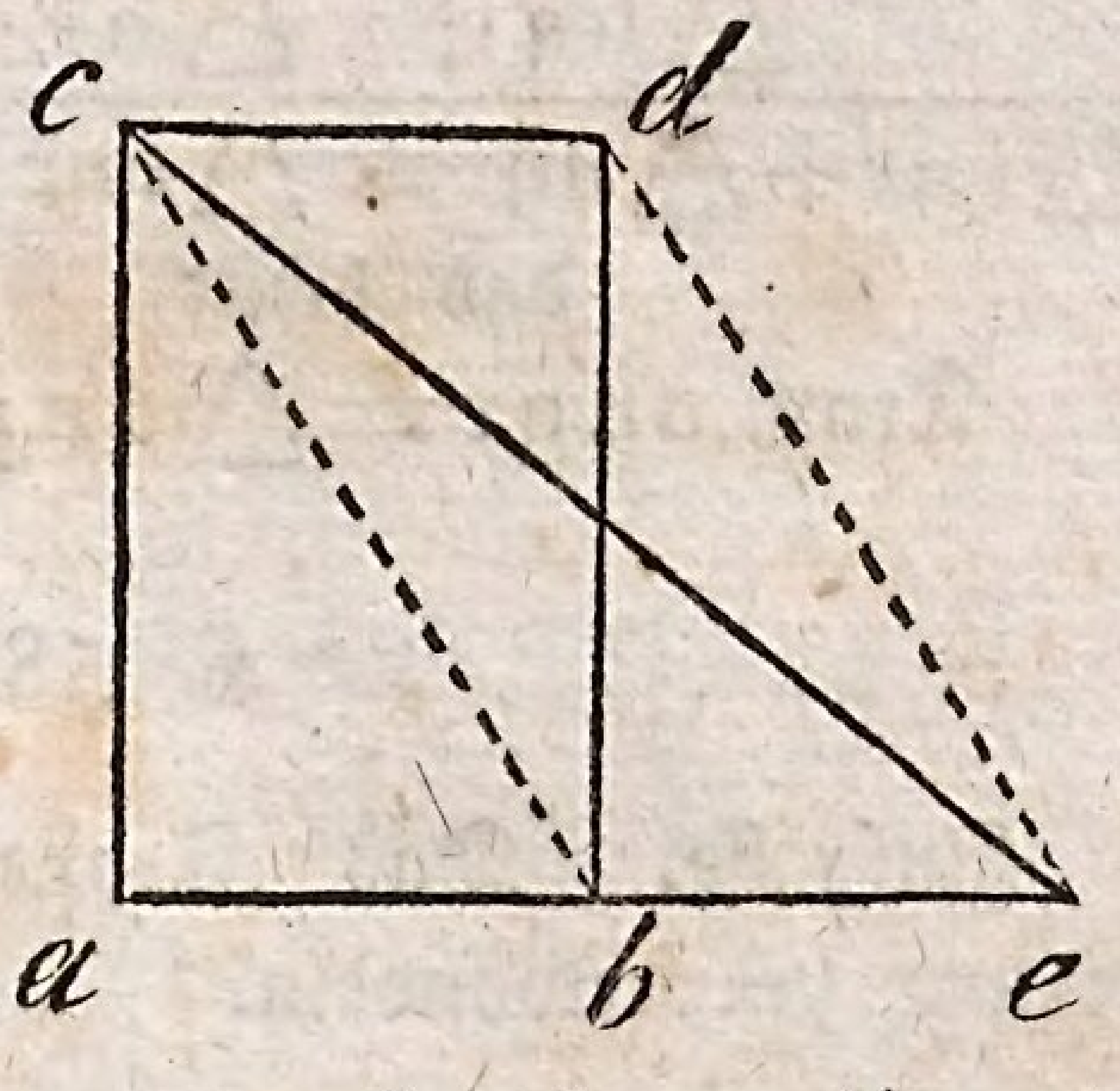
II. Von der Verwandlung vierseitiger Figuren in Dreiecke.

§ 55.

Willkührlicher Satz. Bei allen diesen Verwandlungen muß man die Vierecke durch eine Diagonallinie theilen, und alsdann das obere Dreieck in ein anderes so verwandeln, daß die eine Seite davon in die verlängerte Grundlinie des Vierecks zu liegen kommt.

§ 56.

Aufgabe. Ein Rektangel in ein Dreieck zu verwandeln.



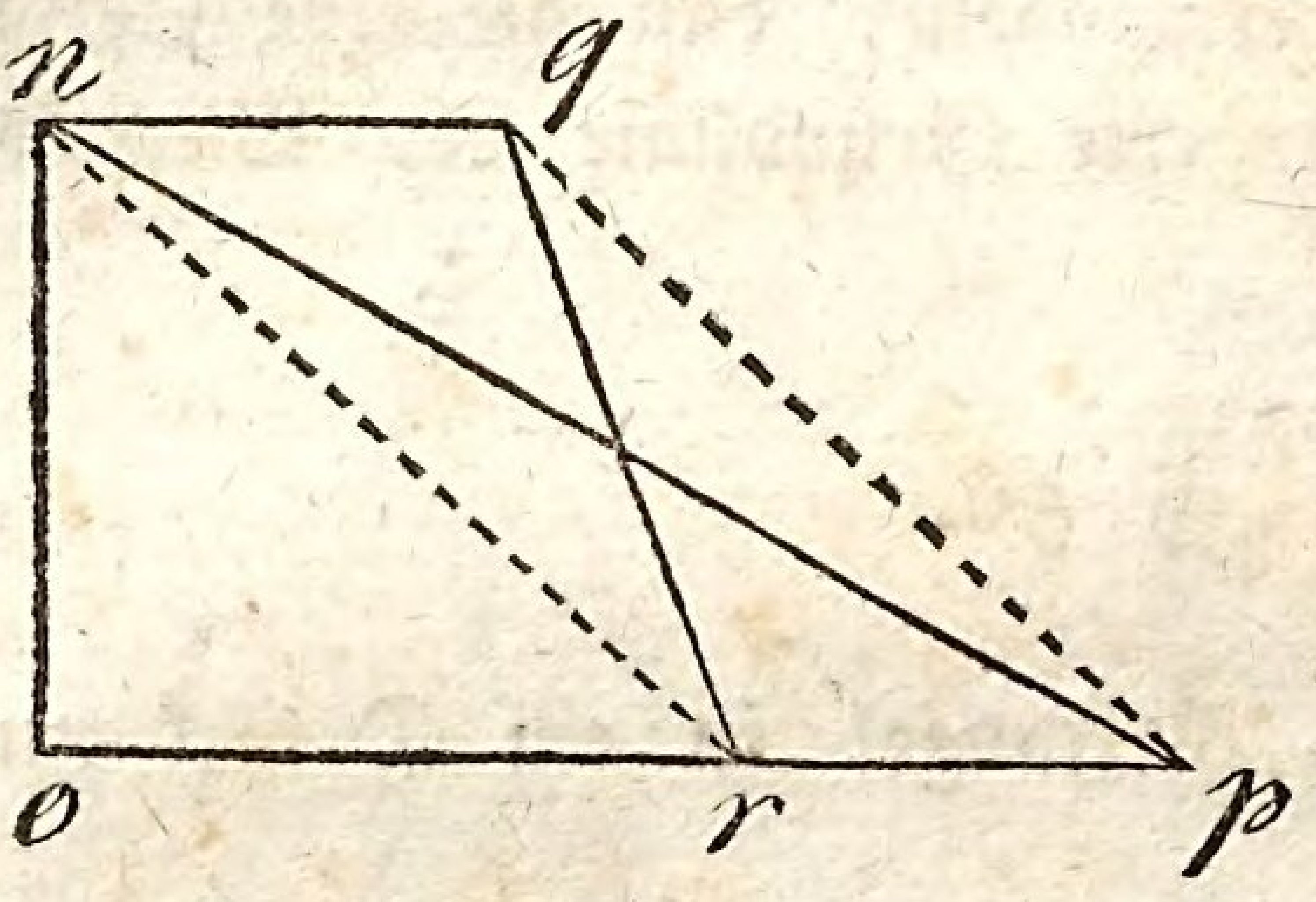
Auflösung. Man ziehe 1. die Diagonallinie c b, wodurch das Rektangel a b d c in die beiden Dreiecke a b c und c d b getheilt wird. Hierauf wird 2. mit der Diagonallinie c b eine Hülfs-Parallellinie d e durch die Spitze d des obern Dreiecks b d c gezogen, wodurch die verlängerte Grundlinie in e durchschnitten wird. Und hierauf wird 3. die Linie c e gezogen. Ist dieses geschehen, so ist □ a b d c = △ a c e.

Beweis. $\triangle$ acb = $\triangle$ acb
$\triangle$ cdb = $\triangle$ bce. Siehe Anmerkung § 53.

$\triangle$ acb + $\triangle$ cdb = $\triangle$ acb + $\triangle$ bce
das ist
$\square$ abdc = $\triangle$ ace.

§ 57.

Aufgabe. Das Trapezium onqr in ein Dreieck onp zu verwandeln.



Auflösung. Man ziehe die Diagonallinie nr und verfahre alsdann eben so, wie bei dem Rektangel gezeigt ist. Alsdann ist Trapez. onqr = $\triangle$ onp.

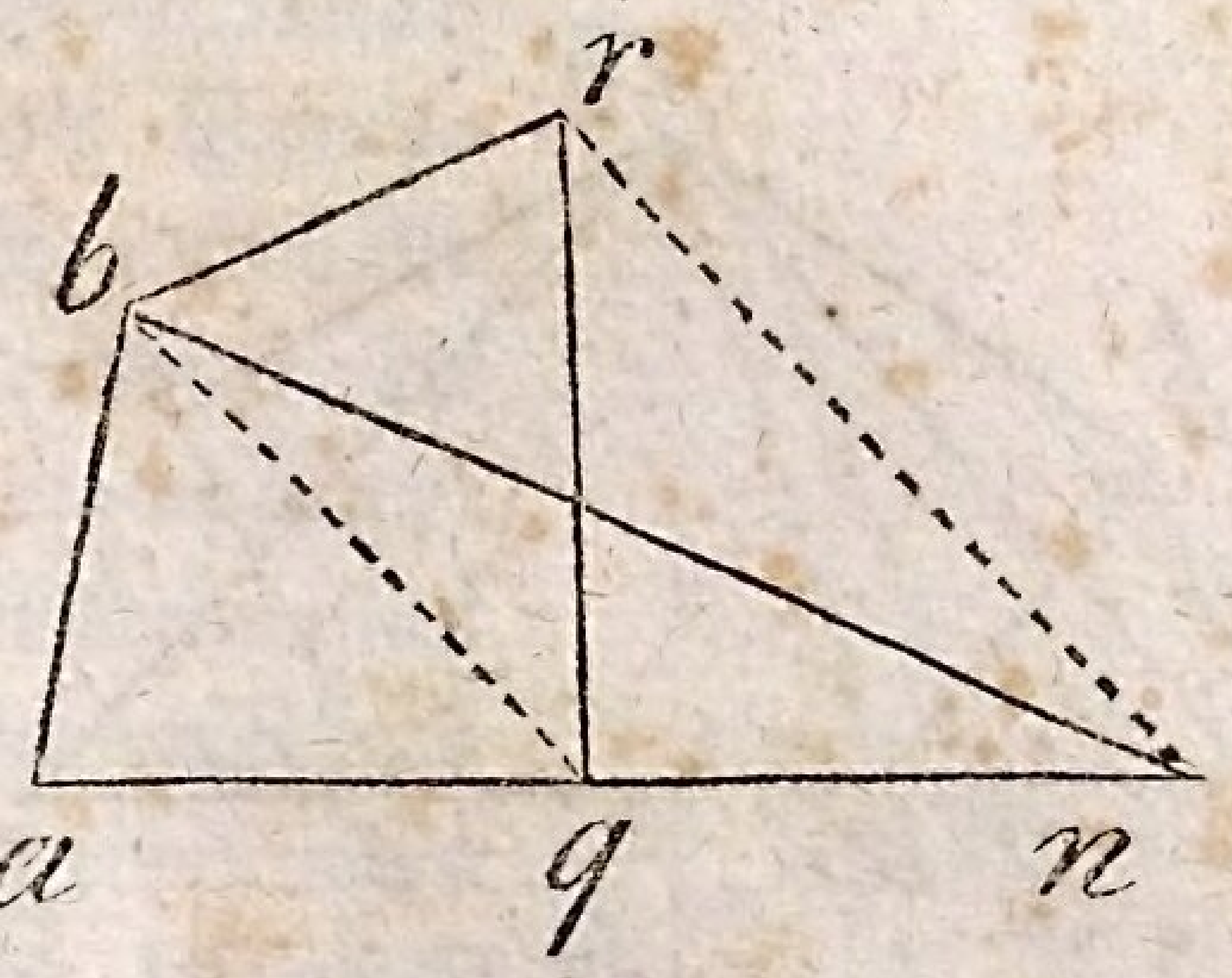
Beweis. $\triangle$ onr = $\triangle$ onr
$\triangle$ nqr = $\triangle$ nrp

$\triangle$ onr + $\triangle$ nqr = $\triangle$ onr + $\triangle$ nrp
das heißt
Trap. onqr = $\triangle$ onp.

§ 58.

Aufgabe. Das Trapezoides abrq in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Wenn man die Diagonallinie bq gezogen hat, so verfährt man eben so, wie bei den beiden vorhergehenden Aufgaben, wodurch alsdann das Trapezoides abrq = $\triangle$ abn wird. S. Fig. auf folg. Seite.



Der Beweis ist den vorhergehenden gleich.

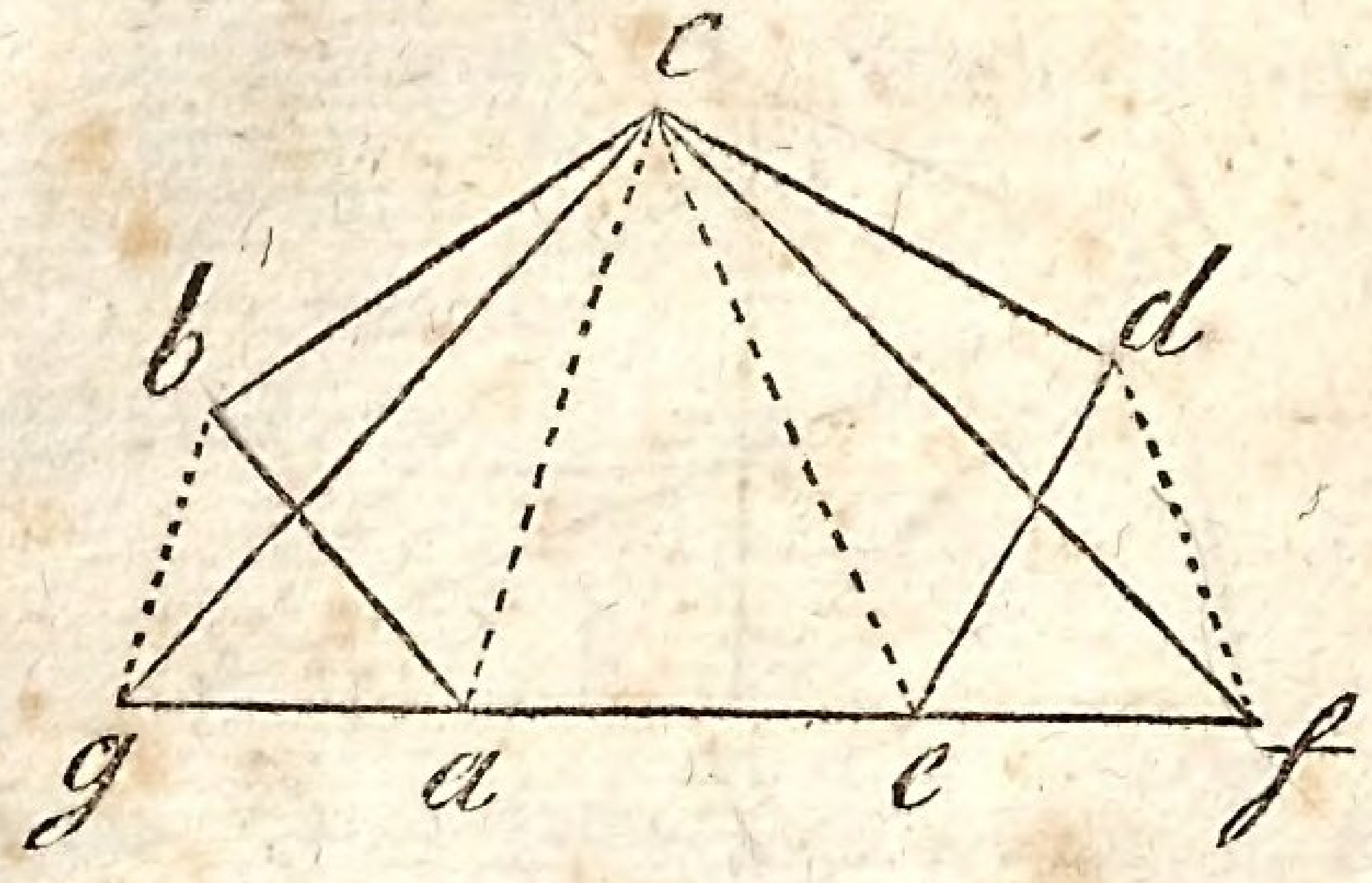
§ 59.

Zusatz. Auf eben diese Weise werden die andern drei Vierecke, Quadrat, Rhombus und Rhomboides verwandelt. Und soll irgend eine von diesen Figuren in ein bestimmtes Dreieck verwandelt werden, so muß das Dreieck, worin die Figur zuerst verwandelt ist, nach § 24 abgetragen und in das verlangte verwandelt werden, welches nach den Aufgaben im No. I. geschiehet.

III. Von der Verwandlung der Vielecke in Dreiecke.

§ 60.

Aufgabe. Ein Fünfeck a b c d e in ein Dreieck zu verwandeln.



Auflösung. Man verlängere 1. die Grundlinie nach beiden Seiten hin. 2. Man ziehe die Diagonallinien ac und ce. 3. Ziehe man mit diesen die Hülfsparallellinien bg und df durch die Spitzen d und b der beiden Dreiecke ced und abc. Und hierauf ziehet man 4. die Linien cg und cf, so ist dadurch das Vieleck abcde = △ gcf.

Beweis. △ ace = △ ace
△ abc = △ aeg. Siehe 1sten Abschnitt § 53 Anmerkung.
△ ced = △ ecf

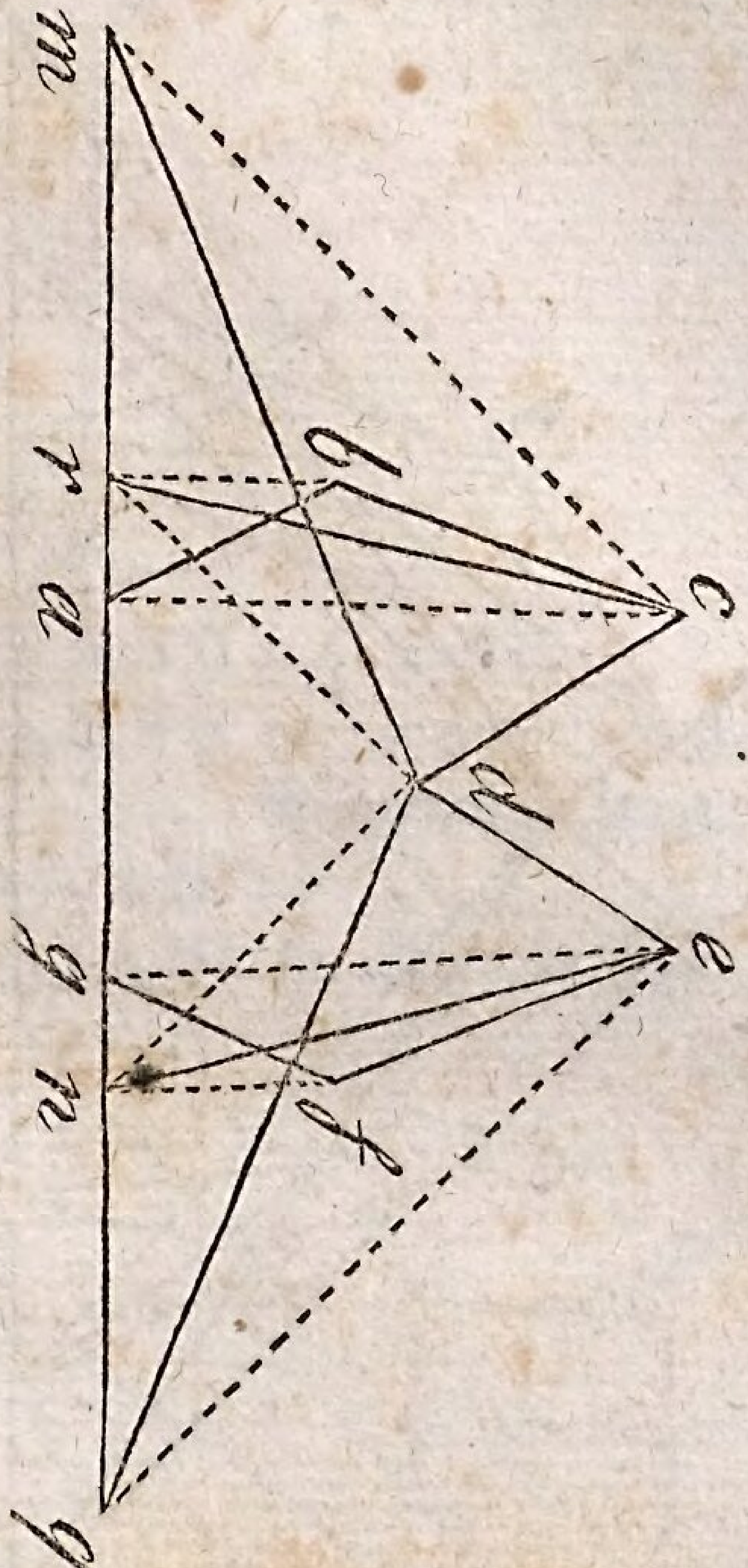
△ace + △abc + △ced = △ace + △acg + △ecf

das ist

Fünfeck abcdc = △ gdf.

§ 61.

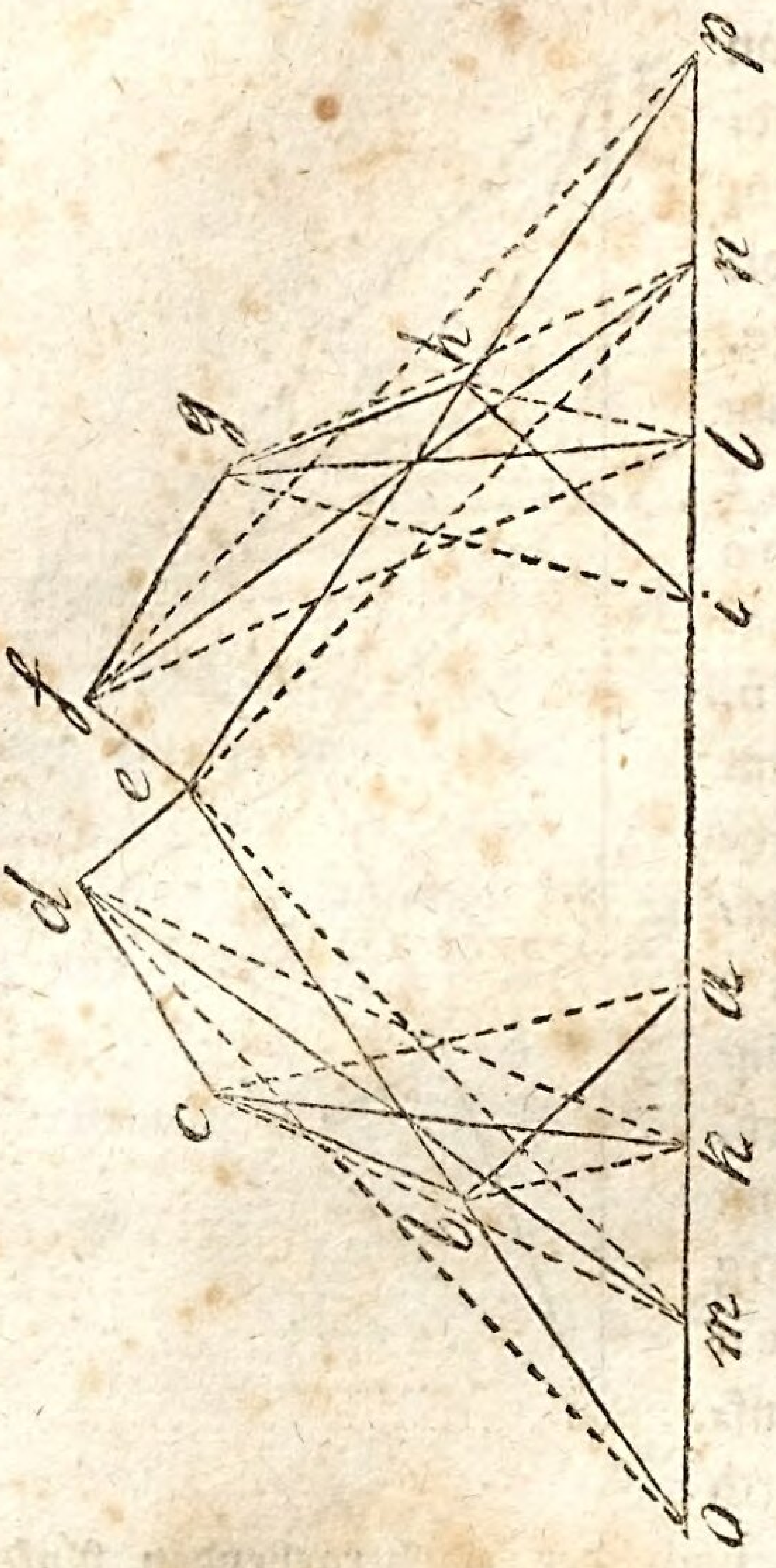
Aufgabe. Das Siebeneck abcdefg in ein Dreieck zu verwandeln.



Auflösung. 1. Man verlängere die Grundlinie auf beiden Seiten, und ziehe hierauf 2. die Diagonallinien ac u. ge. 3. Mit diesen ziehe man durch die Spitzen b u. f der beiden Dreiecke abc und gef die Hülfsparallellinien br und fn. Da, wo diese die verlängerte Grundlinie durchschneiden, sind die Punkte, nach welchen von c und e gerade Linien hingezogen werden müssen. Hierdurch wird alsdann das Siebeneck abcdefg in das Fünfeck rcden verwandelt. Dies Fünfeck wird hierauf durch neue Diagonallinien nach der vorhergehenden Aufgabe in ein Dreieck verwandelt. Zu diesem Ende ziehe man 4. die Diagonallinien dr und dn, und mit diesen ziehe man 5. die Hülfsparallellinien cm und eq und endlich 6. die Linien dm und dq, so ist dadurch das Siebeneck abcdefg in das Dreieck mdq verwandelt worden.

§ 62.

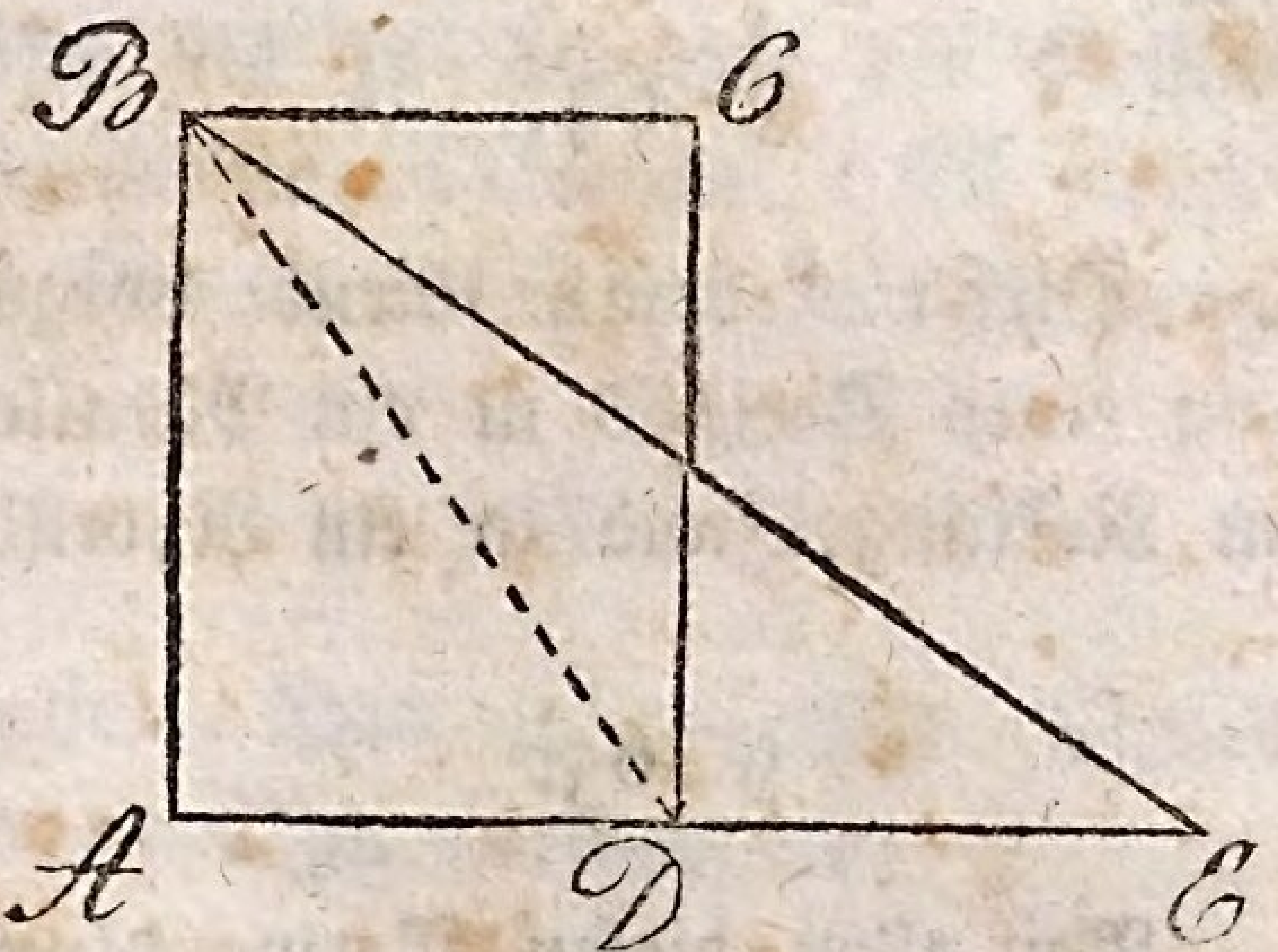
Aufgabe. Ein Neuneck in ein Dreieck zu verwandeln.



Die Auflösung ist der vorhergehenden gleich.

§ 63.

Lehrsatz. Ein Dreieck ist einem Parallelogramme am Raume gleich, wenn die Grundlinie des Dreiecks noch einmal so groß als die des Parallegramms ist, und wenn beide zwischen einerlei Parallellinien liegen, oder gleiche Höhen haben. Es muß demnach bewiesen werden, daß □ ABCD = △ ABE sei.



Beweis. $\triangle ABE = \triangle ABD + \triangle DBE$

da nun $\triangle ABD = \triangle DBE$ ist, weil sie gleiche Grundlinien haben,

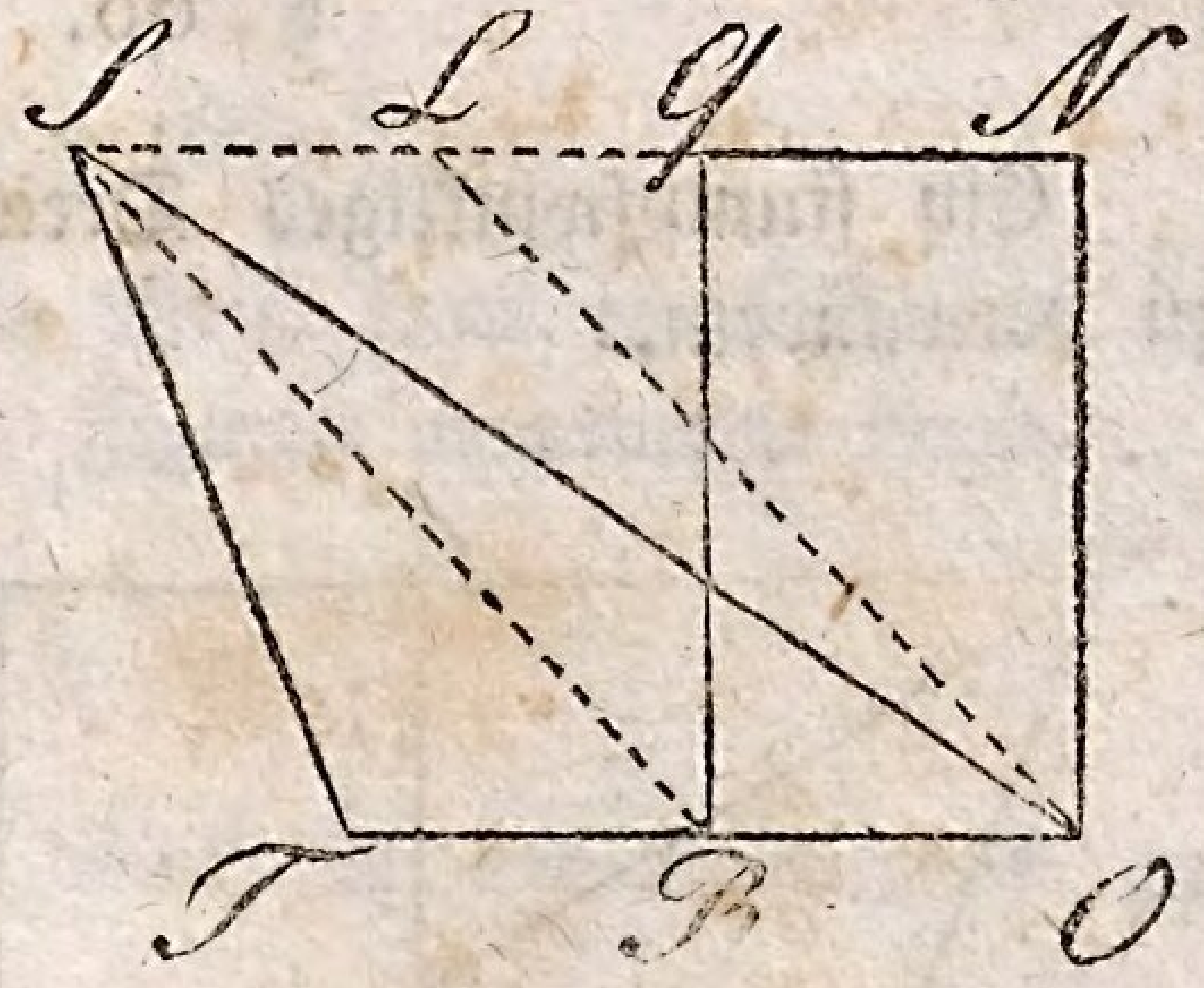
so ist $\triangle ABE = 2 \triangle ABD$

$\triangle ADB = \frac{1}{2} \square ABCD$. Vorb. § 44.

also $2 \triangle ABD = \square ABCD$

$\triangle ABE = \square ABCD$.

Eben so auch ist $\square ONQR = \triangle OST$.



Beweis. $\triangle OST = \triangle OSR + \triangle RST$

$\triangle OSR = \triangle RST$ weil sie gleiche Grundlinien u. Höhen haben.

$\triangle OST = 2 \triangle OSR$

$\triangle OSR = \frac{1}{2} \square OLSR = \frac{1}{2} \square ONQR$

also ist $2 \triangle OSR = \square ONQR$

$\triangle OST = \square ONQR$.

§ 64.

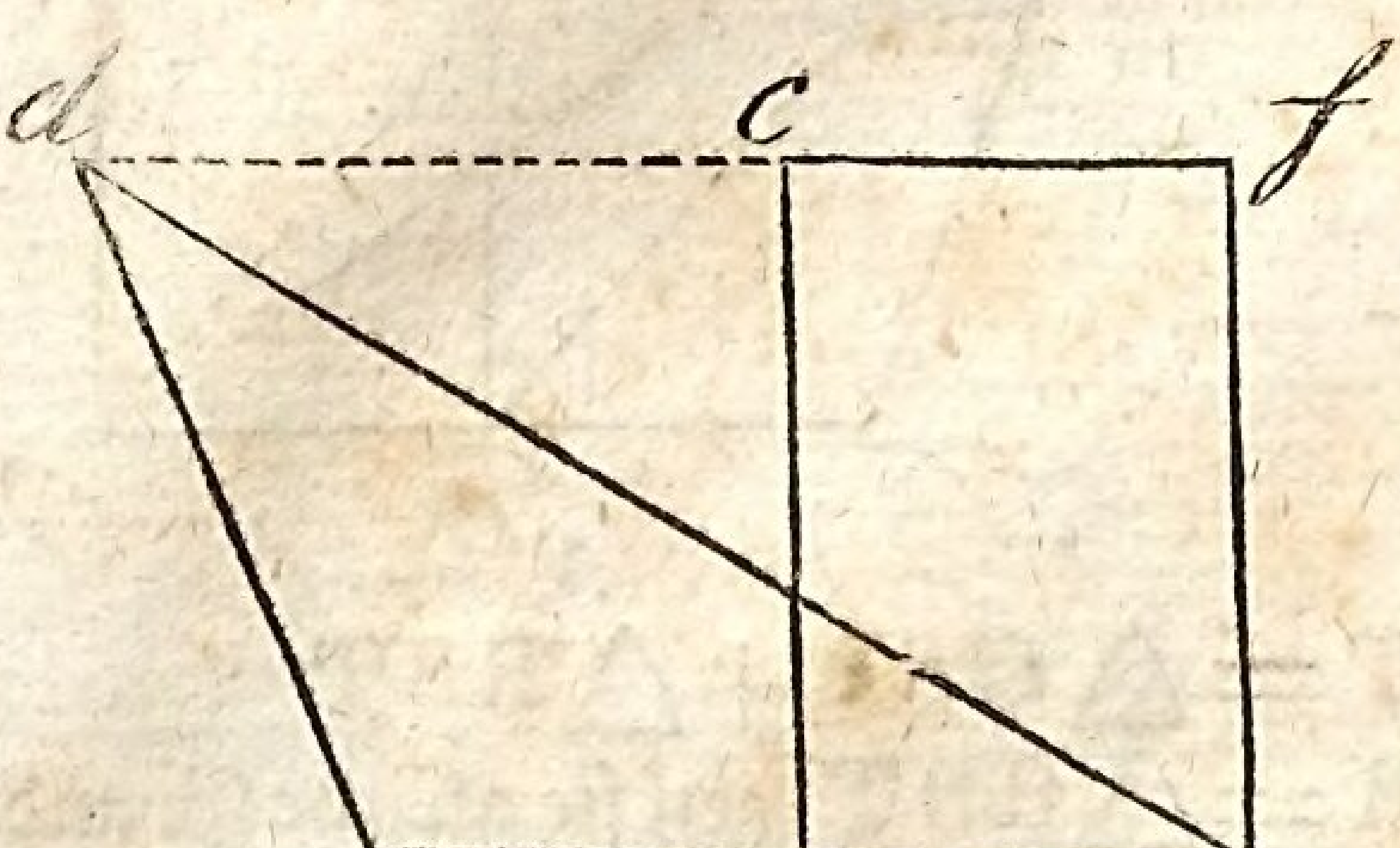
Zusatz. Dieser Lehrsatz dient vorzüglich zur Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm, d. i. in ein Rektangel und in ein Rhomboides *).

§ 65.

Zusatz. Bei allen diesen Verwandlungen wird die Grundlinie des Dreiecks halbirt, darauf durch die Spitze desselben eine Parallellinie mit der Grundlinie gezogen, und auf die halbe Grundlinie wird das verlangte Parallelogramm gesetzt, dessen Höhe bis zu der mit der Grundlinie gezogenen Parallellinie reichen muß.

§ 66.

Ein stumpfwinkliges Dreieck in ein Rektangel zu verwandeln.



Auflösung. Man theilt 1. die Grundlinie ae in b in zwei gleiche Theile. 2. Man ziehet durch die Spitze des Dreiecks ade eine Parallellinie mit der Grundlinie. Und 3. errichtet man auf bc ein Rektangel,

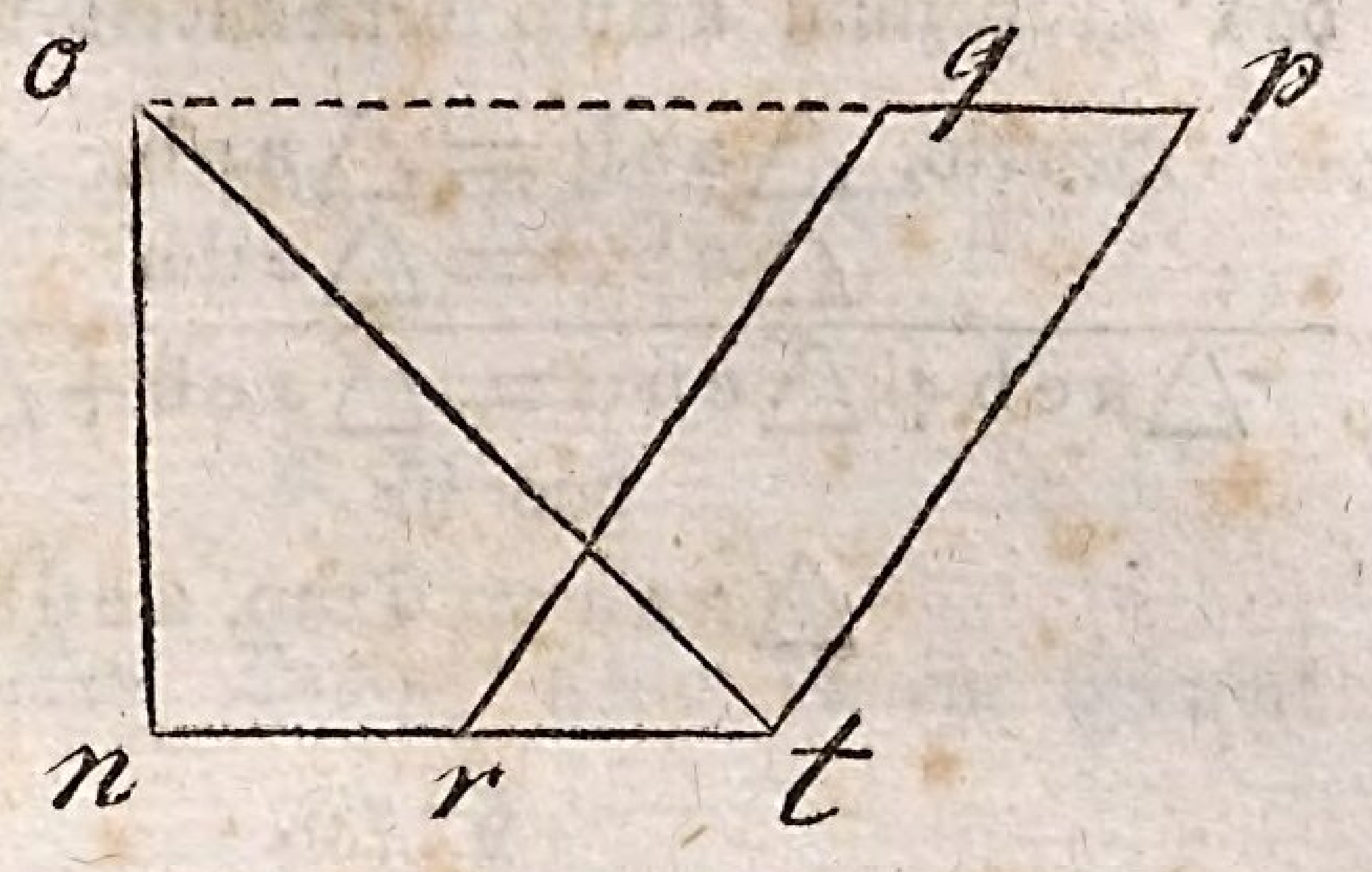
*) Die Verwandlung in ein Quadrat kommt unten vor, und kann durch diesen Lehrsatz nicht ausgeführt werden.

dessen Höhe bis zu der mit der Grundlinie gezogenen Parallellinie d f reicht. Ist dieses geschehen, so ist das Dreieck a d e = dem Rektangel b e f c.

§ 67.

Aufgabe. Das spitzwinklige Dreieck n o t in ein Rhomboides zu verwandeln.

Die Auflösung ist d. vorhergehenden gleich, und nach dieser ist das Dreieck n o t gleich dem Rhomboid. p q r t gemacht.



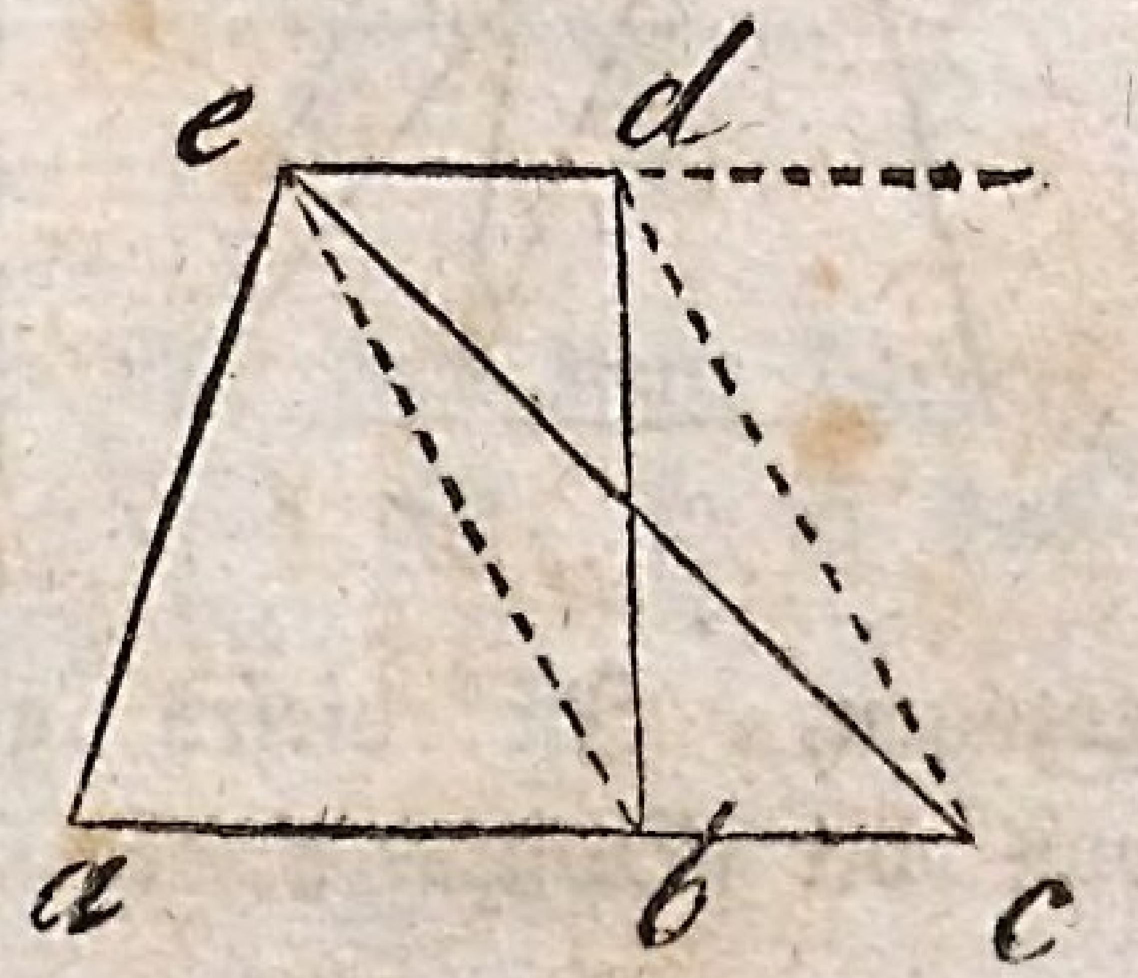
§ 68.

Zusatz. Auf diese Weise kann jedes Dreieck in eine von diesen beiden Figuren verwandelt werden.

§ 69.

Aufgabe. Ein Dreieck in ein Trapezium zu verwandeln.

Auflösung. Da man hierbei einen beliebigen Punkt in der Grundlinie annehmen kann, so kann man auch $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ u. s. w. von der Grundlinie dazu annehmen. In dieser Aufgabe macht ab =



$\frac{2}{3}$ von der Grundlinie des Trapeziums aus. Nach dem Punkte b ist hierauf aus der Spitze e des Dreiecks aec eine Linie gezogen, und mit dieser ist durch den Endpunkt der Grundlinie die Hülfs-Parallellinie cd gezogen, wodurch die mit der Grundlinie gezogene Parallellinie ed in d geschnitten wird. Von diesem Punkte d ist hierauf die Linie db gezogen, wodurch das Dreieck aec in das Trapezium aedb verwandelt worden ist.

Beweis. $\triangle aeb = \triangle aeb$
$\triangle ebc = \triangle edb$

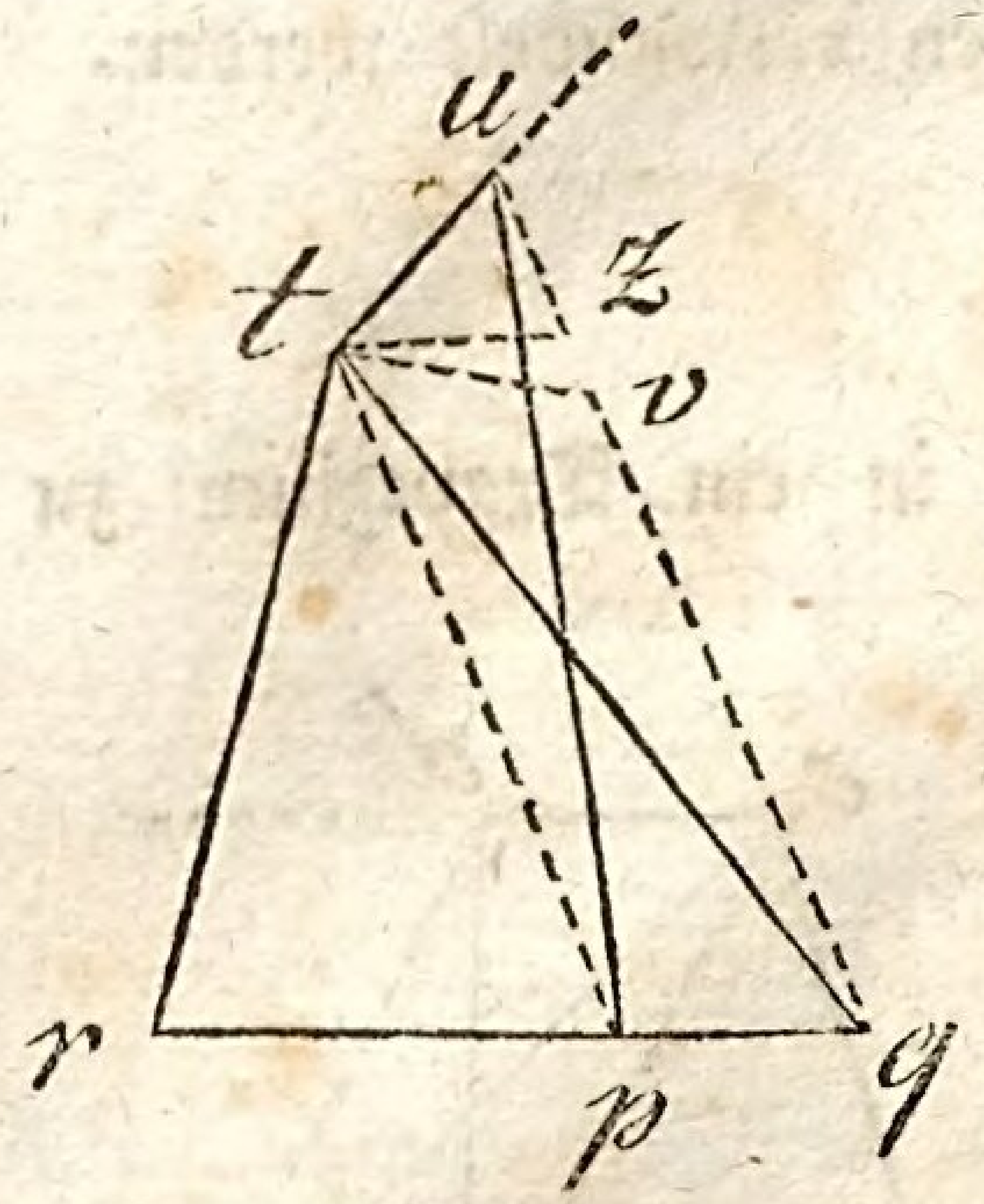
$$\triangle aeb + \triangle ebc = \triangle aeb + \triangle edb$$

das ist

$$\triangle aec = \text{Trap. } aedb.$$

§ 70.

Aufgabe. Ein Dreieck in ein Trapezoides zu verwandeln.



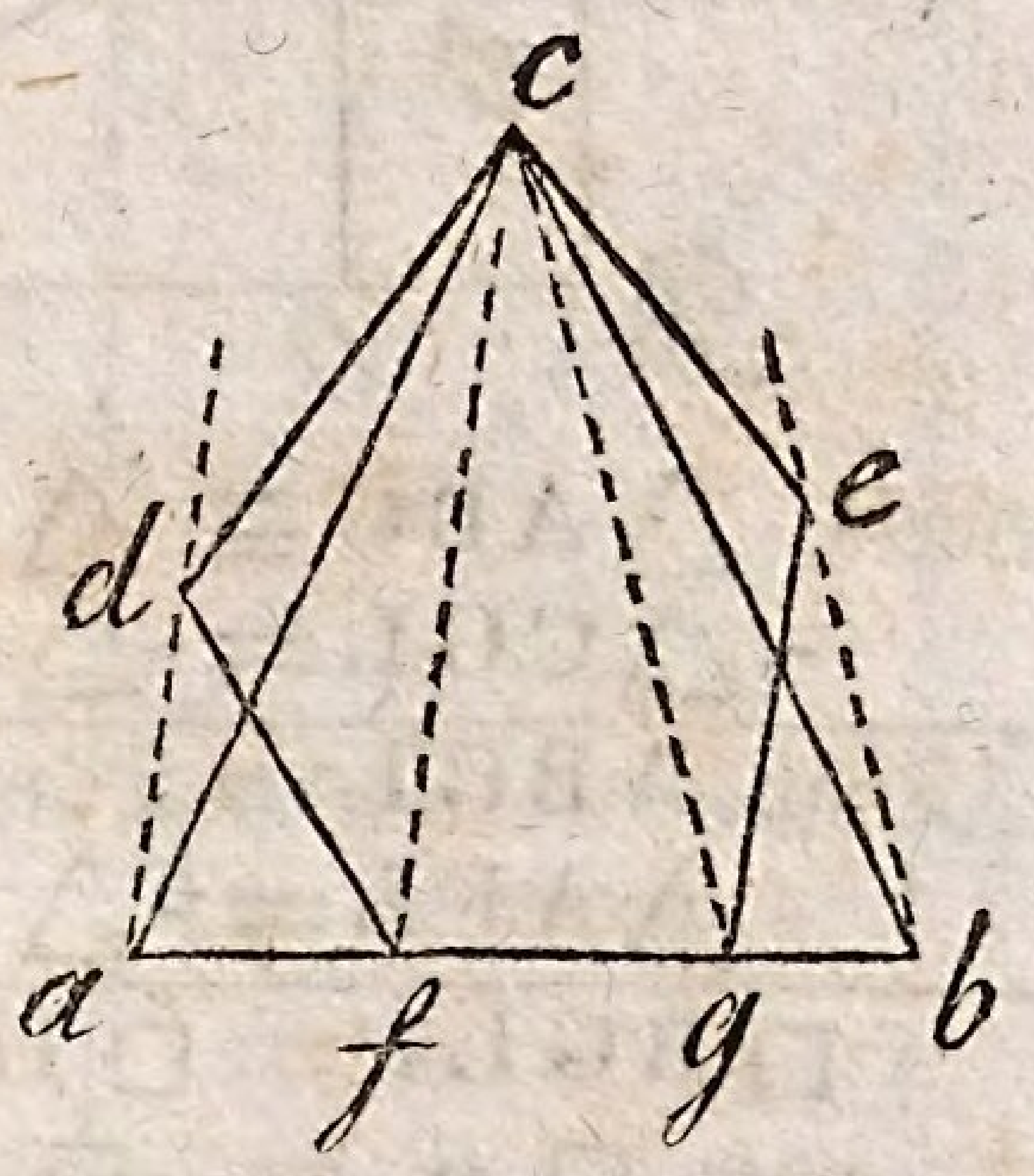
Auflösung. Auch bei dieser Aufgabe nimmt man einen beliebigen Punkt in der Grundlinie an, wie hier in p. Nach diesem ziehet man von der Spitze t des Dreiecks rtq eine gerade Linie tp, und mit dieser wird ebenfalls, wie vorhin, eine Hülfsparallellinie durch den Endpunkt q der Grundlinie des Dreiecks rtq gezogen. Ist dieses geschehen, so ziehet man von der Spitze t des Dreiecks rtq eine gerade

Linie entweder nach u, oder nach v; und von einem dieser Punkte wird eine gerade Linie nach p gezogen. Ziehet man diese von u nach p, so ist das Dreieck rtq = Trapezoides rtup — und ziehet man sie von v nach p, so ist das Dreieck rtq = Trapezoides rtvp. Und würde man diese Linie parallel mit der Grundlinie ziehen, wie es mit tz geschehen ist, so würde das Dreieck rtq = dem Trapezium rtzp sein.

Der Beweis ist dem vorhergehenden gleich.

§ 71.

Aufgabe. Das Dreieck abc in ein Fünfeck zu verwandeln.



Auflösung. Man nehme 1. auf der Grundlinie zwei beliebige Punkte an, und ziehe 2. nach denselben die Linien cf und cg. Mit diesen Linien ziehe man 3. Hülfsparallellinien durch die Endpunkte der Grundlinie. In diesen Linien nehme man 4. beliebig einen Punkt an, wie solches in d und e geschehen ist, und ziehe darauf die Linien cd und df, ce und eg, so ist das Dreieck acb = dem Fünfecke fdceg.

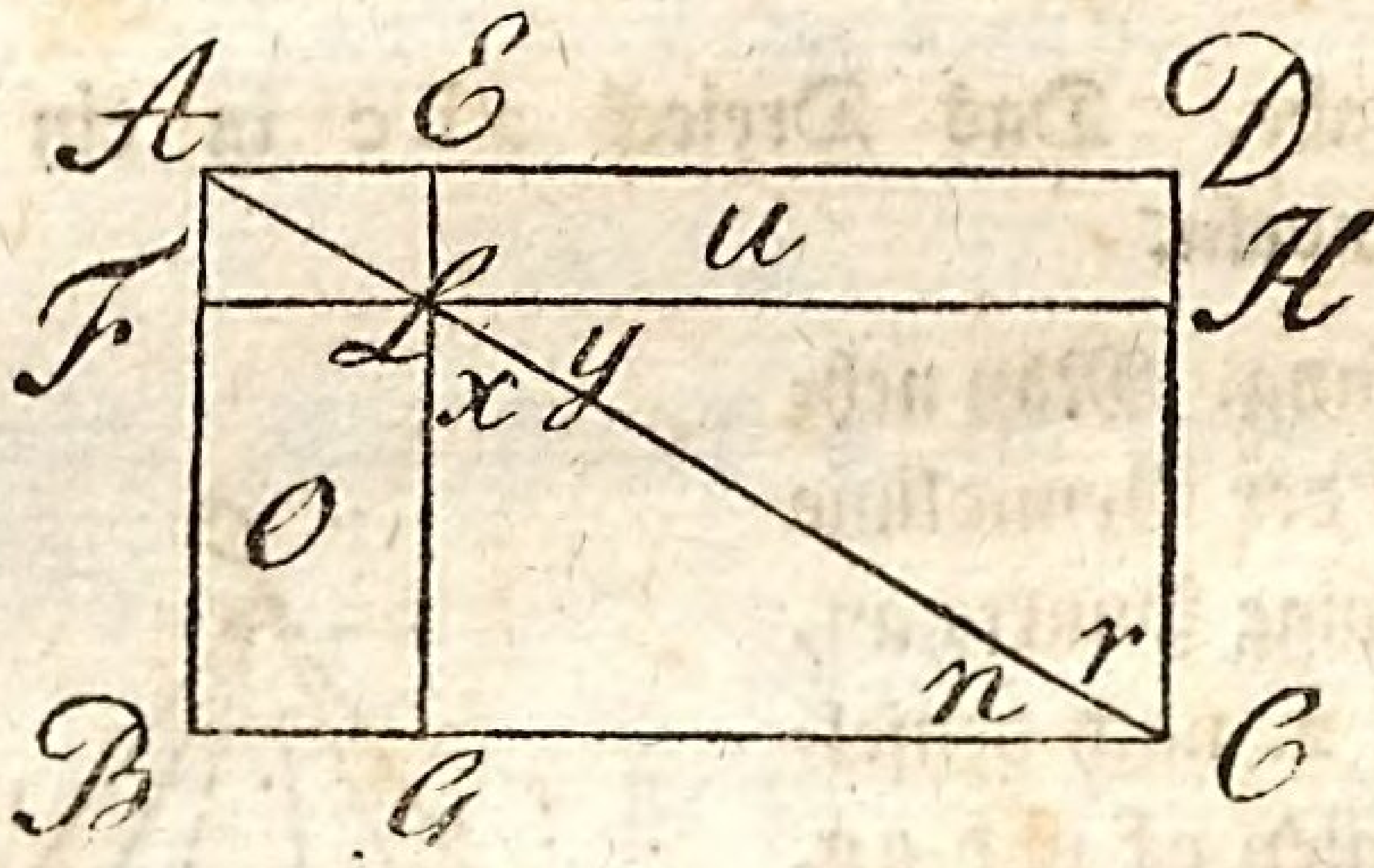
Der Beweis wie im 1sten Abschnitte § 60.

§ 72.

Zusatz. Da sich jedes Parallelogramm in ein Dreieck verwandeln läßt, so läßt es sich auch, durch Hülfe eines Dreiecks, in ein Trapezium, Trapezoides und in ein Vieleck verwandeln.

§ 73.

Lehrsatz. Wenn man durch einen Punkt in der Diagonallinie eines Parallelogramms Parallellinien mit den Seiten zieht, so entstehen 4 Parallelogramme, von welchen diejenigen sich gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht gehet. Es muß demnach bewiesen werden, daß □ o = □ u sei.



Beweis. △ABC ≅ △ADC. Vorbericht § 44.
-△CGL = -△CHL *

Trap. ABGL = Trap. HDAL
-△AFL = -△ALE

□ BGLF = □ HDEL
oder □ o = □ u

* LC = LC
x = r
n = y

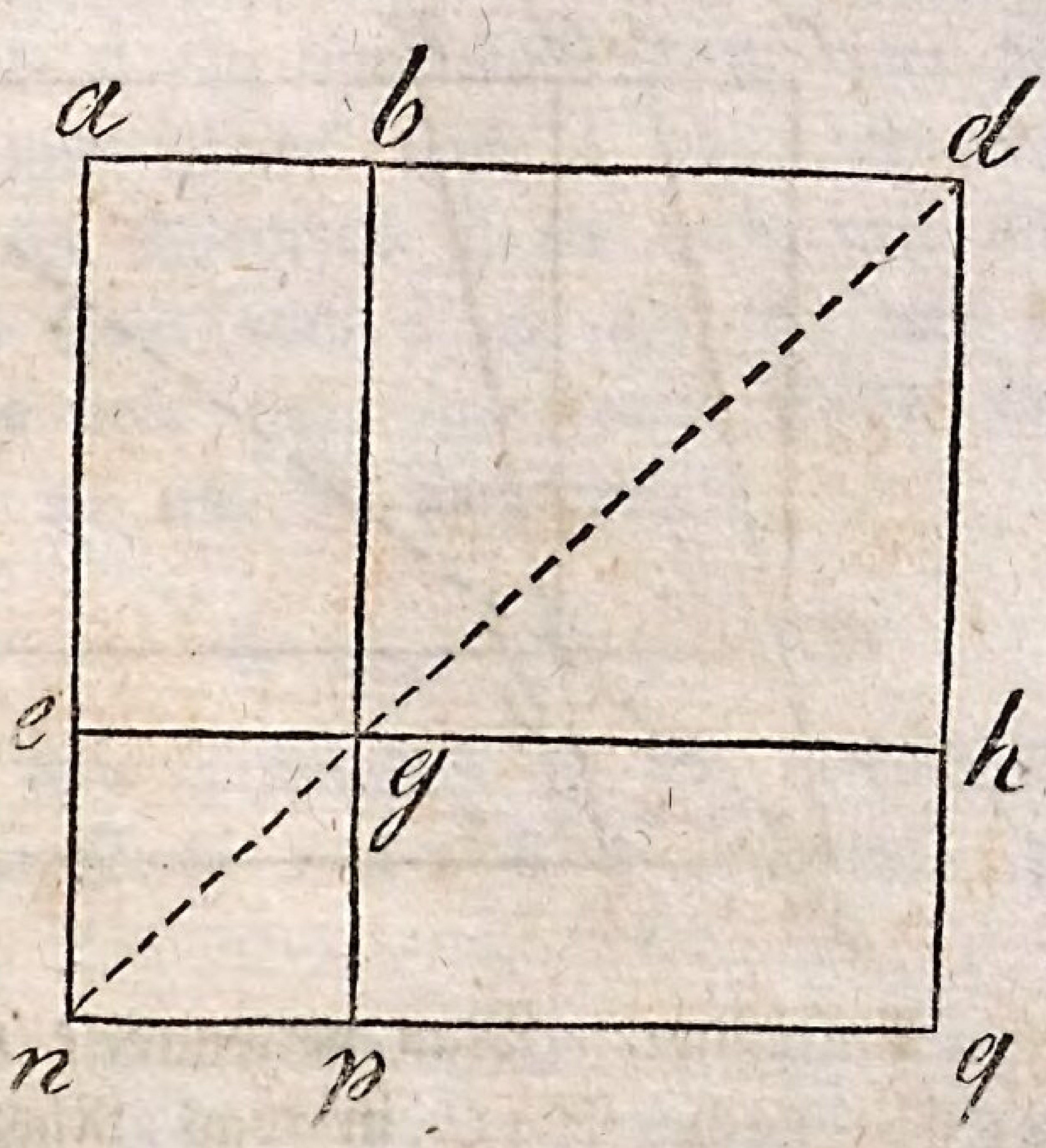
△CGL ≅ △CHL. Nach dem 4ten Satze § 19.

§ 74.

Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes beliebiges, wozu eine Seite gegeben worden ist. Und da man jede vierseitige und vielseitige Figur in ein Dreieck und dieses wieder in ein Parallelogramm verwandeln kann, so kann man auch jede vierseitige und vielseitige Figur in ein Rektangel oder Rhomboides mit einer beliebigen Seite und im letztern Falle auch mit einem beliebigen Winkel verwandeln.

§ 75.

Aufgabe. Ein Rektangel *) in ein anderes, woran sich eine Seite von 1° 8′ 9″ befindet, zu verwandeln.



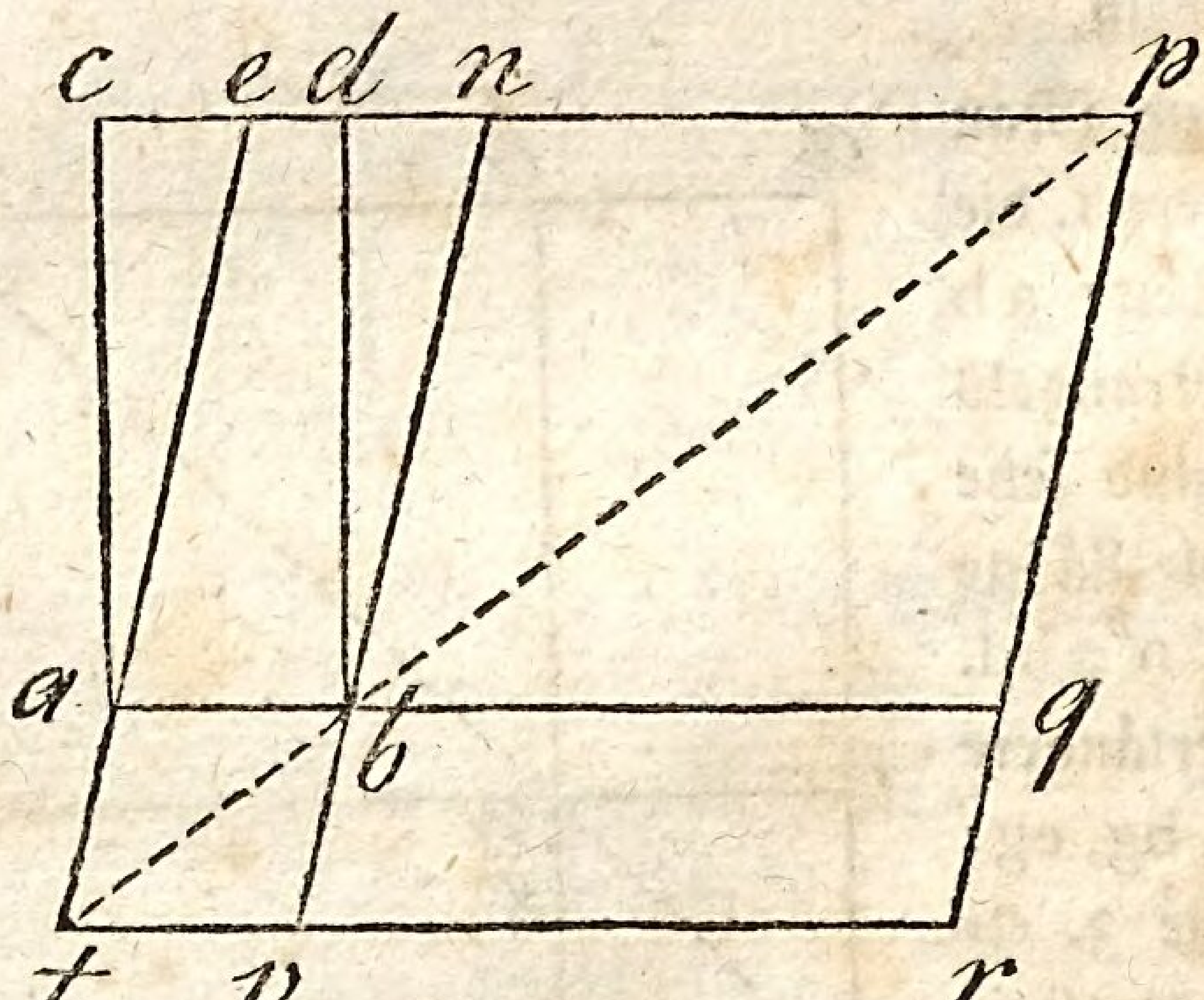
Auflösung. Man verlängere 1. die obere Seite ab des Rektangels abeg und setze daran die Länge von 1° 8′ 9″ = bd. 2. Verlängere man ae, bg, eg; und ziehe 3. eine Diagonallinie dn; da, wo alsdann diese die verlängerte Linie ae durchschneidet, ist der Punkt,

*) Da dieses auch ein Quadrat sein kann, so kann man auch nach dieser Aufgabe jedes Quadrat in ein Rektangel

durch welchen eine Parallellinie mit eh gezogen wird. Hierauf ziehe man endlich 4. eine Parallellinie dq mit bp. Ist dieses geschehen, so entstehet dadurch das Parallelogramm gpqh, wovon die Seite gh = bd, und welches dem gegebenen Parallelogramme abge, nach dem letzten Lehrsatze, gleich ist, indem die Diagonallinie dn, welche das Parallelogramm adqn in zwei gleiche Theile theilt, nicht durch diese Parallelogramme gehet.

§ 76.

Aufgabe. Ein Rektangel in ein Rhomboides zu verwandeln, woran sich eine Seite von 2° 4″ befindet, und worin ein Winkel von 76° ist.



Auflösung. Man verwandele 1. das Rektangel acdb nach § 41 in das Rhomboides aenb. Hierauf trage man 2. an die obere verlängerte

---

mit einer Seite, und auch in ein Rhomboides mit einer beliebigen Seite und beliebigem Winkel verwandeln.

Seite des Rhomboides 2° 4″ = np; und verlängere 3. alle Seiten ae, nb, ab dieser Figur, und ziehe 4. die Diagonallinie pt; da, wo alsdann diese die verlängerte Seite ae in t durchschneidet, ist der Punkt, durch welchen die Parallellinie tr mit aq gezogen werden muß. Ist hierauf auch pr parallel mit nv gezogen, so ist das Rhomboides vbqr = dem Rhomboides aenb, welches = dem gegebenen Rektangel acdb ist, und welches die verlangten Stücke hat, indem die Seite bq = np, und der Winkel v = b = a = 76° ist.

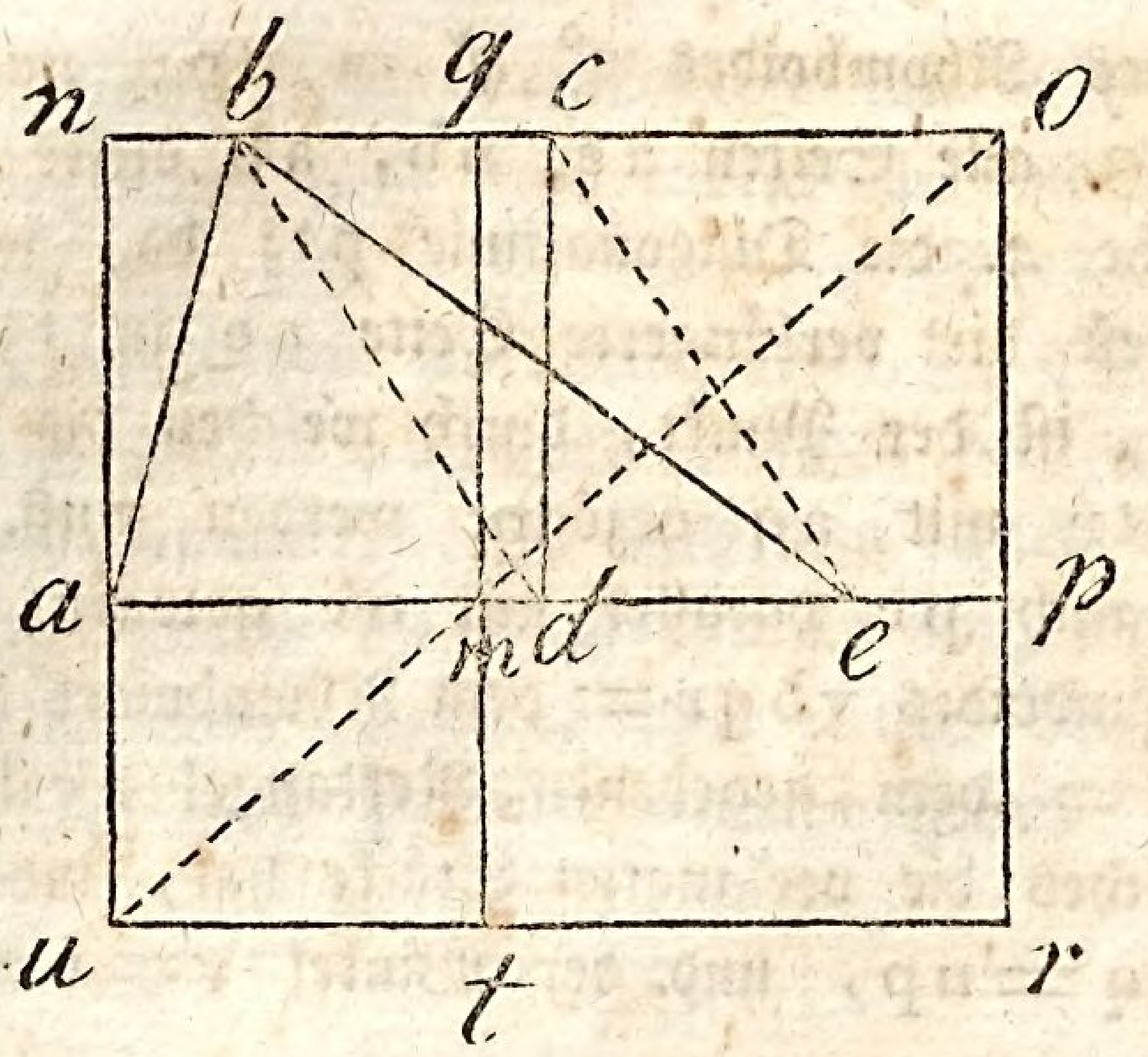
§ 77.

Zusatz. Auf eben diese Weise wird ein Quadrat 1. in ein Rektangel mit einer gegebenen Seite nach § 75, und 2. ein Rhomboides mit einer gegebenen Seite und Winkel nach § 76, und eben so wird auch ein Rhombus in ein Rektangel mit einer gegebenen Seite nach § 42 und 76, und in ein Rhomboides mit einer gegebenen Seite und Winkel nach § 41 und 76 verwandelt.

§ 78.

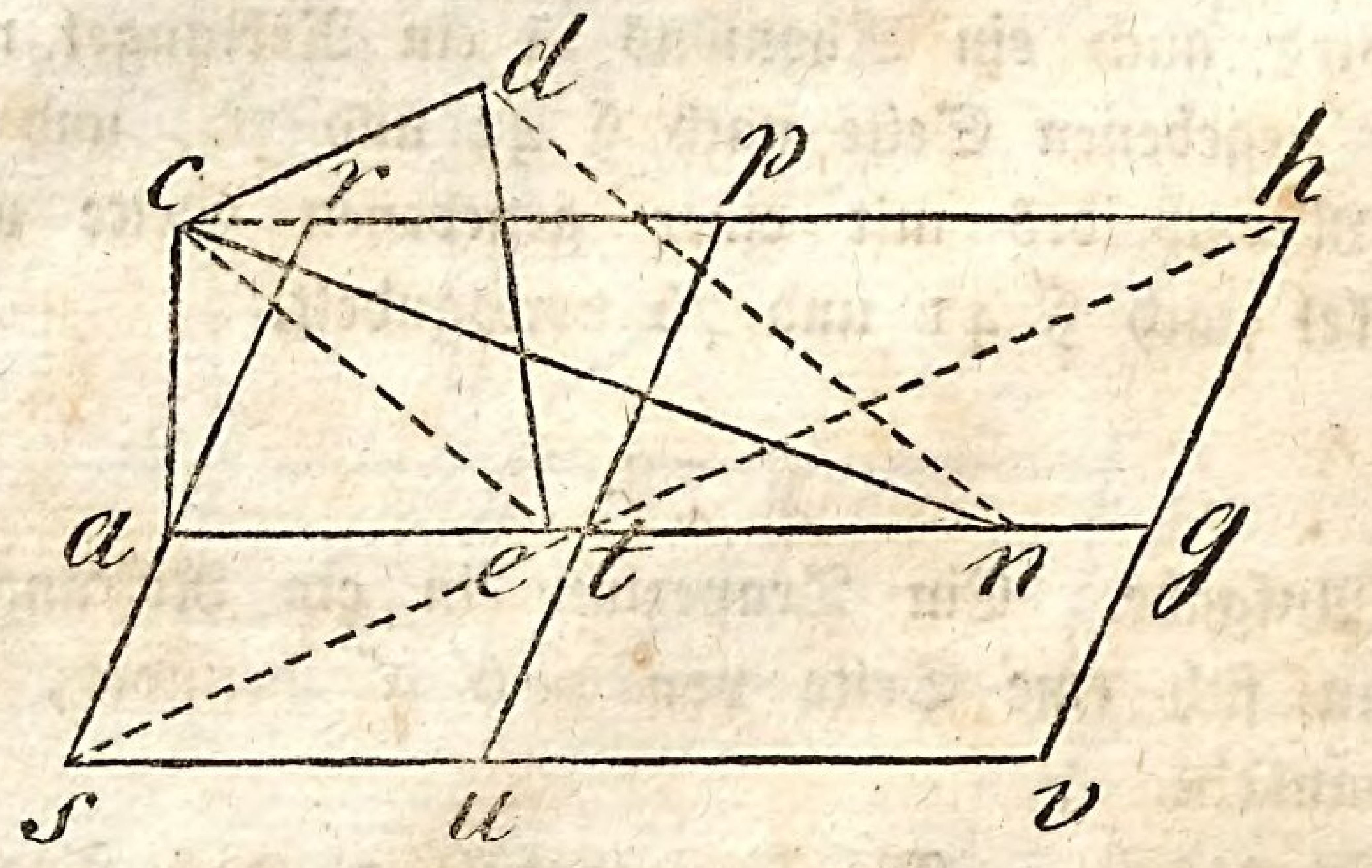
Aufgabe. Ein Trapezium in ein Rektangel, woran sich eine Seite von 1° 6′ 4″ befindet, zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandele 1. das Trapezium abcd in das Dreieck abe nach § 57; 2. dieses Dreieck in das Rektangel anqm nach § 65 und dies Rektangel nach § 75 in das verlangte Rektangel mprt. S. Fig. auf folg. Seite.



§ 79.

Aufgabe. Ein Trapezoides in ein Rhomboides mit einem Winkel von 66° und einer Seite von 2° 6″ zu verwandeln.

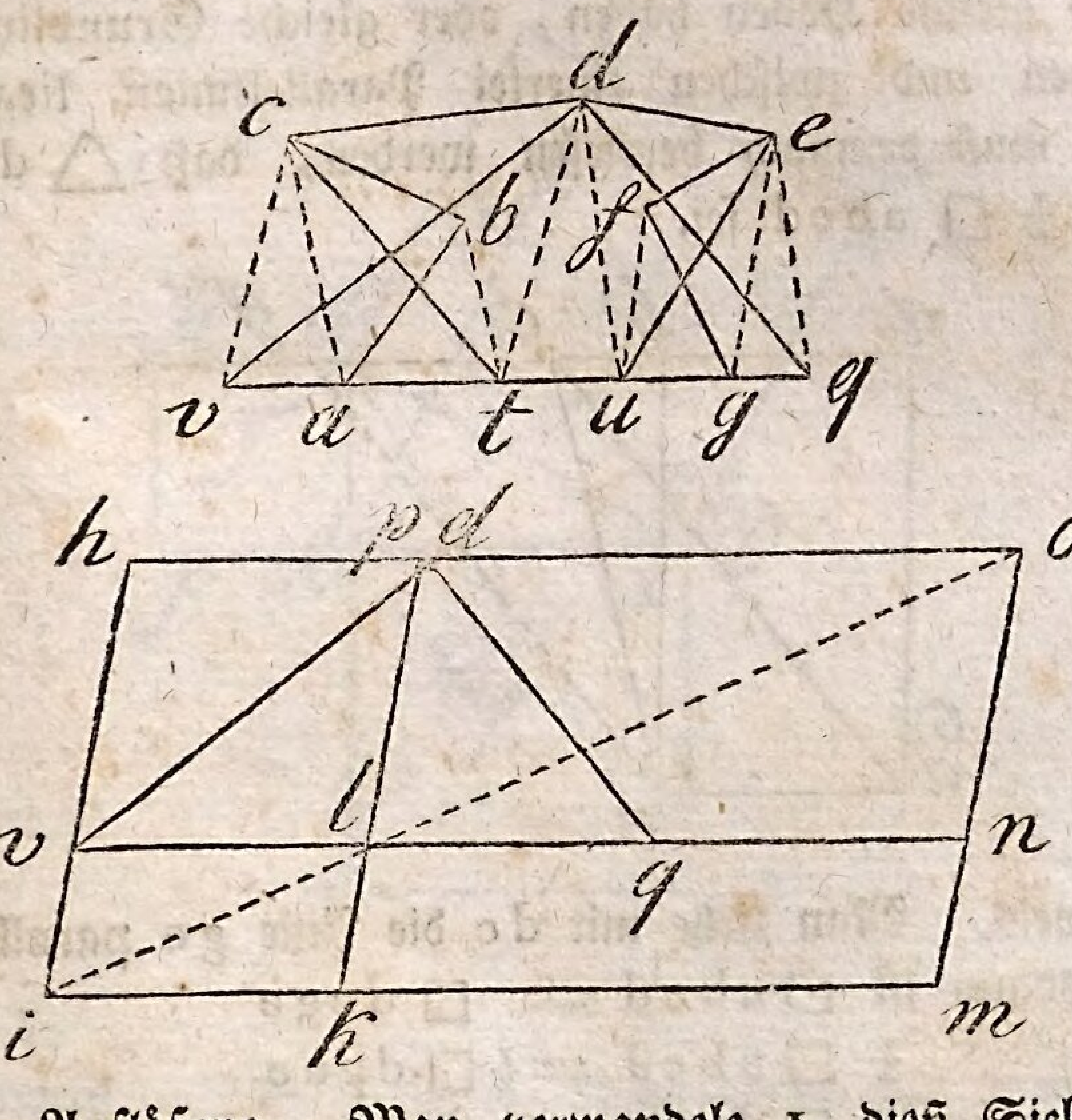


Auflösung. Man verwandele 1. das Trapezoides a c d e in das Dreieck a c n nach § 58. 2. Dies Dreieck in das Rhomboides a r p t mit dem Winkel von 66° nach § 67. 3. Dies Rhom=

boides in das verlangte Rhomboides tuvg nach § 76, woran $tg = 2° 6''$ und der $\angle u = 66°$ ist.

§ 80.

Aufgabe. Ein Siebeneck in ein Rhomboides, worin sich ein Winkel von 78° und eine Seite von $2° 4' 6''$ befindet, zu verwandeln.



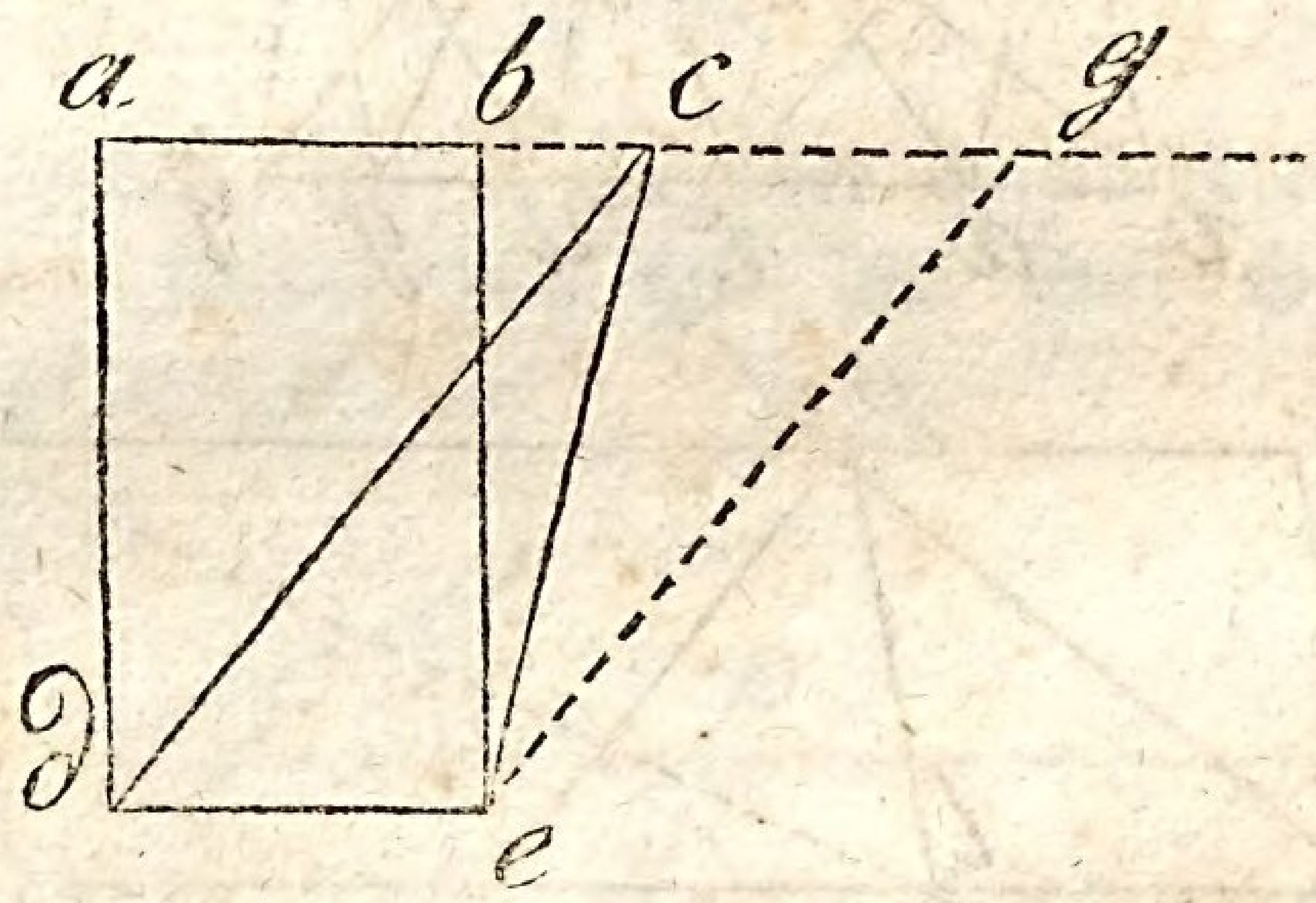
Auflösung. Man verwandele 1. dieß Siebeneck abcdefg in das Dreieck vdq nach § 61. 2. Dies Dreieck in das Rhomboides vhpl mit dem Winkel von 78°, und endlich 3. dies Rhomboides mit der Seite von $2° 4' 6''$ nach § 76 in das Rhomboides klnm, worin $km = 2° 4' 6''$ und $\angle k = 78°$ ist.

§ 81.

Zusatz. Auf diese Weise kann jedes Vieleck in ein beliebiges Rektangel oder Rhomboides verwandelt werden.

§ 82.

Lehrsatz. Ein Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramme, wenn beide gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, oder gleiche Grundlinien haben und zwischen einerlei Parallellinien liegen. Es muß demnach bewiesen werden, daß △ dec = ½ □ abed sei.



Beweis. Man ziehe mit dc die Linie ge parallel, alsdann ist □ abed = □ dcge

½ □ abed = ½ □ dgce

aber ½ □ dgce = △ dec.

△ dec = ½ □ abed.

§ 83.

Lehrsatz. Das Quadrat der Hypothenuse ist am Raume so groß als die Quadrate der beiden

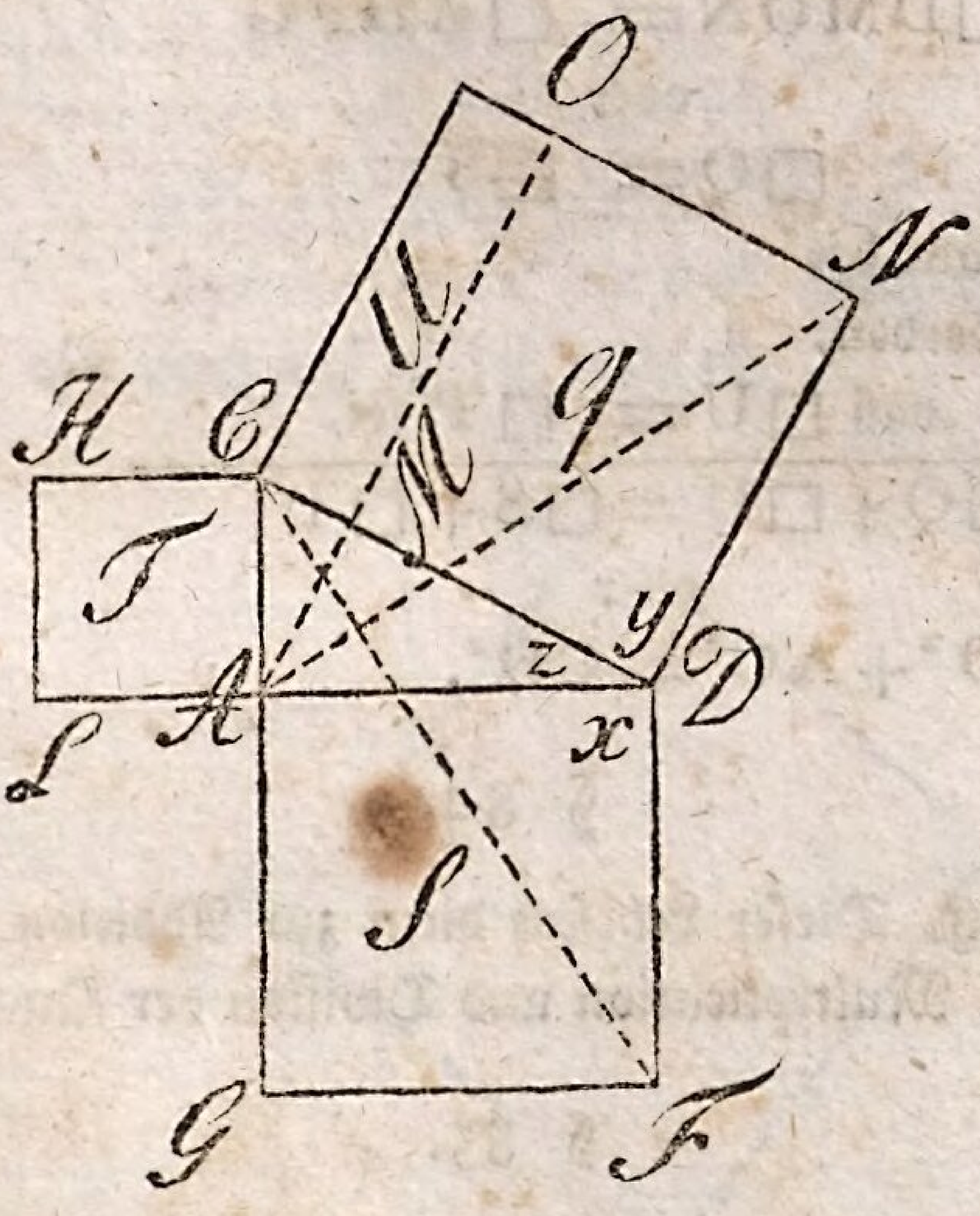
Catheten. Dieser Lehrsatz heißt von seinem Erfinder der Pythagoräische und wegen seiner Wichtigkeit in der Mathematik: magister matheseos.

Es muß demnach bewiesen werden,

daß $CD^2 = AC^2 + AD^2$

oder

$CD^q = AC^q + AD^q$ sei.



Beweis. Man ziehe die Linien AN und CF,

so ist $\triangle ADN \cong \triangle CDF$

denn $AD = DF$ warum?

$DN = CD$ warum?

$y + z = z + x$.

$\triangle ADN \cong \triangle CDF$ nach dem 4ten Satze § 19.

Nun ist $\triangle ADN = \frac{1}{2} \square DMNO$. Nach § 82 weil sie gleiche Grundlinien ND haben u. zwischen einerlei Parallellinien AO u. ND liegen.

Eben so ist $\triangle CDF = \frac{1}{2} \square ADFG$ nach § 82.

also $\frac{1}{2} \square DMON = \frac{1}{2} \square ADFG$

und $\square DMON = \square ADFG$

oder

$\square Q = \square S$

Eben so kann bewiesen werden,

daß $\square U = \square T$ sei,

also $\square Q + \square U = \square S + \square T$

oder

$AD^2 + AC^2 = CD^2$.

§ 84.

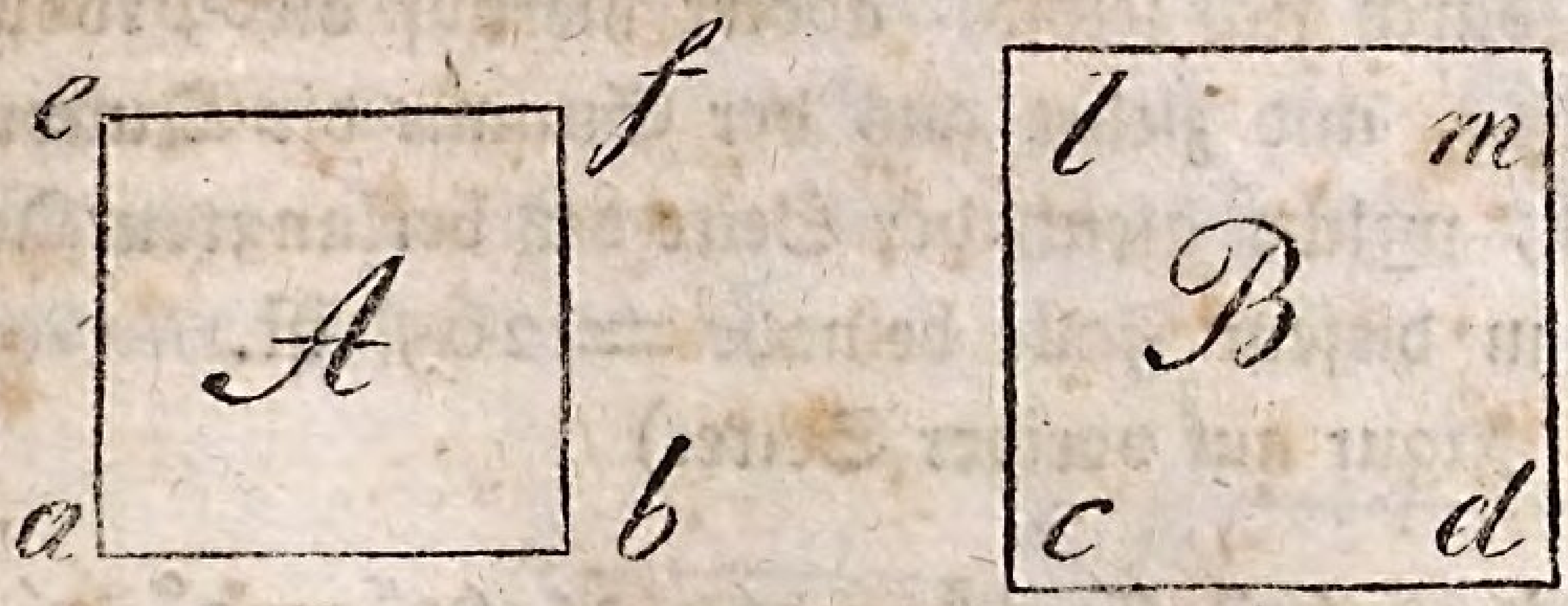
Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Addition, Subtraction, Multiplication und Division der Quadrate.

§ 85.

Aufgabe. Zwei Quadrate zusammen zu addiren, wovon die Seite des einen Quadrats $= 1^{\circ}\ 6'\ 9''$ und die des andern $= 2^{\circ}\ 0'\ 4''$ ist.

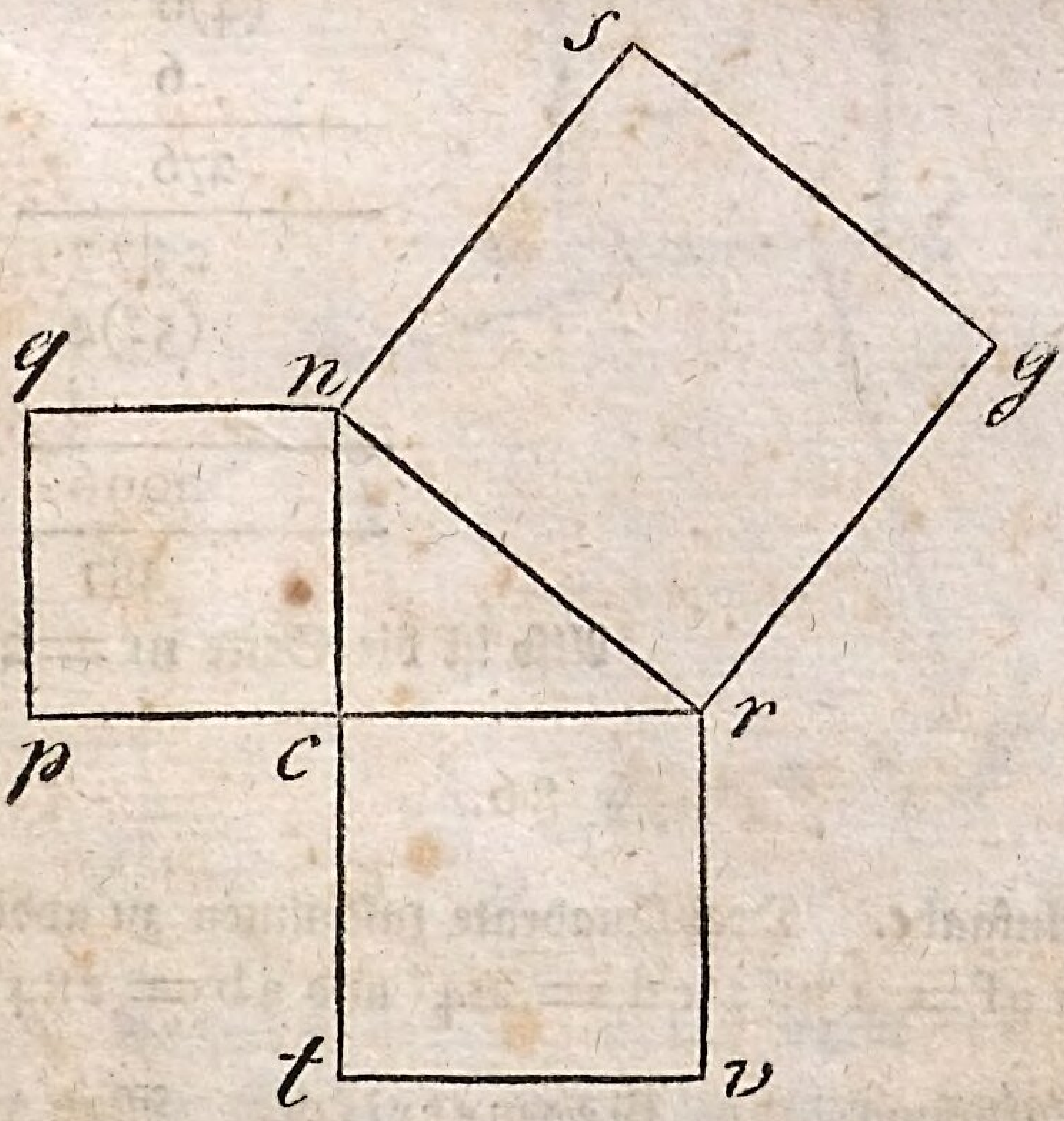
Auflösung. 1. Geometrisch. Man fasse mit dem Zirkel von jedem Quadrate eine Seite, und setze solche rechtwinklig an einander und ziehe darauf die Hypothenuse; Auf diese Weise ist an dem rechtwinkligen Dreiecke $cr = cd$; $nc = ab$

und nr = der Seite des verlangten Quadrats, welches so groß als □A + □B ist.



Beweis. $ab = nc$ also $ab^2 = nc^2$ *)
$cd = cr$ — $cd^2 = cr^2$.

Also $ab^2 + cd^2 = nc^2 + cr^2$
aber $nc^2 + cr^2 = nr^2$. Nach dem § 83,
also auch $ab^2 + cd^2 = nr^2$.



*) Wenn die Seiten bei zwei Quadraten sich gleich sind, so sind auch die Quadrate sich gleich.

2. Arithmetisch. Man erhebt die Seite eines jeden Quadrats zum Quadrate, d. h. man multiplizirt sie durch sich selbst, addirt hierauf die Produkte zusammen, und ziehet aus der Summe die Quadrat-Wurzel, welche gleich der Seite des verlangten Quadrats, in diesem Falle beinahe $= 265''$ ist.
(Siehe Figur auf voriger Seite.)

Es ist $ab = 169''$ also $ab^2 = 169'' \times 169'' = 2^\circ\, 85'\, 61''$

$cd = 204''$ also $cd^2 = 204'' \times 204'' = 4^\circ\, 16'\, 16''$

daher $nr^2 = 28561'' + 41616''$

und $nr = \sqrt{7|01|77|264''}$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 3|01 \\ (4)6 \\ 6 \\ \hline 276 \\ \hline 25|77 \\ (52)4 \\ 4 \\ \hline 2096 \\ \hline 481 \end{array}$$

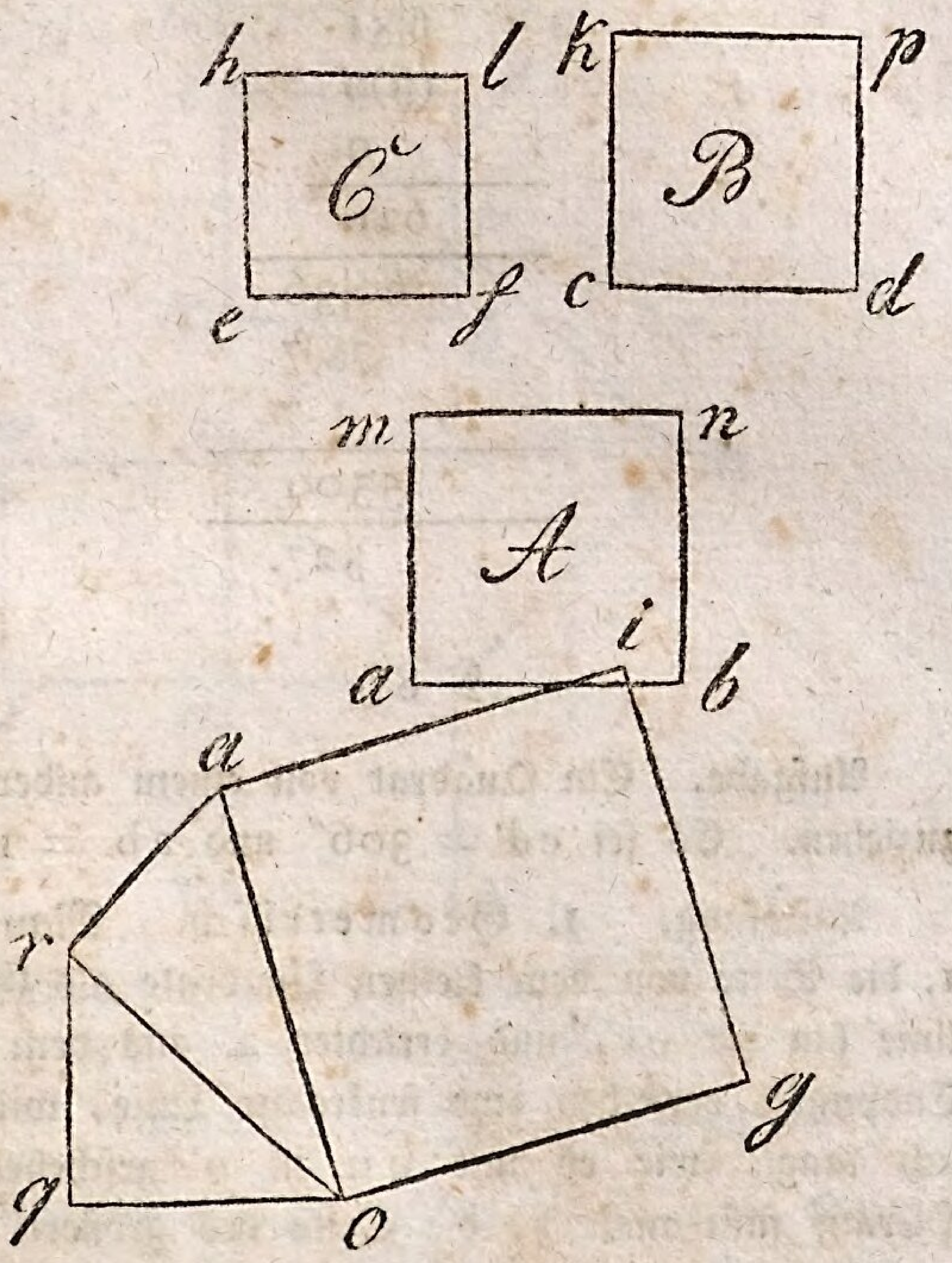
Also ist die Seite $nr = 264''$

§ 86.

Aufgabe. Drei Quadrate zusammen zu addiren. Es sei $ef = 178''$; $cd = 214''$ und $ab = 284''$.

Auflösung. 1. Geometrisch. Man setzt 1. nach der vorhergehenden Aufgabe ab und cd rechtwinklig zusammen und ziehet die Hypethenuse

r o, woran das Quadrat gleich den beiden Quadraten A und B ist. Hierauf setzt man 2. auf o r die Seite des 3ten Quadrats e f und ziehet die Hypothenuse a o welche gleich der Seite des verlangten Quadrats, das so groß als alle drei Quadrate zusammen ist.



2. Arithmetisch. Man erhebt die Seite eines jeden Quadrats zum Quadrate, addirt ihre Produkte zusammen, und ziehet aus der Summe die Quadratwurzel = 397″.

Es ist $ef = 178''$; $ef^2 = 31684''$
„ „ $cd = 214''$; $cd^2 = 45796''$
„ „ $ab = 284''$; $ab^2 = 80656''$

$$ab^2 + cd^2 + ef^2 = ao^2 = 15^\circ 81' 36''$$

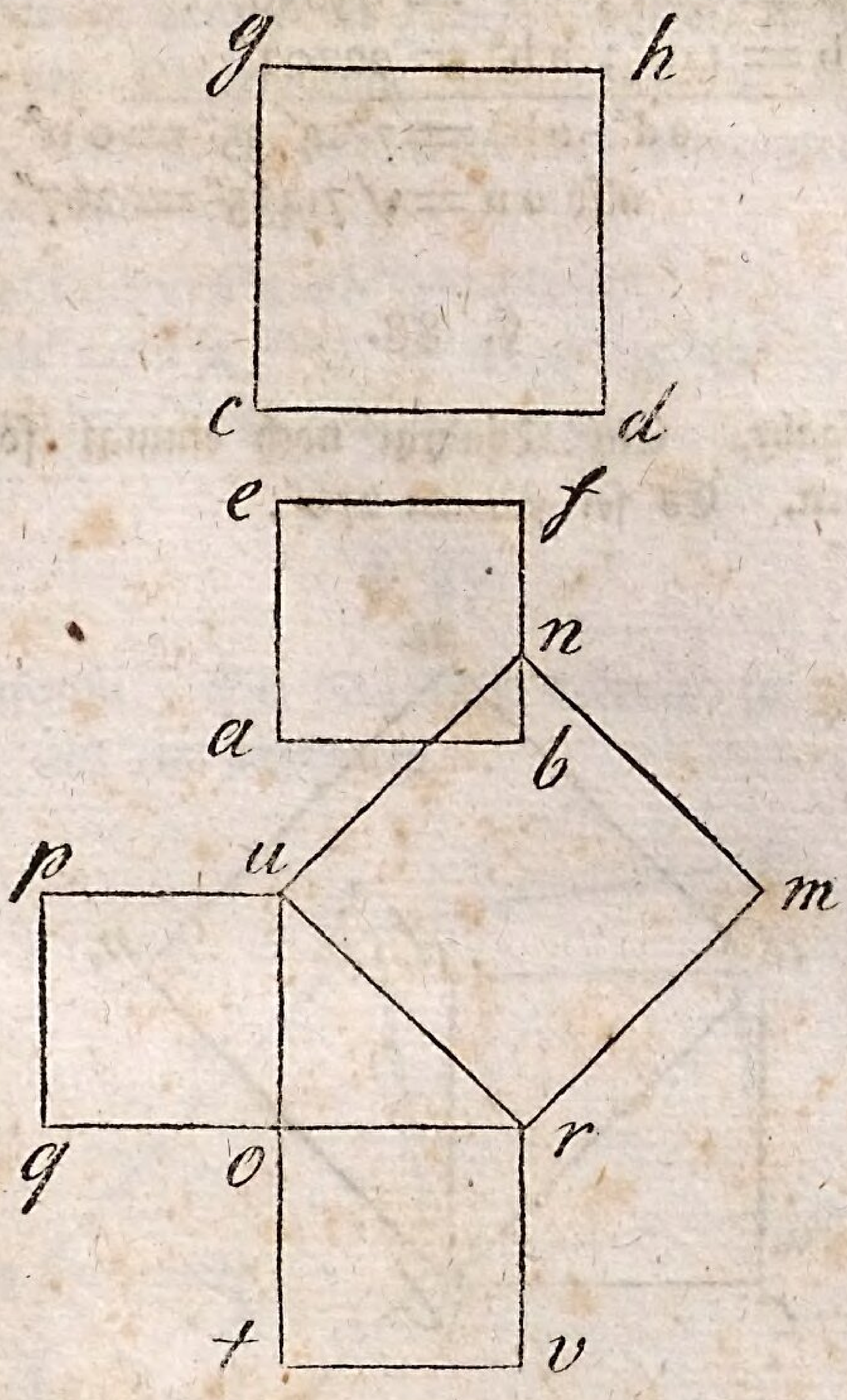
also $ao = \sqrt{15|81|36|397''}$

```
 15|81|36|397"
  9
 ----
  6|81
 (6)9
    9
 -----
   621
 -------
   60|36
   (78)7
       7
 -------
    5509
 -------
     527.
```

§ 87.

Aufgabe. Ein Quadrat von einem andern abzuziehen. Es sei $cd = 306''$ und $ab = 149''$.

Auflösung. 1. Geometrisch. Man setzt 1. die Seite von dem kleinen Quadrate als Grundlinie hin = or, und errichtet 2. aus dem einen Endpunkte derselben eine senkrechte Linie, willkührlich lang, wie es mit ou in o geschehen ist. Hierauf faßt man 3. die Seite des größern Quadrats, und setzt solche aus dem Punkte r nach u als Hypothenuse hin; wodurch der Punkt u und zugleich die Länge von ou, welche die Seite des verlangten Quadrats ist, bestimmt werden.
(Siehe Fig. auf folg. Seite.)



Beweis. $cd = ru;\ cd^2 = ru^2$

$ab = or;\ ab^2 = or^2$

also $cd^2 - ab^2 = ru^2 - or^2 = ou^2$

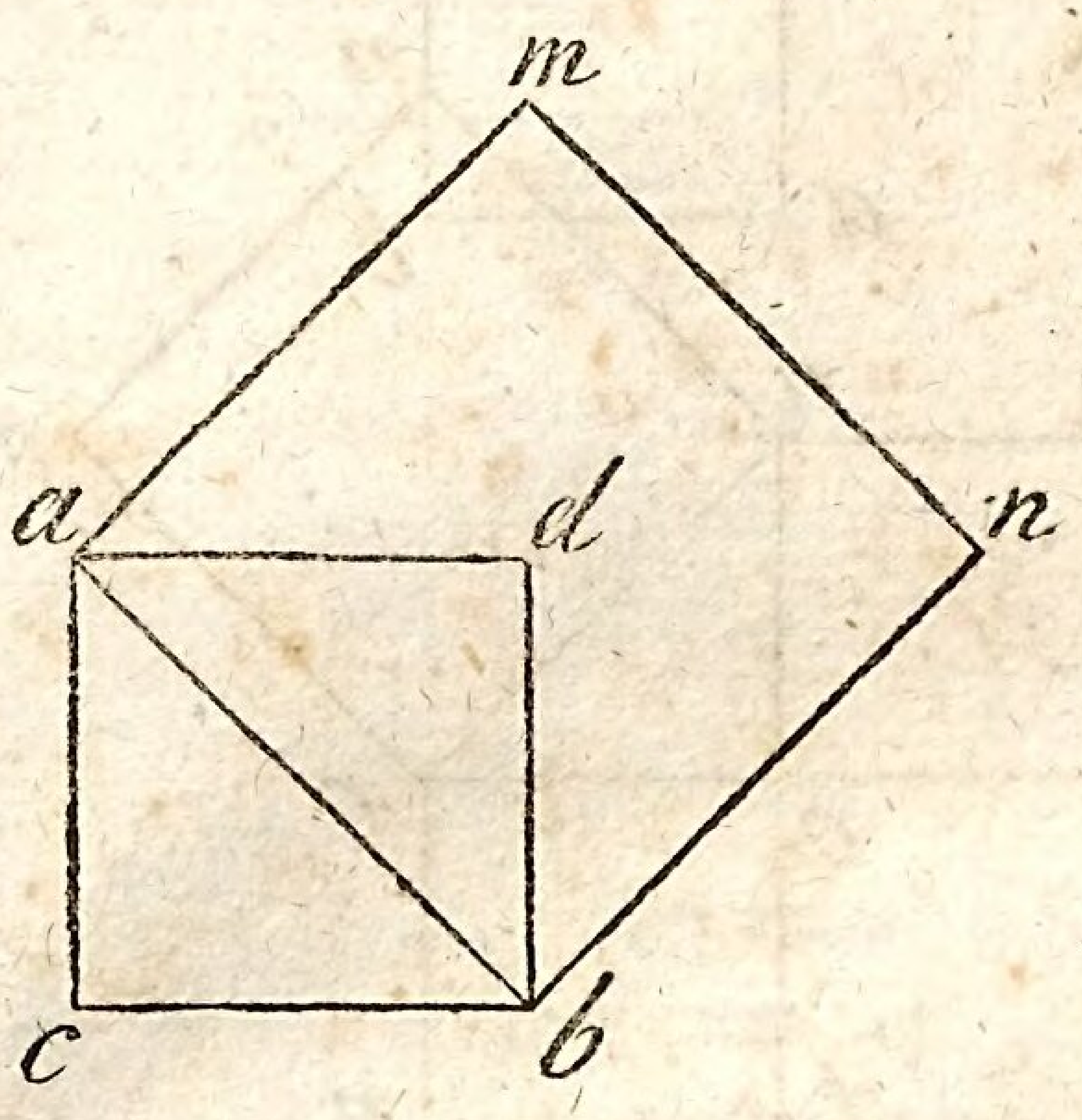
2. Arithmetisch. Man erhebt 1. die Seite eines jeden gegebenen Quadrats zum Quadrate, 2. ziehet man das kleinere von dem größern ab, und 3. ziehet man aus der Differenz die Quadratwurzel, welche gleich der Seite des verlangten Quadrats, und in diesem Falle = 267″ ist.

Es ist $cd = 306''$; $cd^2 = 93636''$
und $ab = 149''$; $ab^2 = 22201''$

$$cd^2 - ab^2 = 7^\circ 14' 35'' = ou^2$$
$$\text{also } ou = \sqrt{71435''} = 267''$$

§. 88.

Aufgabe. Ein Quadrat noch einmal so groß zu machen. Es sei $cb = 276''$.



Auflösung. 1. Geometrisch. Man ziehe die Diagonallinie ab, so ist das Quadrat, welches hierauf errichtet wird, noch einmal so groß als das gegebene Quadrat adbc.

Beweis. Da $cb = ac$ ist, so ist $cb^2 = ac^2$.
Nun ist aber $cb^2 + ac^2 = ab^2$;
daher ist auch $ab^2 = 2ac^2$ oder $= 2cb^2$.

2. Arithmetisch. Man erhebe 1. die Seite cb zum Quadrate, 2. nehme hierauf solches doppelt

und ziehe 3. daraus die Quadratwurzel, so ist solche gleich der Diagonallinie des gegebenen Quadrats adbc, und gleich der Seite des verlangten Quadrats abnm = 39′.

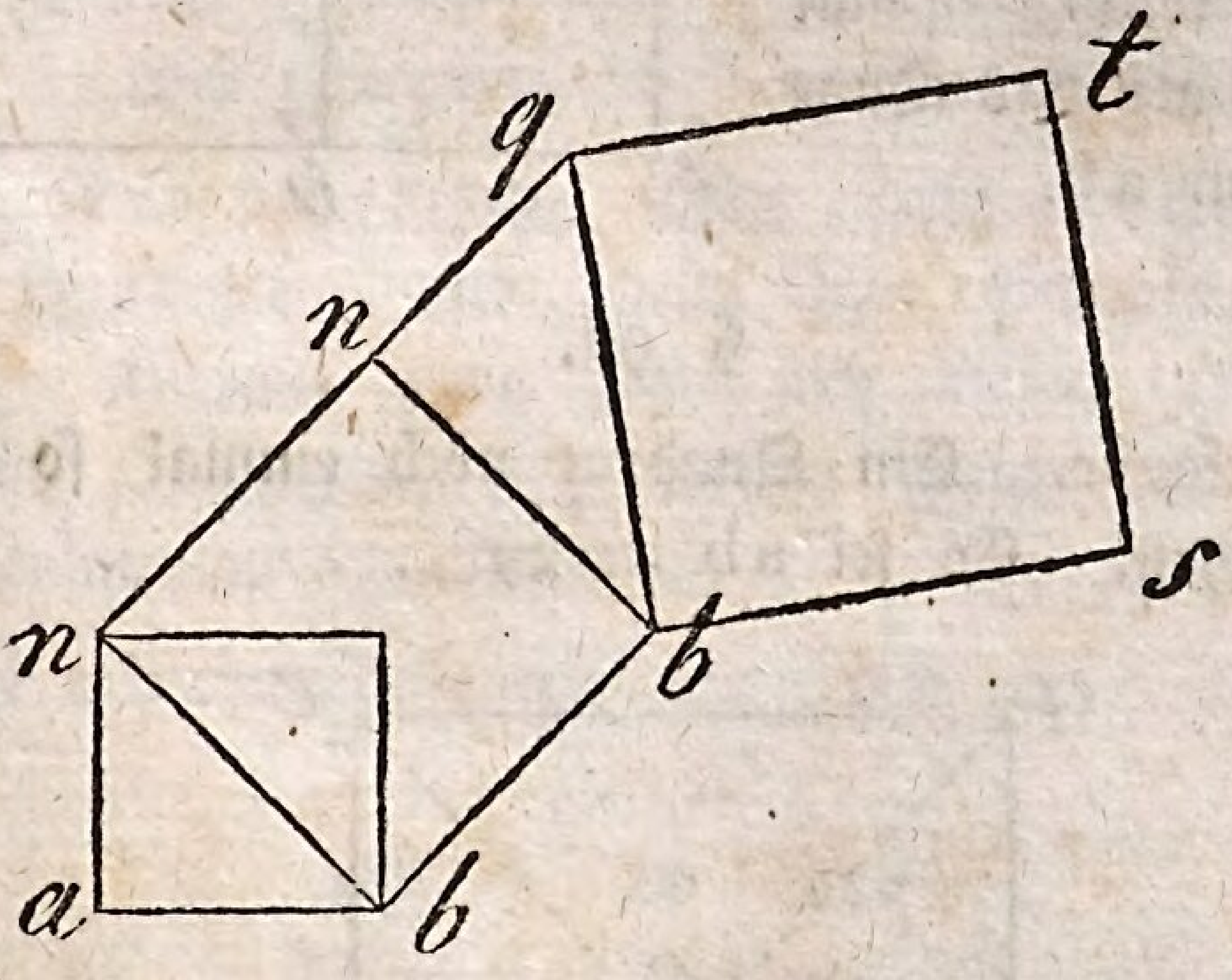
Es sei $cb = 276''$; $cb^2 = 76176''$

also $ab^2 = 2 \times 7^\circ 61' 76'' = 15^\circ 23' 52''$

$ab = \sqrt{152352''} = 39' 0''$.

§ 89.

Aufgabe. Ein Quadrat dreimal so groß zu machen als ein gegebenes.



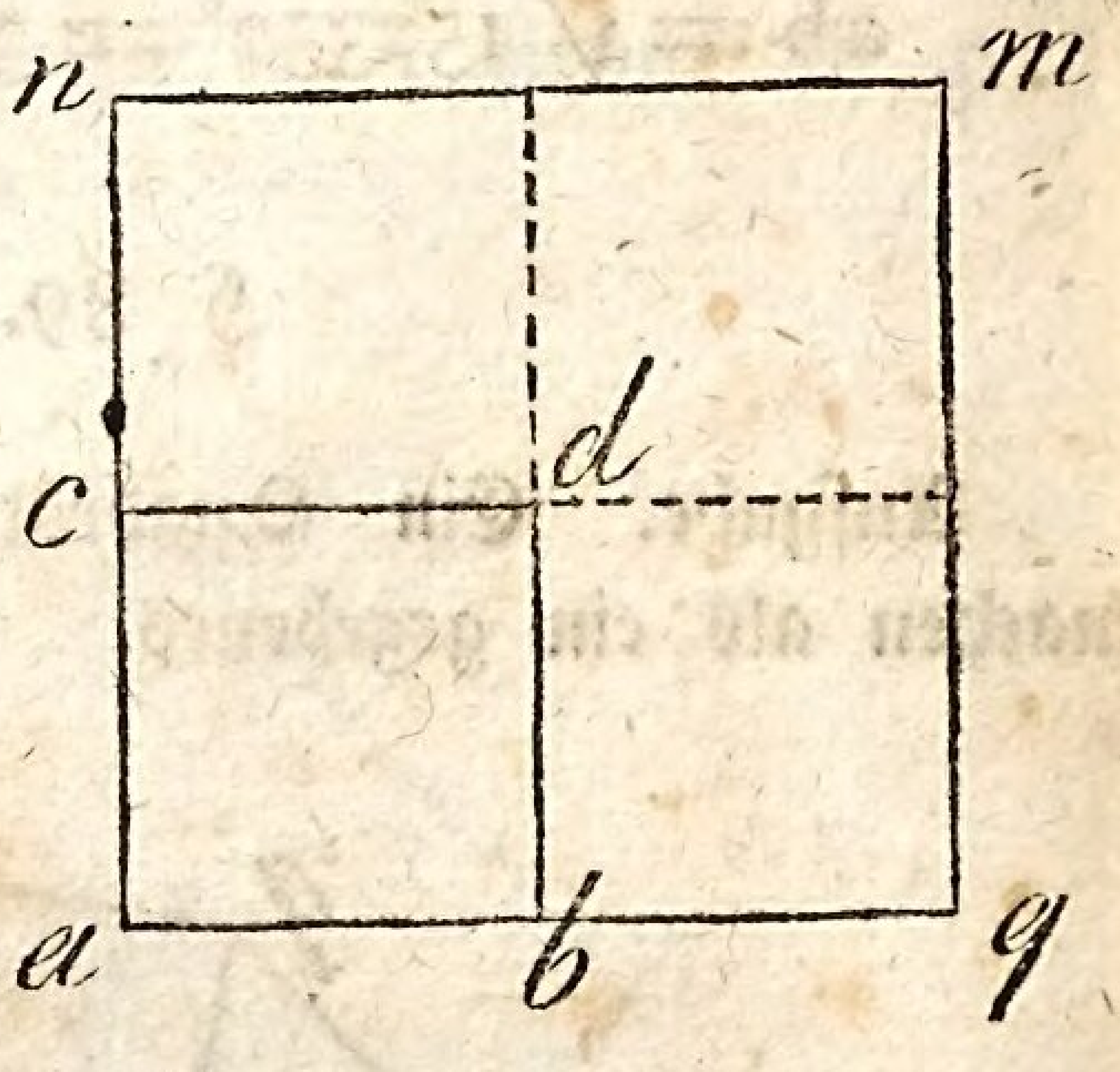
Auflösung. Geometrisch. Man mache solches 1. noch einmal so groß, welches dadurch geschiehet, daß man eine Diagonallinie durch das Quadrat ziehet, und hierauf ein Quadrat errichtet. 2. An die Seite bn des noch einmal so groß gemachten Quadrats setze man die Seite ab = nq, und ziehe von q nach b die Hypothenuse bq, wovon das Quadrat $= bq^2 = nb^2 + nq^2$ ist.

Da nun $nb^2 = 2ab^2$ und $nq^2 + nb^2 = bq^2$ ist, so muß $bq^2 = 2ab^2 + ab^2 = 3ab^2$ sein.

§ 90.

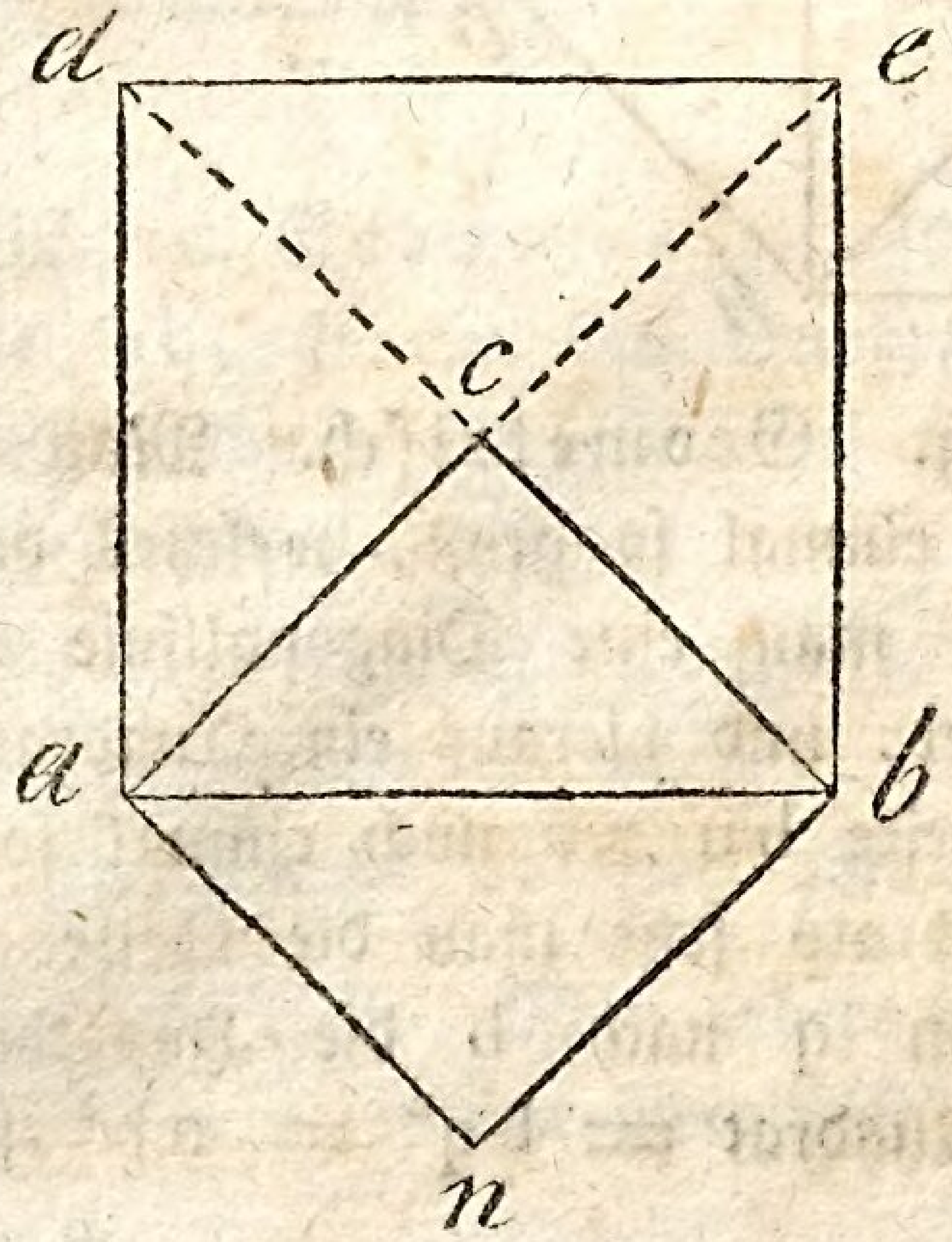
Aufgabe. Ein Quadrat 4mal so groß zu machen. Es sei ab = 236″.

Auflösung. Man mache die Seite ab noch einmal so lang und errichte darauf ein Quadrat, wie in der Figur geschehen ist, so ist solches 4mal größer, als das Quadrat von ab.



§ 91.

Aufgabe. Ein Quadrat noch einmal so klein zu machen. Es sei ab = 298″.



Auflösung. 1. Geometrisch. Man ziehe 1. doppelte Diagonallinien, wodurch das Quadrat in 4 gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke eingetheilt wird. Hierauf setze man 2. ein solches Dreieck unterhalb ab, so entstehet das verlangte Quadrat acbn, welches die Hälfte von dem Quadrate abed ist.

(Siehe die letzte Fig. auf voriger Seite.)

Beweis $\triangle abd = \frac{1}{2} \square abed$

$\triangle abd = \triangle adc + \triangle acb$

nun ist $\triangle acb = \triangle abn$

daher $\triangle abd = \triangle acb + \triangle abn$

Nun ist aber $\square acbn = \triangle acb + \triangle abn$

also $\square acbn = \triangle abd = \frac{1}{2} \square abed.$

2. Arithmetisch. Man erhebe die Seite ab zum Quadrate, und theile das Produkt durch zwei. Hierauf ziehe man aus diesem Quotienten die Quadratwurzel, welche gleich der Seite des verlangten Quadrats ist.

Es sei $ab = 298''$; $aq^2 = 8°88'04''$

$$2) \overline{\qquad\qquad}$$

also $\frac{ab^2}{2} = 44402''$

daher $ac = \sqrt{44402''} = 210''.$

§ 92.

Zusatz. Man kann diesen Lehrsatz des Pythagoras auch auf eine anschauliche Weise ohne den mathematischen Beweis darstellen, wenn man nämlich zur Seite der einen Cathete 3 Schuh und zur andern 4 Schuh nimmt, wovon alsdann 5 Schuh

auf die Hypothenuse fallen. Setzt man hierauf auf jede dieser Seiten die dazu gehörigen Quadrate, so faßt das Quadrat der Hypothenuse 25 kleine Quadrate in sich, dergleichen 9 auf das der einen, und 16 auf das der andern Cathete fallen. Da also $25 = 9 + 16$ sind, so müssen $25 - 16 = 9$; und $25 - 9 = 16$ sein.

§ 93.

Zusatz. Indessen sind diese Zahlen 3 4 und 5 und deren Verdoppelung nicht die einzigen, wodurch die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks in ganzen Zahlen dargestellt werden können, sondern es giebt deren noch eine große Menge, indem man jede ungerade Zahl zu der einen Cathete und jede gerade Zahl zu der andern gebrauchen kann. Ist z. B. die eine Cathete = 5, so ist die andere = 12 und die Hypothenuse = 13. Wird die eine Cathete zu 7 angenommen, so ist die andere = 24 und die Hypothenuse = 25 u. s. w.

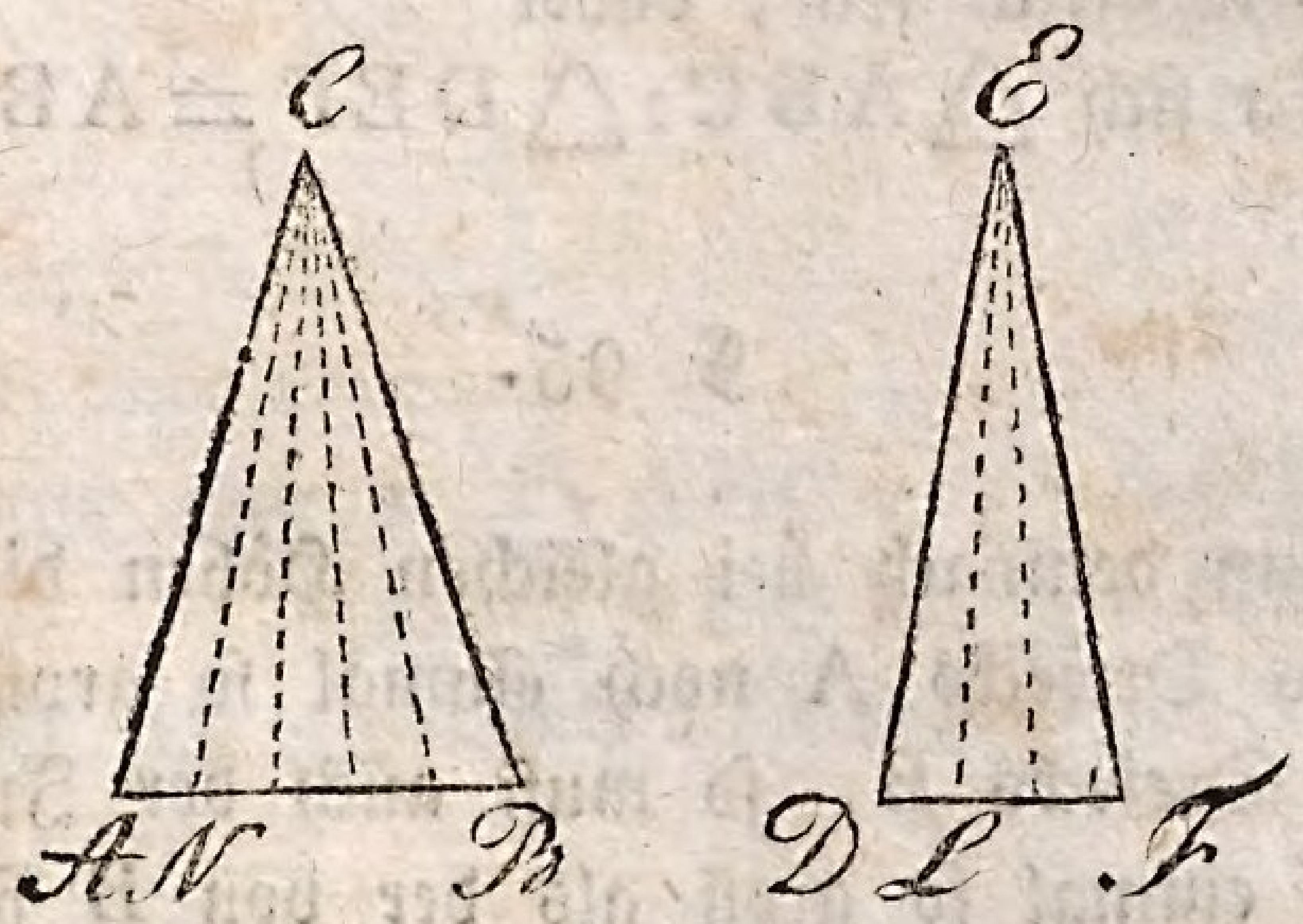
Anmerkung. Die Auffindung liegt in folgender Buchstaben-Formel: ist die Cathete $= 2a + 1$, so ist die andere $= 2(a^2 + a)$ und die Hypothenuse $= 2(a^2 + a) + 1$.

II. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und deren Eintheilung.

§ 94.

Lehrsatz. Wenn Dreiecke gleiche Höhen haben; so verhalten sie sich zu einander, wie ihre Grundlinien. Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhalte: $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : DF$.



Beweis. Man theile AB in 5 und DF in 3 gleiche Theile und zwar so, daß jeder Theil von AB eben so groß, als jeder Theil von DF sei, und ziehe hierauf die Linien CN und EL. Alsdann

ist $\triangle ABC = 5$ mal $\triangle ACN$

und $\triangle DEF = 3$ „ $\triangle DEL$.

Folglich verhält sich $\triangle ABC : \triangle DEF = 5 \triangle ACN : 3 \triangle DEL$.

Da nun $\triangle ACN = \triangle DEL$, weil sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

so verhält sich I. $\triangle ABC : \triangle DEF = 5 : 3$.

Ferner ist $AB = 5 \text{ mal } AN$

und $DF = 3 \text{ - } DL$.

Folglich verhält sich $AB : DF = 5AN : 3DL$

und da $AN = DL$

so verhält sich II. $AB : DF = 5 : 3$.

Da in den Proportionen I und II die letztern Verhältnisse sich gleich sind, so müssen sich auch die erstern gleich sein; daher

verhält sich $\triangle ABC : \triangle DEF = AB : DF$.

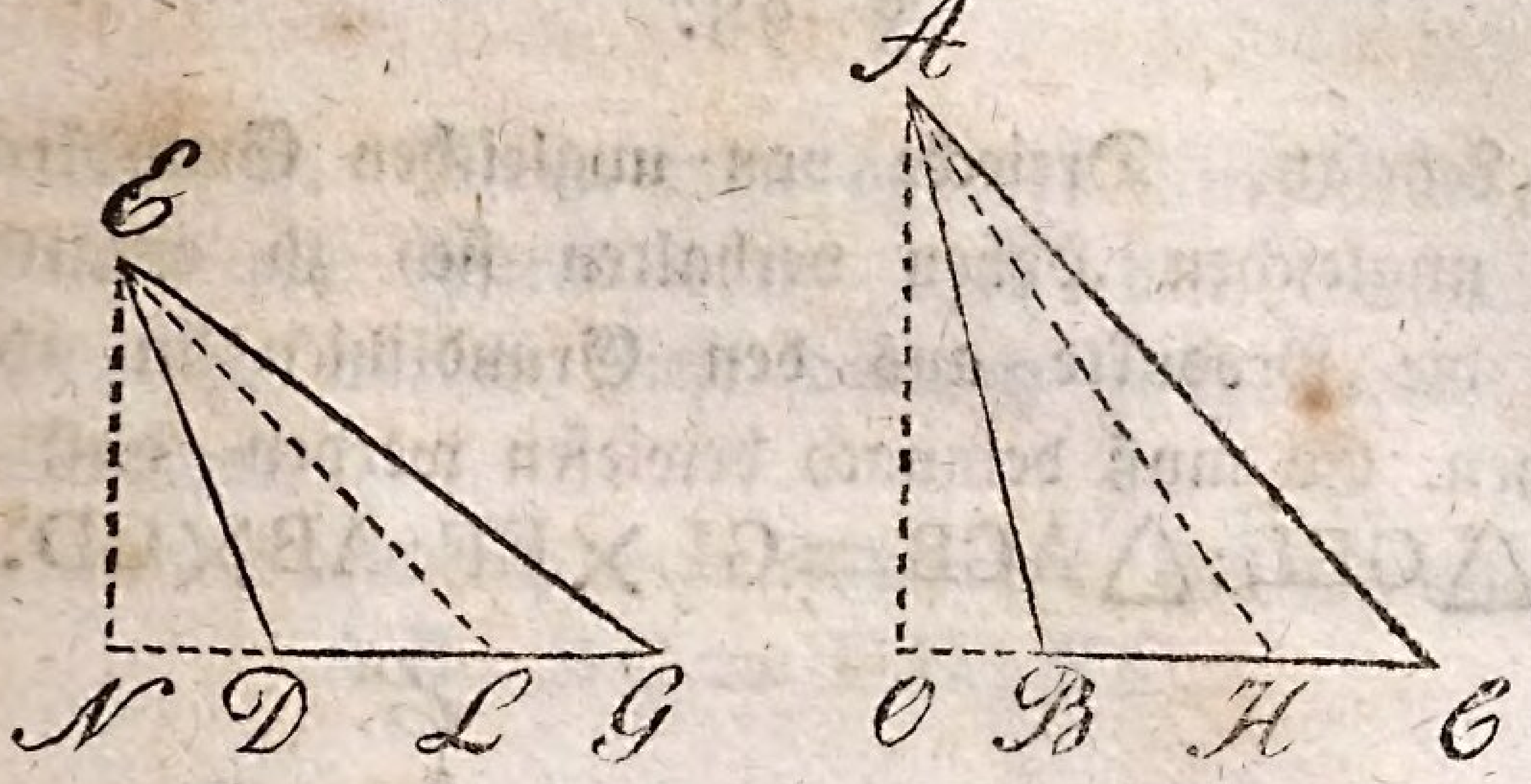
§ 95.

Wenn demnach bei gleichen Höhen die Grundlinie des Dreiecks A noch einmal so groß ist, als die des Dreiecks B, so muß auch der Inhalt von A noch einmal so groß als der von B sein.

§ 96.

Lehrsatz. Wenn Dreiecke gleiche Grundlinien haben, so verhalten sie sich zu einander, wie ihre Höhen. Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhalte:

$$\triangle ABC : \triangle DEG = AO : EN.$$



Beweis. Man lasse ihre Höhen AO und EN fallen, und mache

1. OH = BC
2. NL = DG.

Alsdann verhält sich △AOH : △ENL = AO : EN, weil man die Höhen bei denselben als ihre Grundlinien ansehen kann.

Da nun aber 1. △ABC = △AOH
2. △DEG = △ENL ist,

so verhält sich △ABC : △DEG = AO : EN.

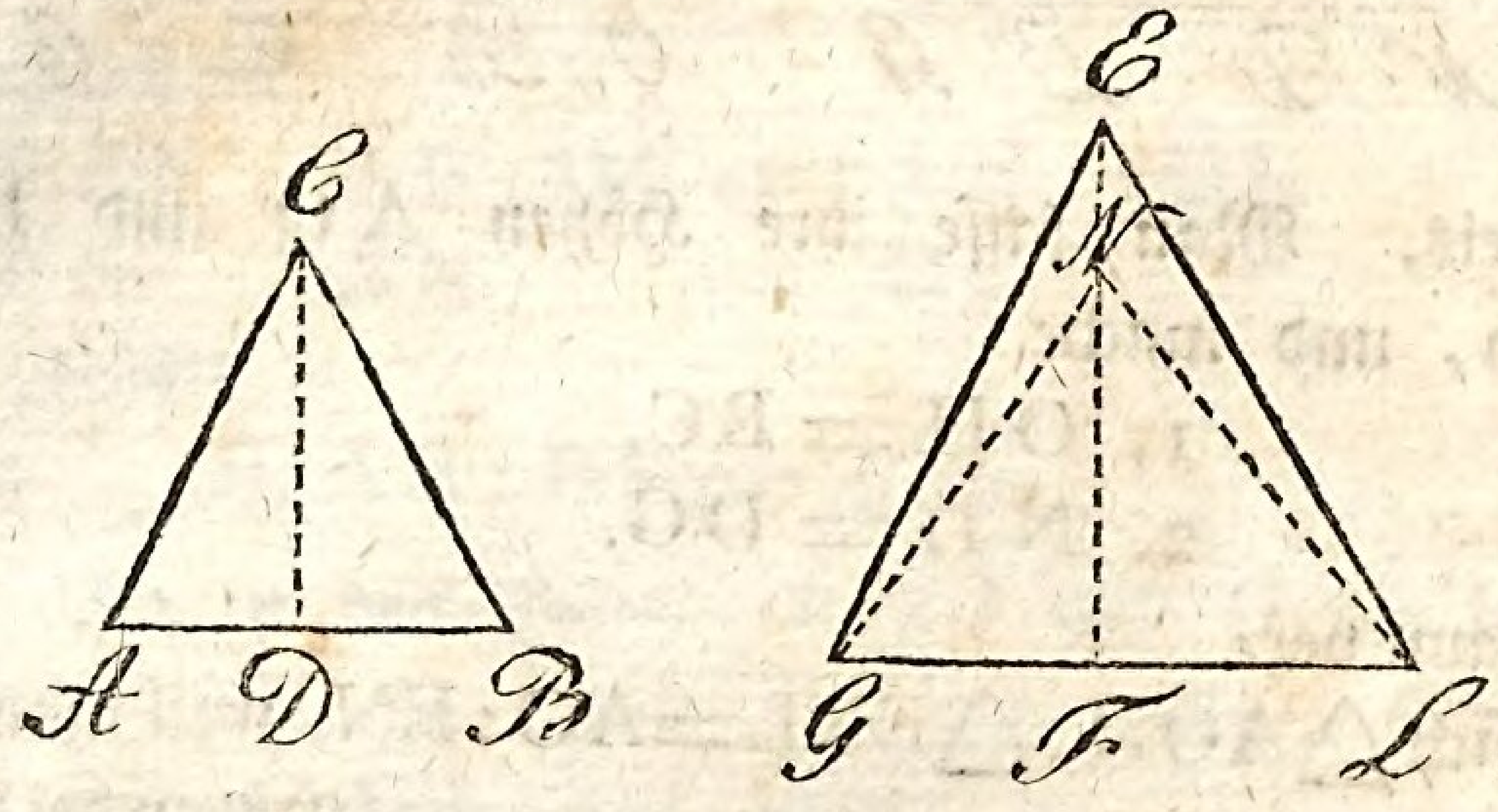
§ 97.

Da die Dreiecke die Hälften von denjenigen Parallelogrammen sind, welche mit ihnen gleiche Höhen und gleiche Grundlinien haben, so müssen sich auch diese, wenn sie gleiche Höhen haben, zu einander verhalten, wie ihre Grundlinien, und wenn sie gleiche Grundlinien haben, wie ihre Höhen.

§ 98.

Lehrsatz. Dreiecke von ungleichen Grundlinien und ungleichen Höhen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Grundlinien in ihren Höhen. Es muß demnach bewiesen werden, daß

$$\triangle GEL : \triangle ACB = GL \times EF : AB \times CD.$$



Beweis. Man ziehe 1. die Höhe EF und CD und mache 2. FN = CD, so verhält sich

$$\triangle GEL : \triangle GNL = FE : FN \text{ nach } \S 96$$
$$\triangle GNL : \triangle ACB = GL : AB \text{ nach } \S 94$$

$$\triangle GEL \times \triangle GNL : \triangle GNL \times \triangle ACB = FE \times GL : FN \times AB$$
$$FE \times GL : CD \times AB$$

oder

*) $\triangle GEL : \triangle ACB = GL \times FE : AB \times CD.$

§ 99.

Zusatz. Eben dieses gilt auch von den Parallelogrammen.

---

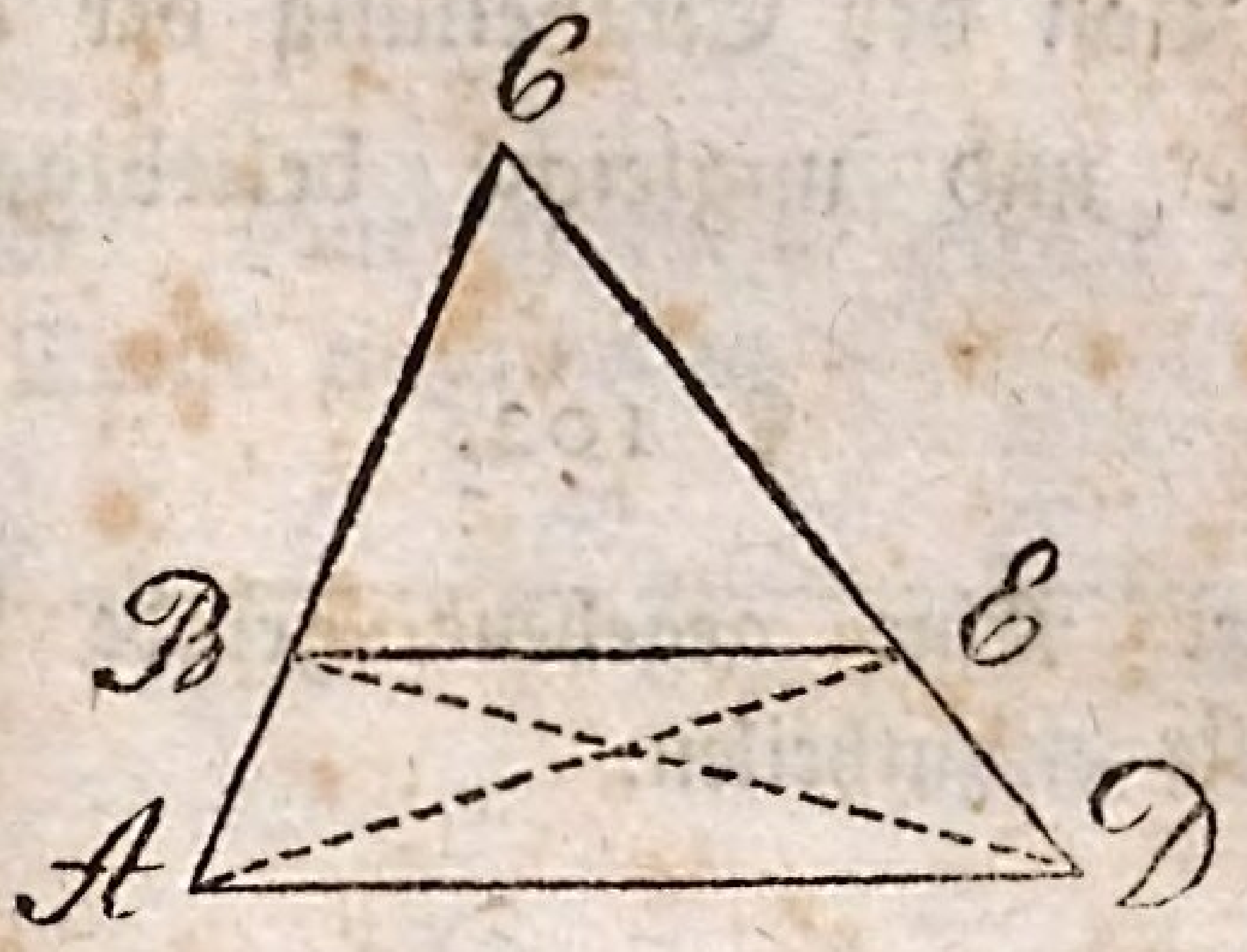
*) Wenn in zwei Verhältnissen, die aus zwei Produkten bestehen, zwei Faktoren sich gleich sind, so verhalten sich diese Verhältnisse zu einander, wie die ungleichen Faktoren.

§ 100.

Lehrsatz. Wenn man mit der Grundlinie eines Dreiecks eine Parallellinie nach den Seiten hin ziehet, so werden diese dadurch proportionirt abgeschnitten.

Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhalte

AB : BC = DE : EC.



Beweis. Man ziehe die Linien AE und BD, so verhält sich △ABE : △BEC = AB : BC nach § 94

△DEB : △BEC = DE : EC - = - =

Da nun aber 1. △BEC = △BEC

2. △ABE = △DBE nach § 44

so muß sich verhalten:

1. AB : BC = DE : EC.
2. AB + BC : BC = DE + EC : EC

oder

AC : BC = DC : EC.

3. BC : AB = EC : DE.
4. BC + AB : AB = EC + DE : DE

oder

AC : AB = CD : DE.

5. AC : CD = AB : DE.
6. AC : CD = BC : CE aus Nr. 2.

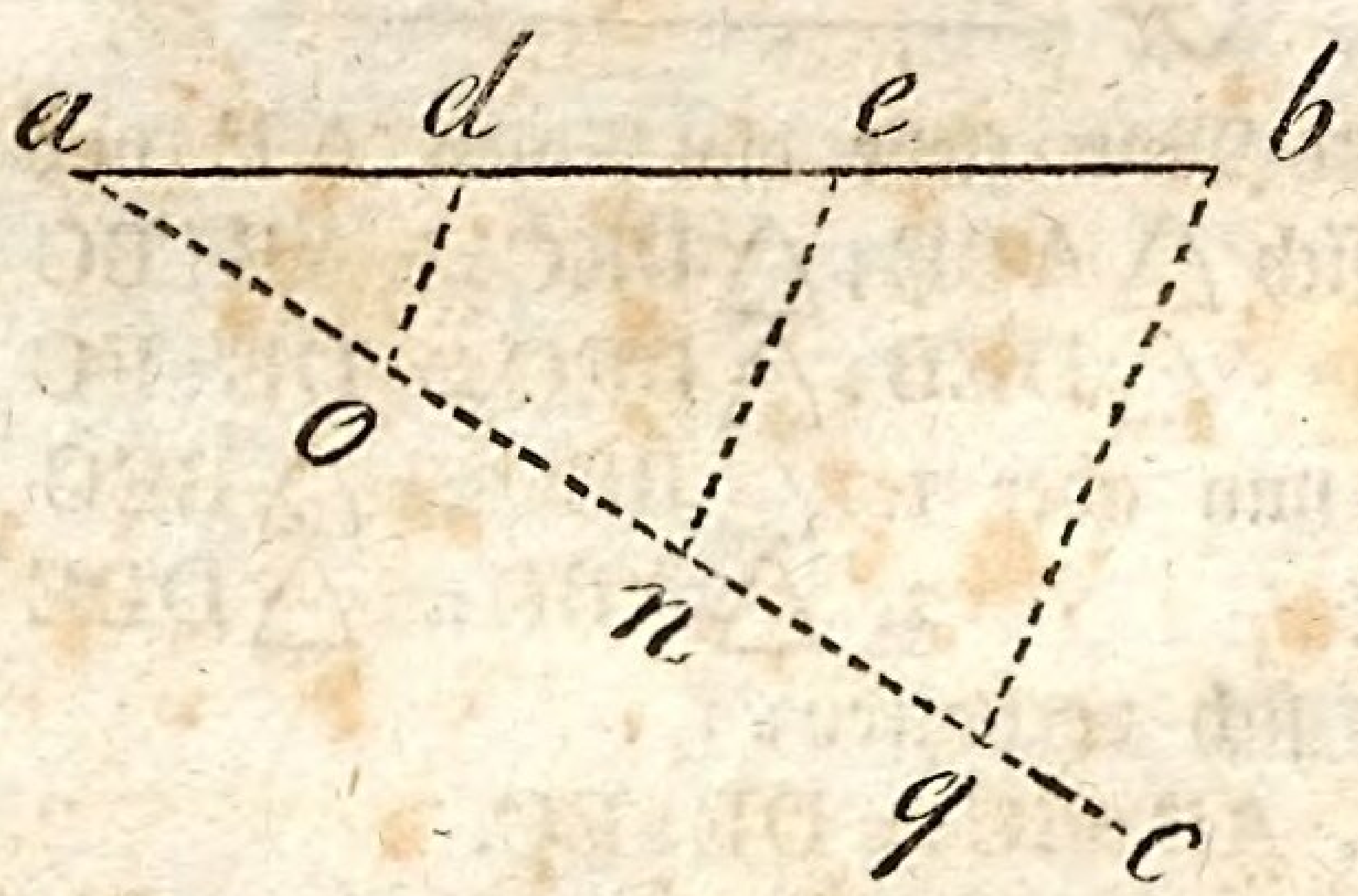
§ 101.

Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Eintheilung 1. der Linien in gleiche und ungleiche Theile; 2. der Dreiecke, Vierecke und Vielecke aus einer Spitze, und zwar ebenfalls in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

A. Von der Eintheilung der Linien in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 102.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in 3 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man setzt 1. an den Endpunkt der gegebenen Linie ab eine andere gerade Linie ac schief an, trägt 2. auf diese mit einer beliebigen Weite des Zirkels 3 gleiche Theile ao, on und nq. Hierauf verbindet man 3. den Endpunkt der gemachten 3 Theile q mit b und zieht 4. mit dieser Hülfslinie qb Parallellinien durch die Punkte o und n, durch welche alsdann die gegebene gerade

Linie ab in d und e in 3 gleiche Theile eingetheilt wird.

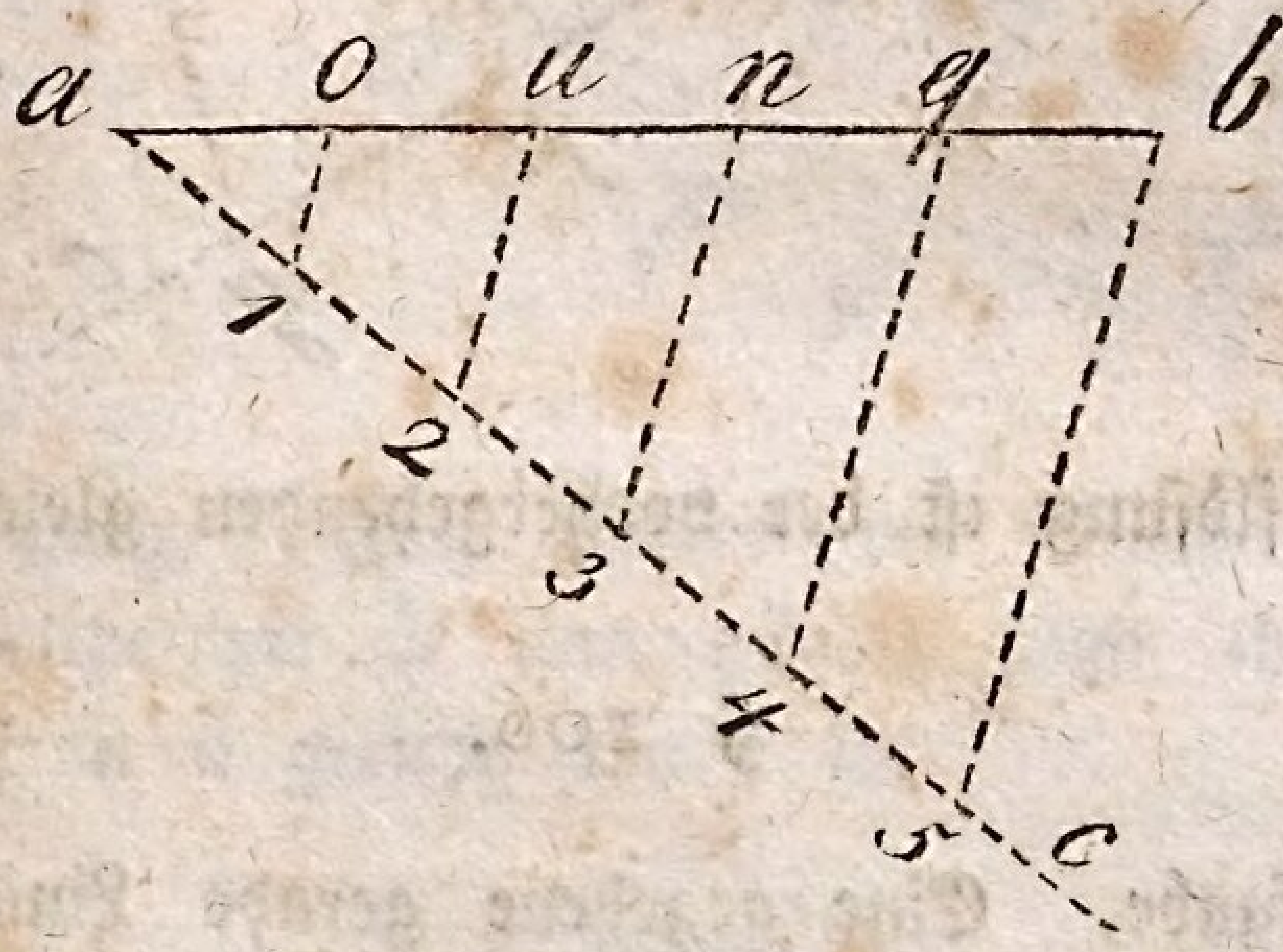
Beweis Da in dem △abq die Linie en mit bq parallel gezogen ist, so muß sich verhalten:

ab : eb = aq : nq.
Aber aq : nq = 3 : 1
also auch ab : eb = 3 : 1.

Also eb der dritte Theil von ab, von welcher db = ⅔ ist.

§ 103.

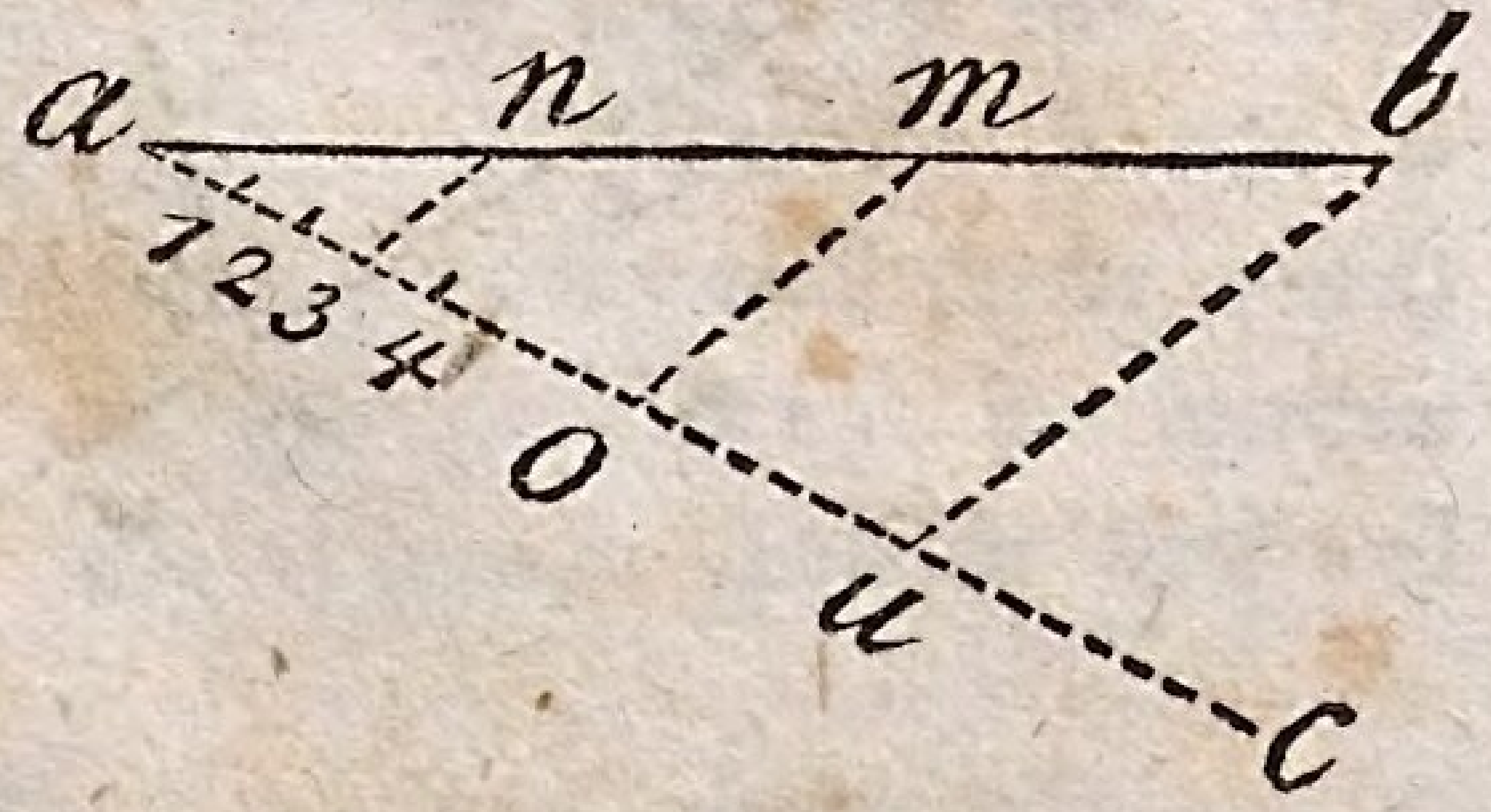
Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ab in 5 gleiche Theile einzutheilen.



Die Auflösung ist der vorhergehenden gleich.

§ 104.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ab in 2¾ gleiche Theile einzutheilen.

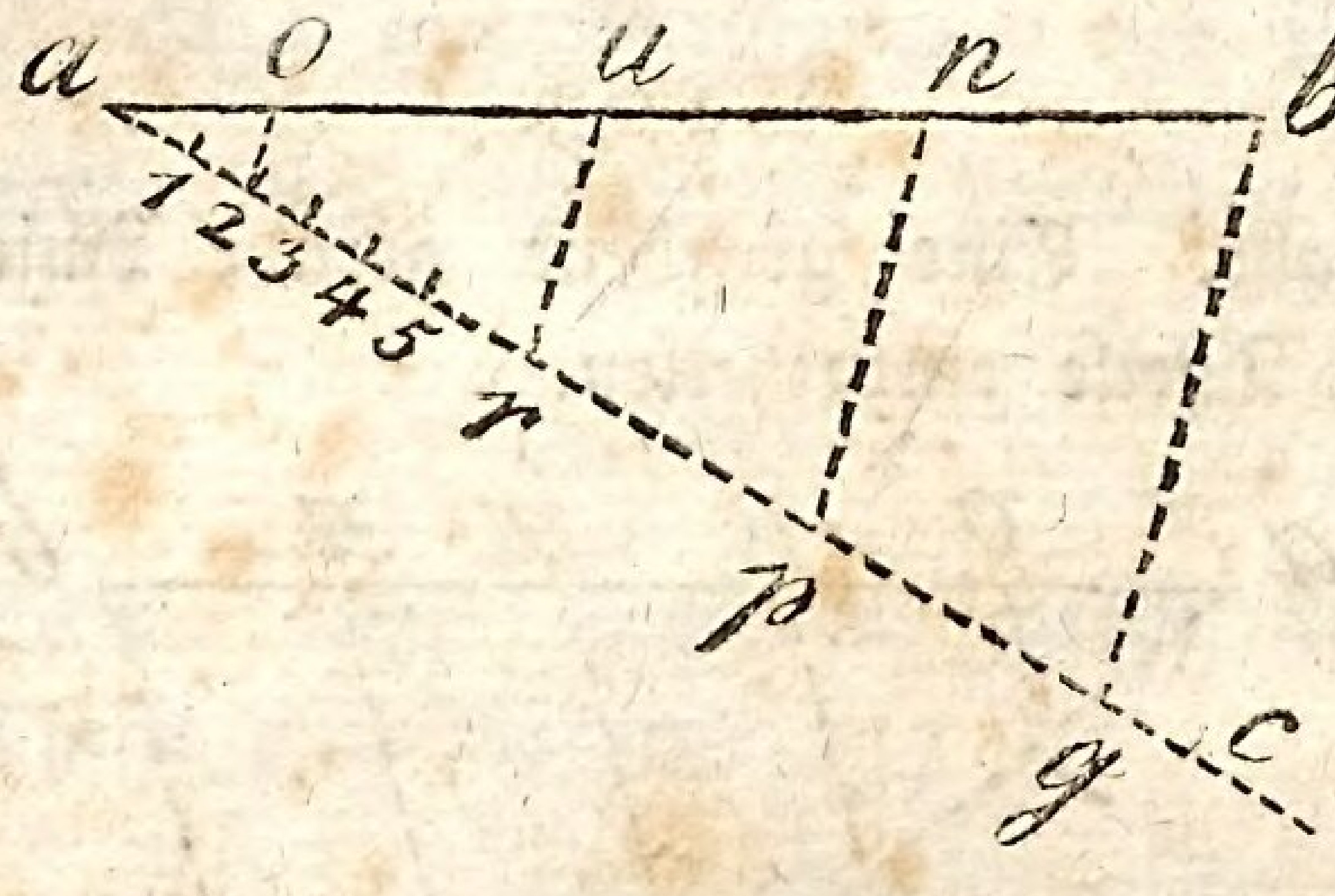


Auflösung. Man setzt an ab die Linie ac, trägt auf diese zuerst 4 kleine gleiche Theile, faßt hierauf mit dem Zirkel die

4 Theile zusammen, und trägt solche aus dem dritten Theilungspunkte 2 mal auf die Linie ac hinab u. s. w.

§ 105.

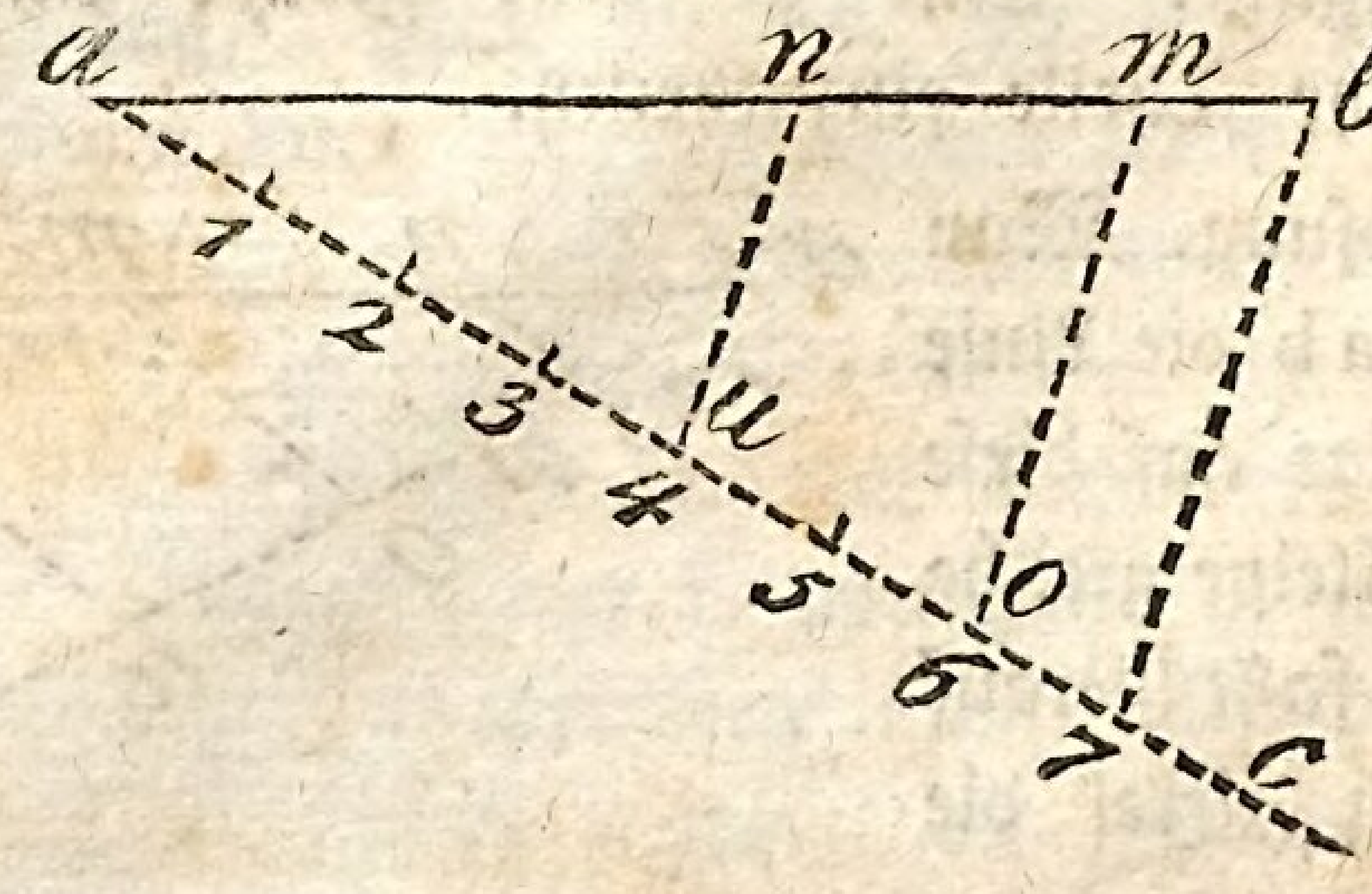
Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie in $3\frac{2}{5}$ gleiche Theile einzutheilen.



Die Auflösung ist der vorhergehenden gleich.

§ 106.

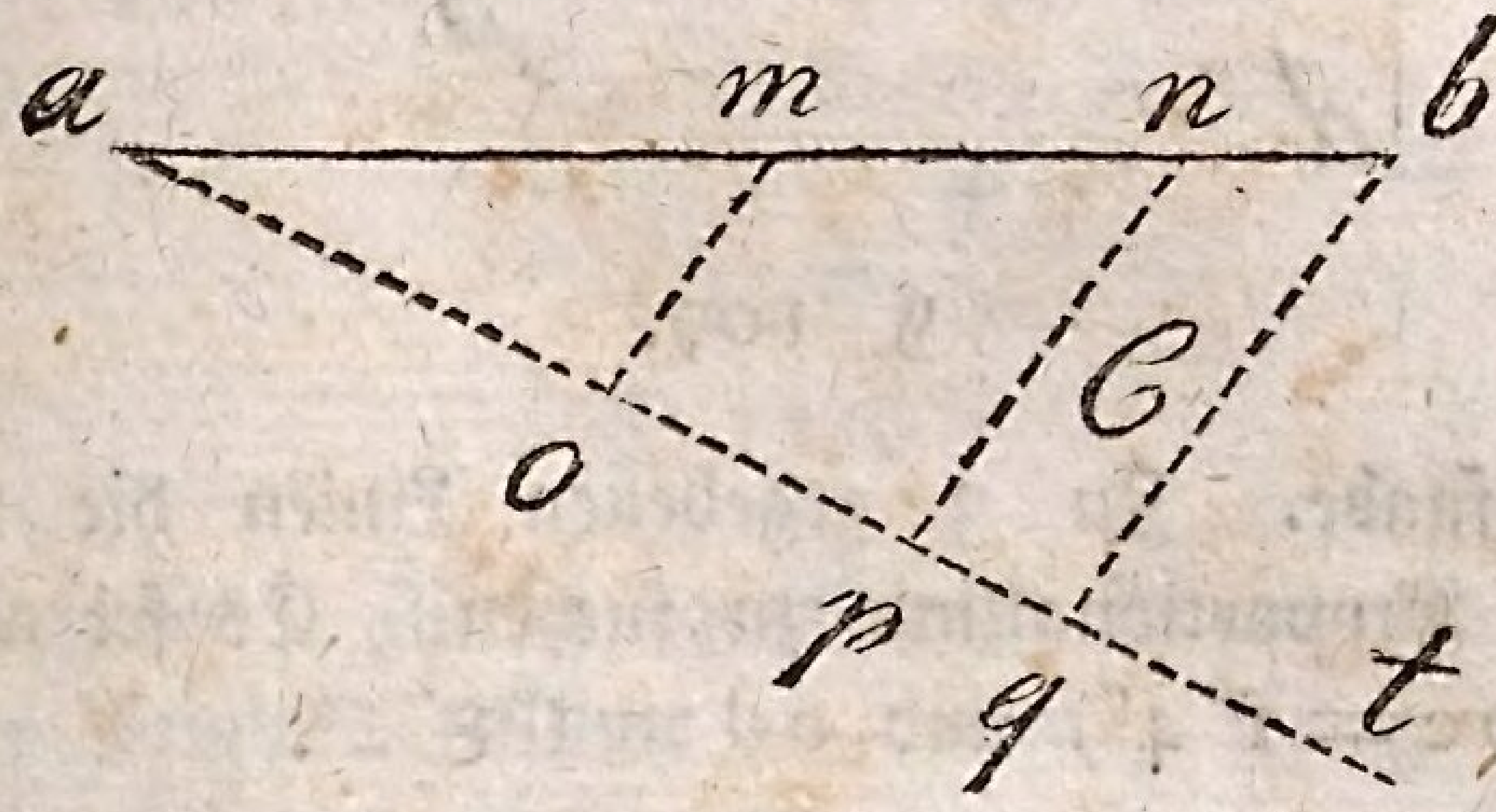
Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie so einzutheilen, daß der erste Theil noch einmal so groß als der zweite und dieser noch einmal so groß als der dritte Theil ist.



Auflösung. Man addire die Theile zusammen, deren Anzahl sieben ausmacht, und theile hierauf die Hülfslinie in 7 gleiche Theile ꝛc.

§ 107.

Aufgabe. Eine Linie so einzutheilen, daß A $= \frac{1}{2}$, B $= \frac{1}{3}$ und C $= \frac{1}{6}$ davon erhält.



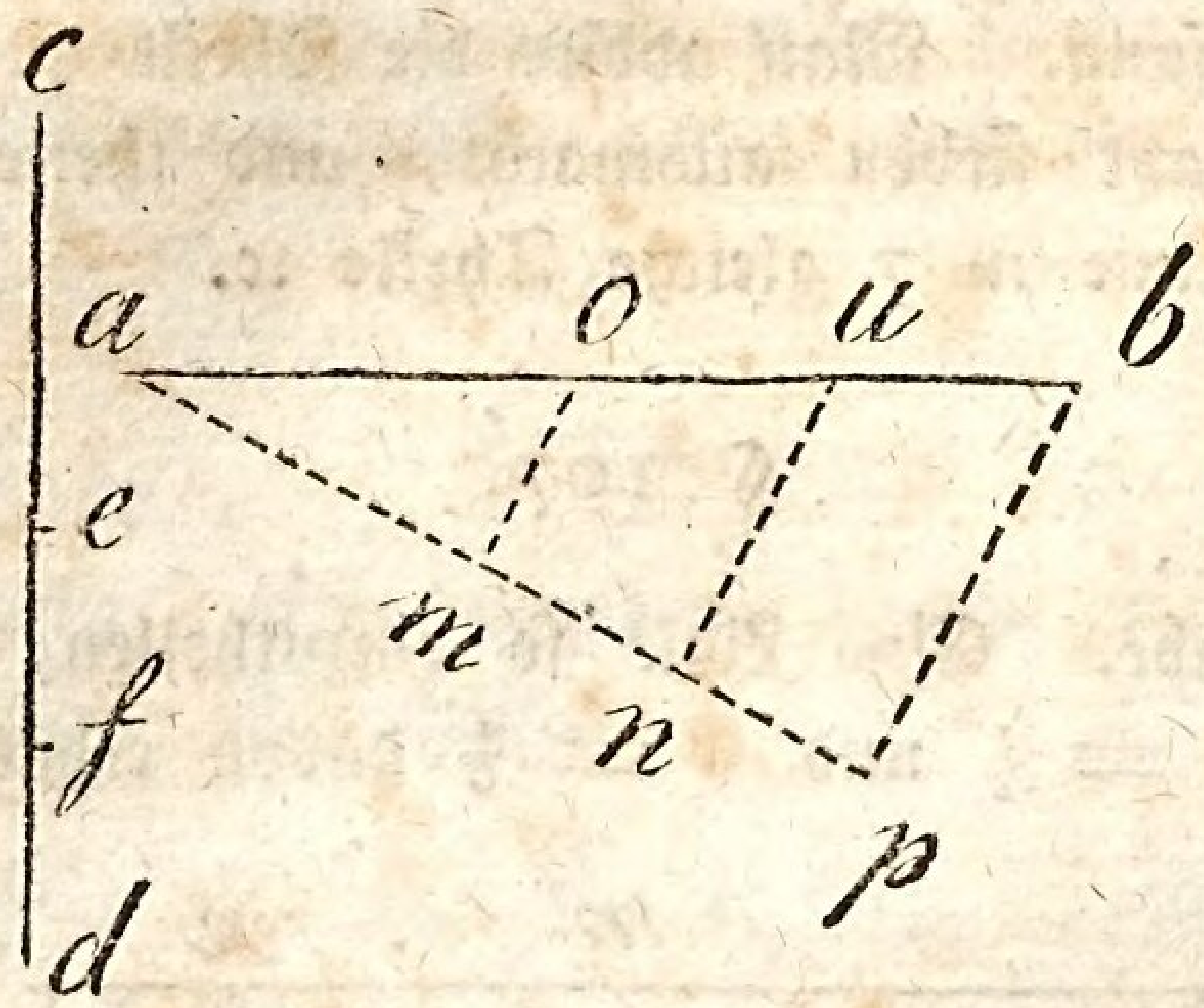
Auflösung. Man addire die Brüche zusammen, welche $= \frac{6}{6}$ ausmachen, und theile die Hülfslinie in 6 gleiche Theile ꝛc.

§ 108.

Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie ab nach einer gegebenen cd so einzutheilen, daß die Theile von ab denen von cd proportionirt sind.

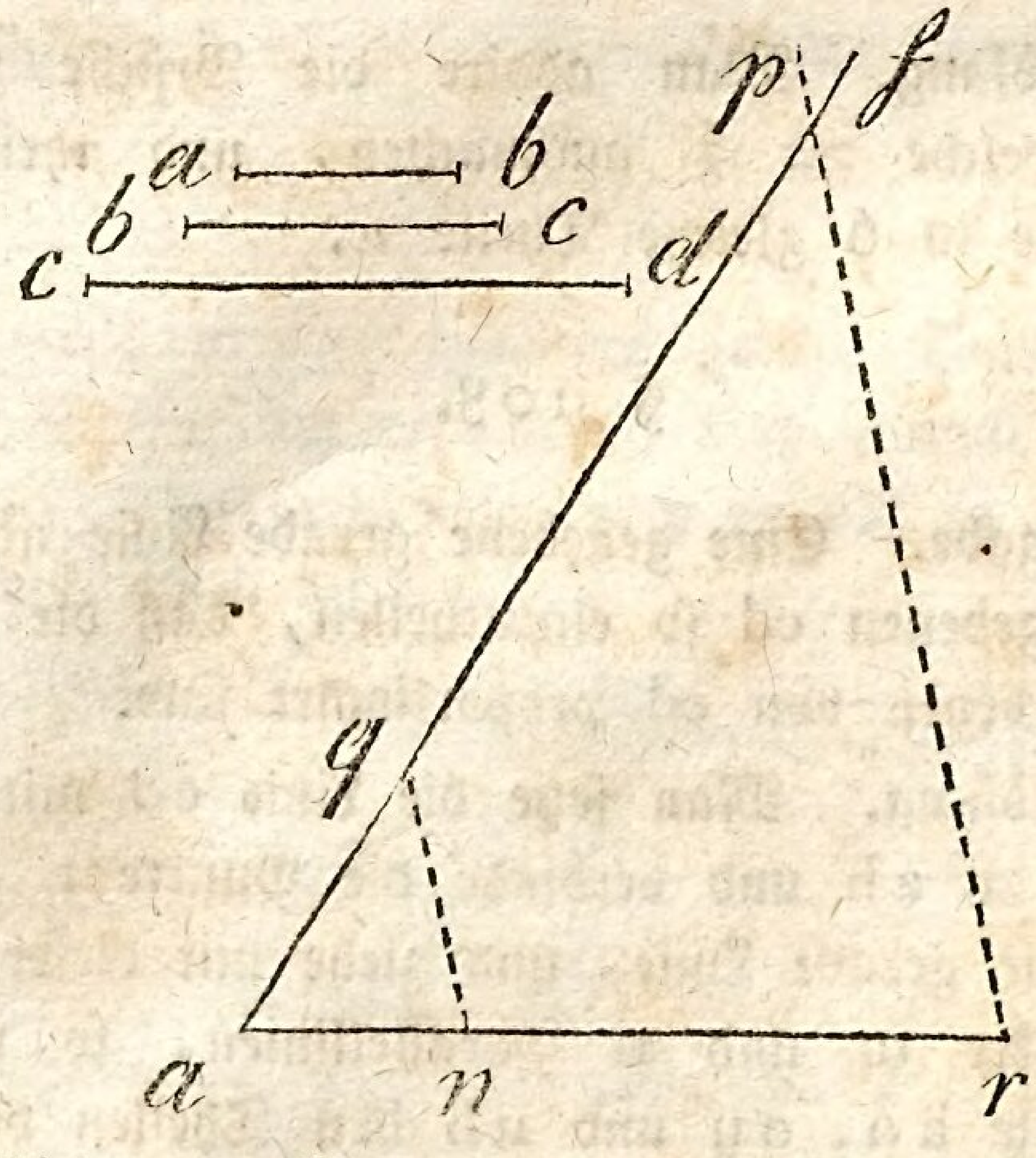
Auflösung. Man setze die Linie cd mit ihren Theilen an ab und verbinde die Punkte b und p durch eine gerade Linie, und ziehe mit dieser durch die Punkte m und n Parallellinien, so werden die Theile ao, ou und ub den Theilen von cd proportionirt sein.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)



§ 109.

Aufgabe. Zu 3 gegebenen Linien die vierte größere Proportionallinie zu suchen. Es sei ab = 7′ 5″, bc = 1° 4″, und cd = 1° 8′ 2″.



Auflösung. Man setze aus a die Linie ab nach n, die Linie bc aus a nach q und die Linie

cd aus n nach r. Verbinde hierauf q und n durch eine gerade Linie, und ziehe mit dieser durch den Punkt r eine Parallellinie, so wird dadurch von af die Linie qp abgeschnitten, welche demnach die 4te Proportionallinie ist.

Denn es verhält sich in dem Dreieck apr,

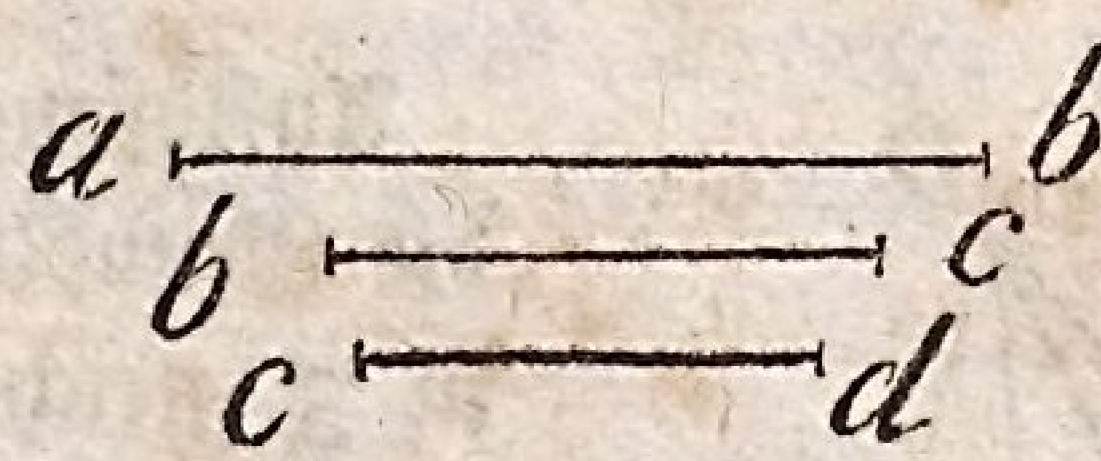
$$an : aq = nr : qp.$$

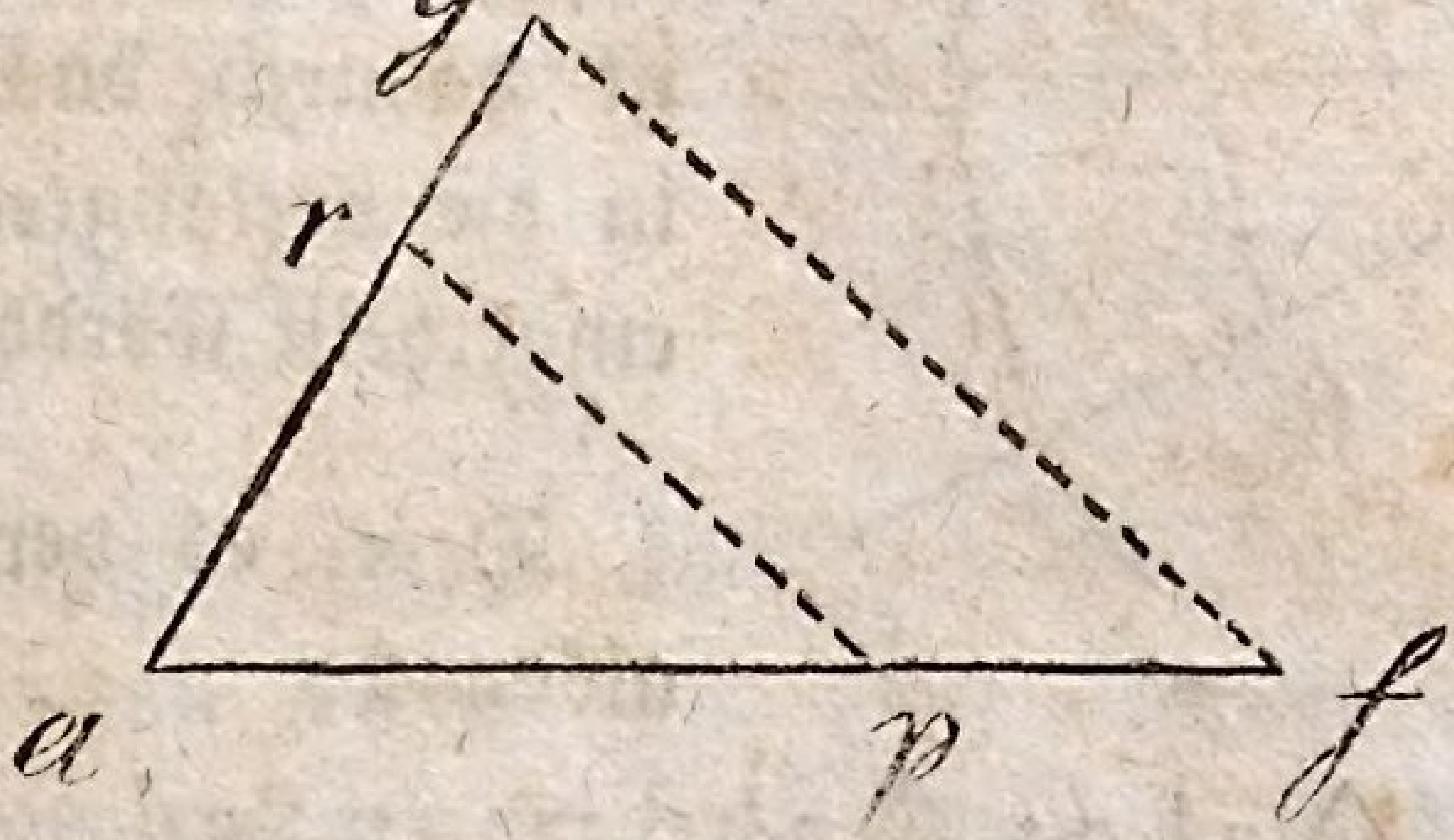
Arithmetisch: $7' 5'' : 1^{\circ} 0' 4'' = 1^{\circ} 8' 2'' : x$

$$x = \frac{182'' \times 104''}{7' 5''} = 2^{\circ} 5' 2''$$

§ 110.

Aufgabe. Zu 3 gegebenen Linien die vierte kleinere Proportionallinie zu finden. Es sei ab = $1^{\circ} 6' 4''$, bc = $1^{\circ} 0' 8''$ und cd = $8' 4''$.





Auflösung. Man setze ab aus a nach p, bc aus a nach r und cd aus p nach f, verbinde

hierauf die Punkte r und p durch eine gerade Linie, und ziehe mit rp eine Parallellinie durch den Punkt f nach g, so ist rg die vierte Proportionallinie, denn ap : ar = pf : rg.

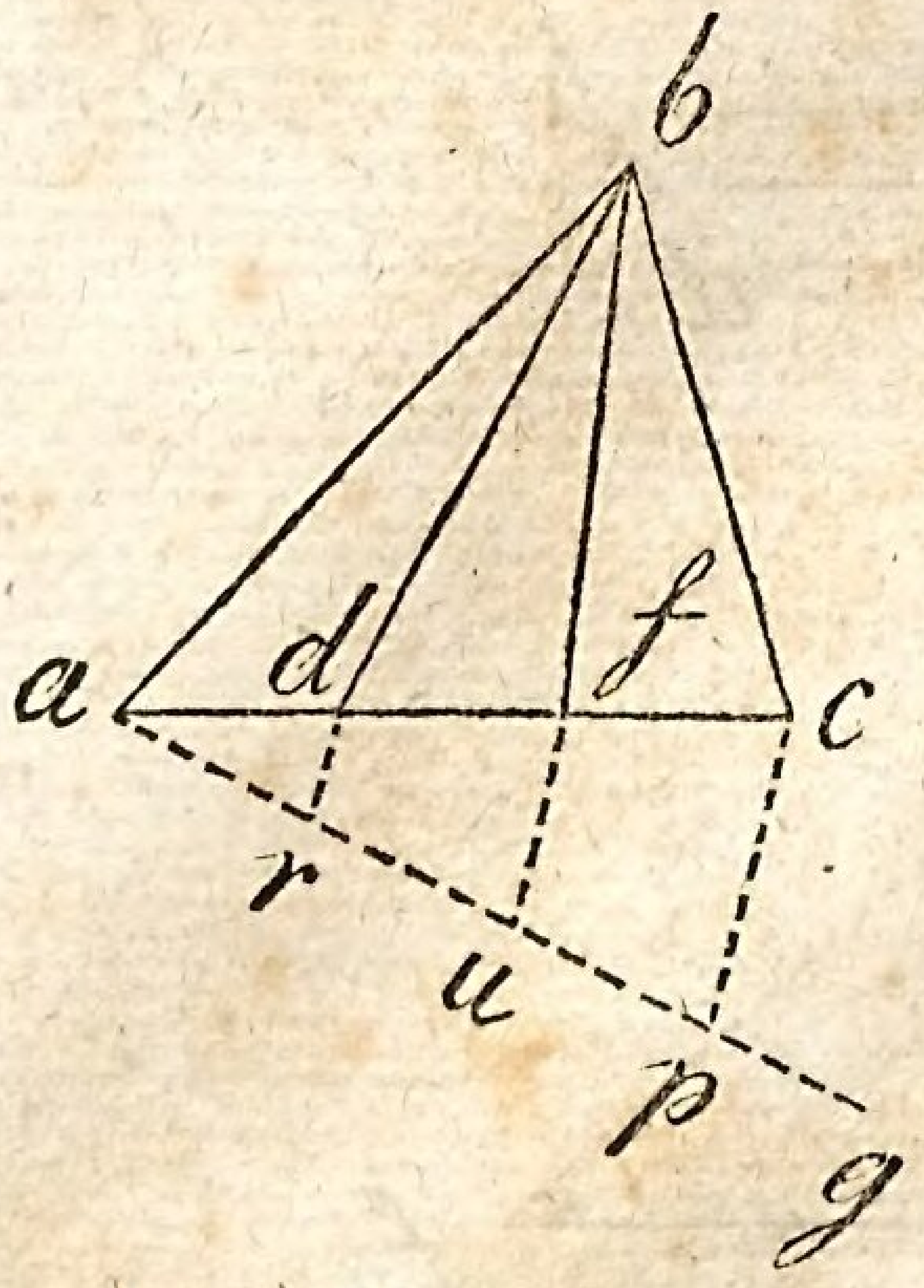
Arithmetisch: $1°6'4'' : 1°0'8'' = 8'4'' : x$

$$x = \frac{84'' : 108''}{164''} = 57''$$

B. Von der Eintheilung der Dreiecke aus einer Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 111.

Aufgabe. Ein beliebiges Dreieck in 3 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man theile die Grundlinie nach § 102 in 3 gleiche Theile, und ziehe hierauf aus den Theilungspunkten nach der Spitze gerade Linien, so ist dadurch das Dreieck in die verlangten Theile eingetheilt worden.

Denn es verhält sich alsdann:

$$\triangle abc : \triangle abd = ac : ad,$$

aber

$$ac : ad = 3 : 1,$$

also verhält sich auch:

$$\triangle abc : \triangle abd = 3 : 1;$$

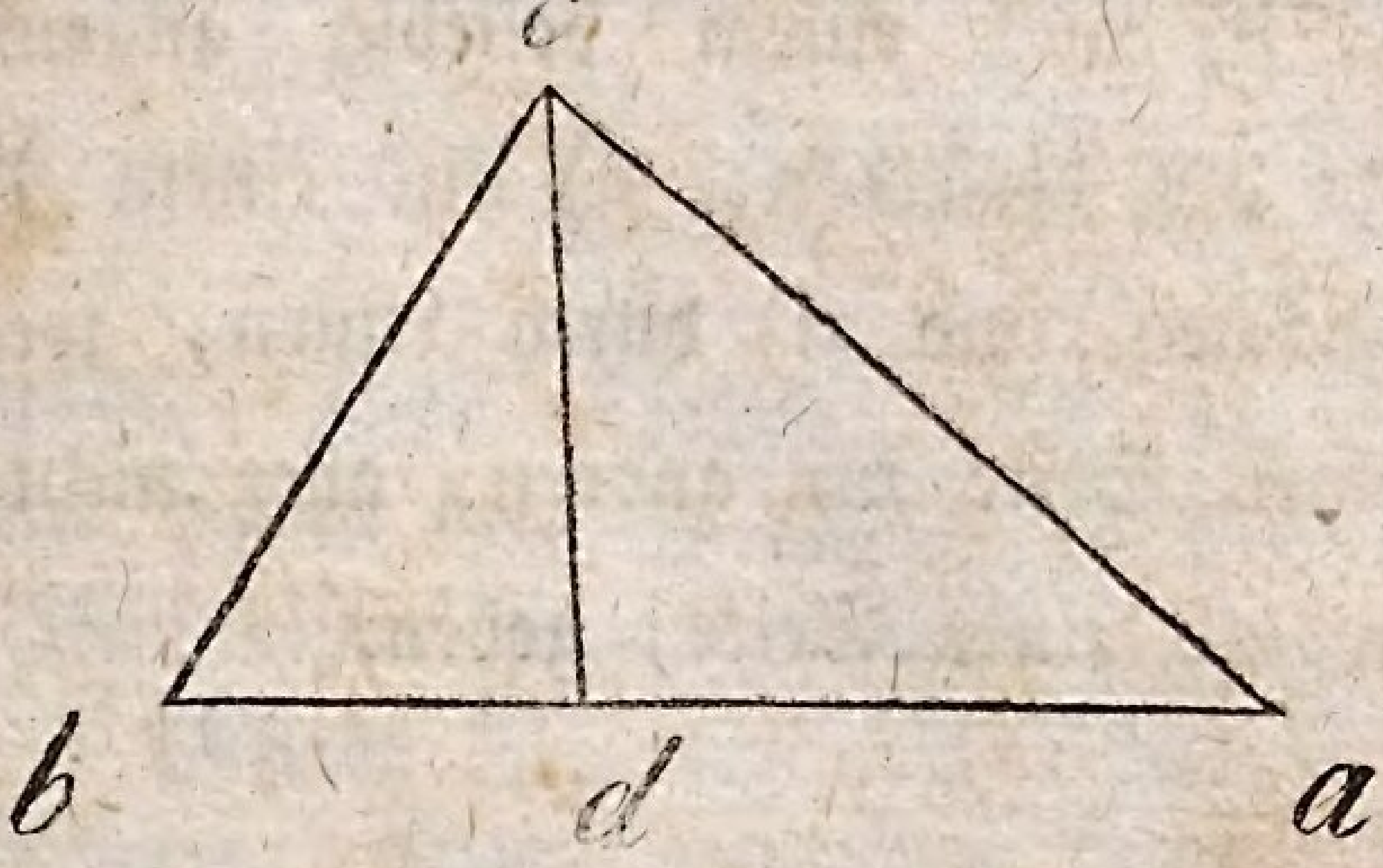
daher ist $abd = \frac{1}{3} \triangle abc$ u. s. w.

§ 112.

Zusatz. Soll demnach ein beliebiges Dreieck in 3, 4, 5 u. s. w. gleiche oder ungleiche beliebige Theile eingetheilt werden, so theilt man nach den vorhergehenden Aufgaben die Grundlinie in die verlangten Theile, und ziehet aus der Spitze nach den Theilungspunkten der Grundlinie hin, so wird das gegebene Dreieck verlangter Maßen eingetheilt werden.

§ 113.

Aufgabe. Von einem Dreiecke ein beliebiges Stück aus der Spitze abzuschneiden.



Auflösung. Man berechne den Inhalt des Dreiecks, wenn solcher noch nicht bekannt ist, und setze alsdann auf: der ganze Inhalt des Dreiecks hat eine Grundlinie von der Größe, was muß das kleine Dreieck von dem verlangten Inhalte wol für

eine Grundlinie haben? Wenn demnach der Inhalt des großen Dreiecks abc = $1^{\circ}\ 95\,\square'$ und die Grundlinie ab = $26'$ und der Inhalt des kleinen Dreiecks = $75\,\square'$ ist, so setzt man auf:

$$195' : 26' = 75' : x$$

$$x = \frac{26 \times 75}{195} = 1^{\circ}\ 0'.$$

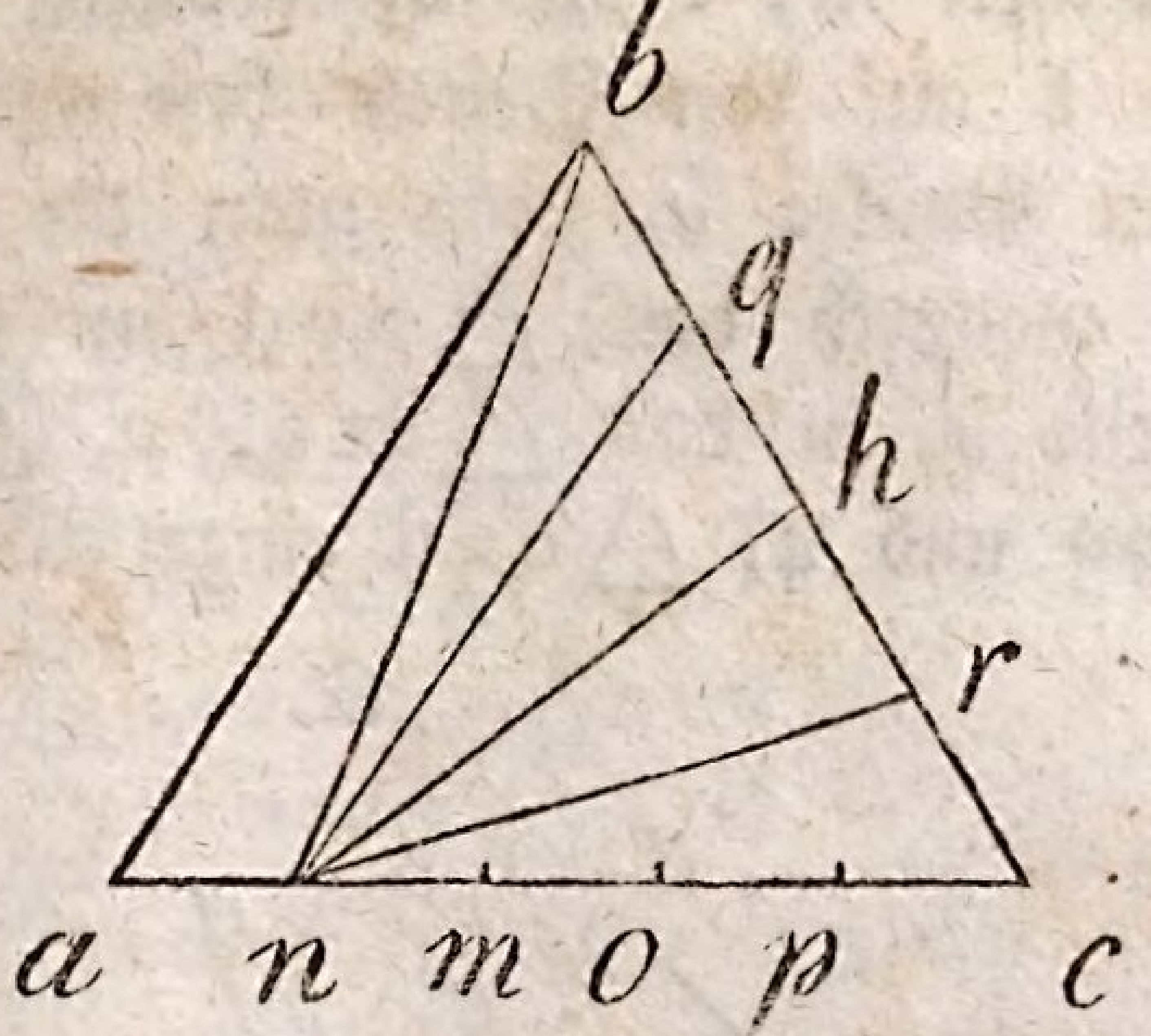
Diese $10'$ werden von b aus nach d hingesetzt und von c nach d wird alsdann die gerade Linie cd gezogen; ist dieses geschehen, so ist das $\triangle$ cdb das verlangte Dreieck, welches zu seinem Inhalte $75'$ hat.

C. Von der Eintheilung der Dreiecke in gleiche und ungleiche Theile:

a) Aus einem Theilungspunkte auf der Grundlinie; b) aus einem beliebig angenommenen Punkte auf derselben; c) aus einem Punkte in der Fläche; und d) durch Linien, welche von der einen Seite zur andern, aber nicht parallel mit irgend einer Seite, gehen.

§ 114.

Aufgabe. Ein Dreieck in 5 gleiche Theile aus einem Theilungspunkte auf der Grundlinie einzutheilen.



Auflösung. Man theile 1. die Grundlinie in 5 gleiche Theile, wie solches in n, m, o und p geschehen ist. 2. Hierauf ziehe man von b nach n, so entstehet dadurch das △ a b n, welches $= \frac{1}{5}$ △ a b c ist, weil a n $= \frac{1}{5}$ a c ist. 3. Theile man b c in 4 gleiche Theile, und ziehe 4. die Theilungslinien in n zusammen, wodurch das △ b n c in 4 gleiche Theile eingetheilt wird, und wobei alle Theilungslinien in dem Theilungspunkte n zusammenkommen.

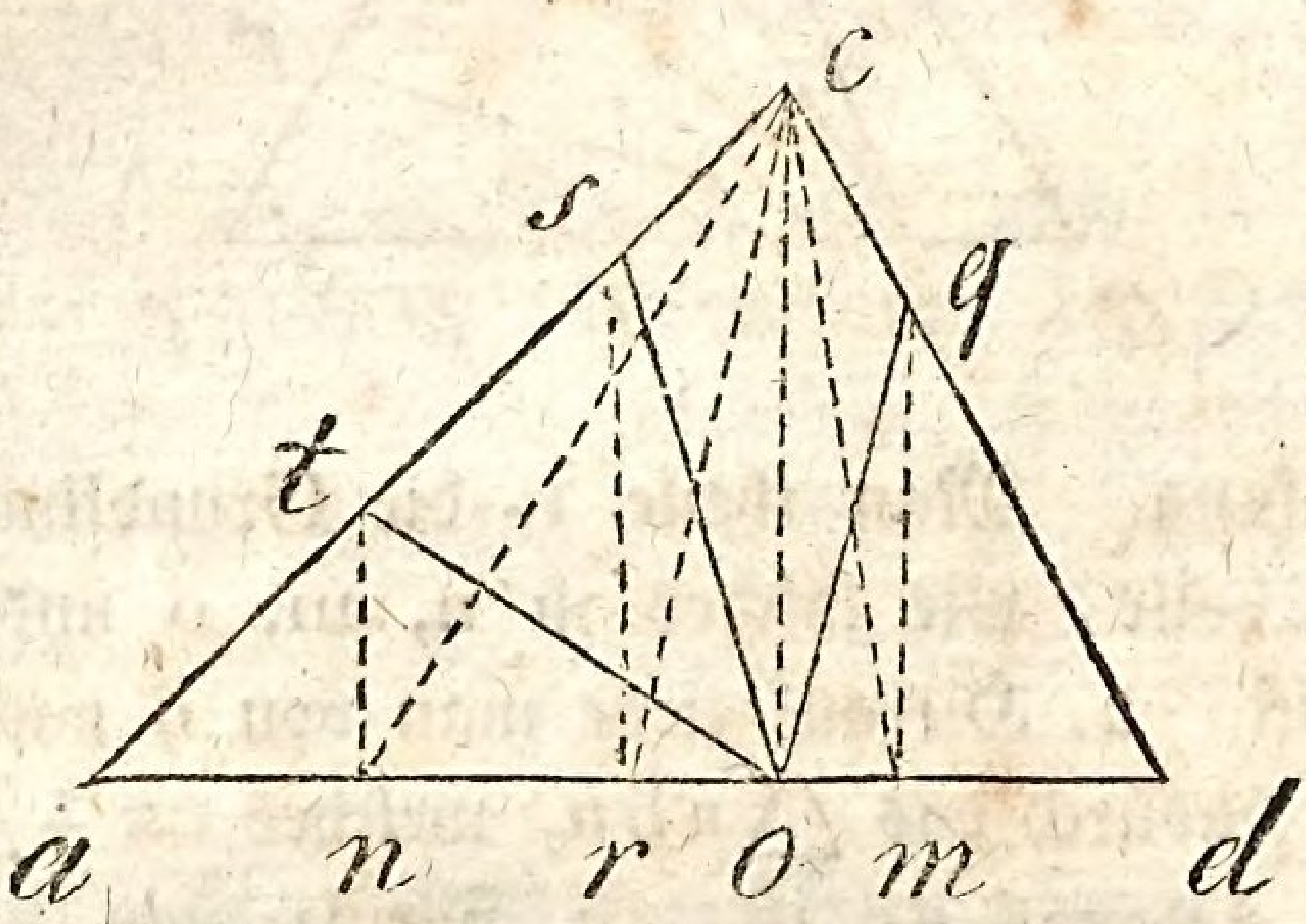
§ 115.

Aufgabe. Das Dreieck a c d in 4 gleiche Theile aus einem beliebig angenommenen Punkte o auf der Grundlinie einzutheilen.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man nehme 1. einen beliebigen Punkt auf der Grundlinie an, wie hier in o geschehen ist. 2. Theile man die Grundlinie a d in 4 gleiche Theile in n, r und m. 3. Man ziehe hierauf eine Hülfslinie aus der Spitze c nach dem Punkte o, und ziehe mit derselben Parallellinien

durch die Punkte m, r und n, wodurch die Punkte q, s und t auf den Seiten bestimmt worden. Von diesem Punkte o ziehe man die Linien ot, os, oq, wodurch das △acd in folgende 4 gleiche Theile 1. in das △ato, 2. △tos, 3. Trap. oscq und 4. △oqd eingetheilt wird.



Beweis. Man ziehe Hülfslinien von c nach m, n und r, so ist

1. △mdc = △oqd
denn △mqd = △mqd
und △mqc = △mqo nach § 44 1. Abschn.

△mqd + △mqc = △mqd + △mqo

oder

△mcd = △oqd.

Nun ist aber △mcd = $\frac{1}{4}$ △acd
also ist auch △oqd = $\frac{1}{4}$ △acd

Eben so ist auch 2. △acn = △ato
denn △atn = △atn
und △ntc = △nto

△atn + △ntc = △atn + △nto

oder

△acn = △ato.

Nun ist aber $\triangle acn = \frac{1}{4} \triangle acd$
also $\triangle ato = \frac{1}{4} \triangle acd.$

Und 3. $\triangle ncr = \triangle tos$
denn $\triangle asr = \triangle asr$
$\triangle rse = \triangle rso$

$\triangle acr = \triangle aso.$
Nun ist $\triangle acr = \frac{2}{4} \triangle acd$
also auch $\triangle aso = \frac{2}{4} \triangle acd$

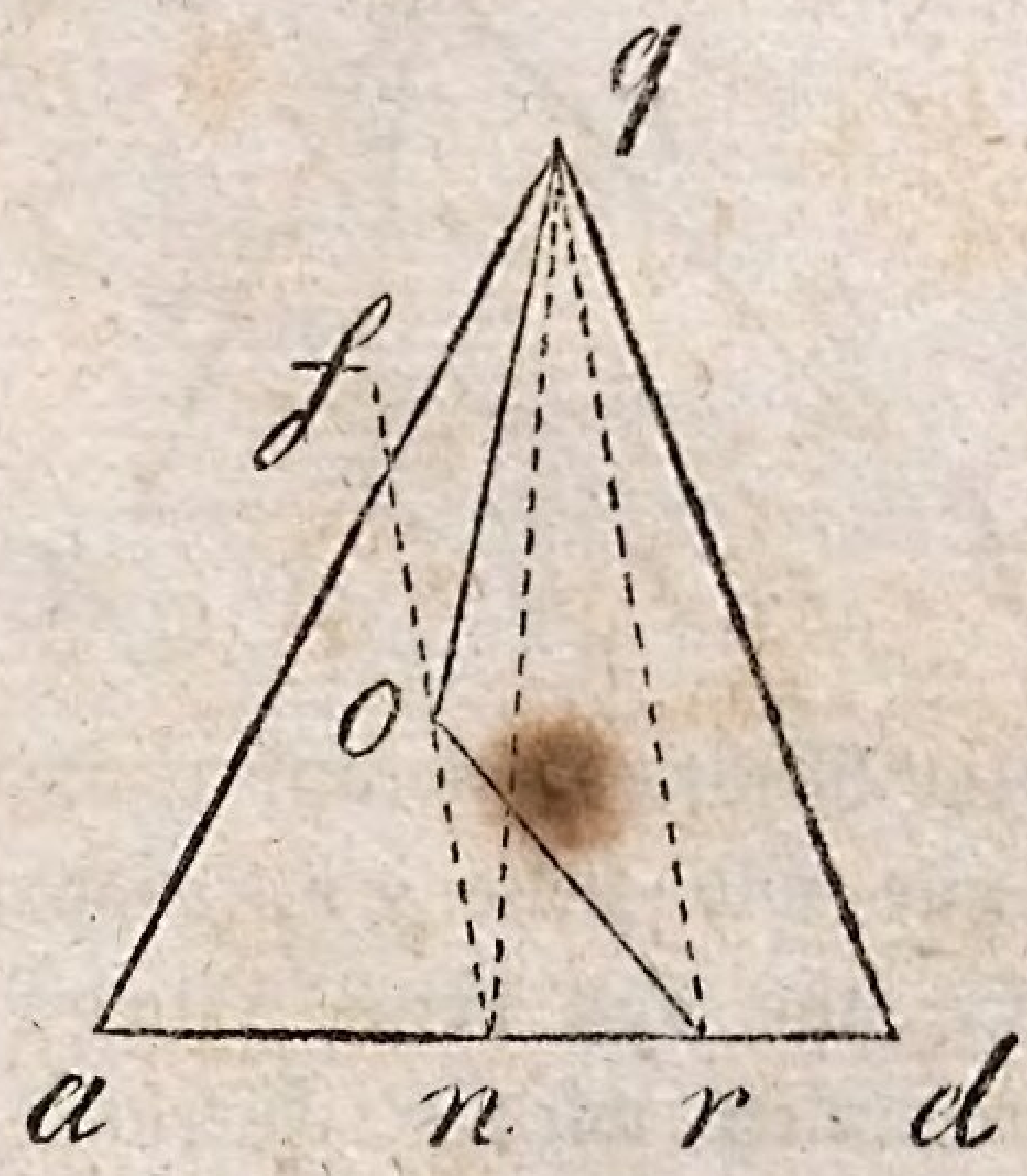
$\triangle acr - \triangle acn = \triangle aso - \triangle ato$
das ist
$\triangle ncr = \triangle tos = \frac{1}{4} \triangle acd.$

Wenn nun die Dreiecke ato, ots und oqd = $\frac{3}{4}$ acd sind, so muß Trap. oscq = $\frac{1}{4} \triangle acd$ sein, und folglich ist das $\triangle acd$ in 4 gleiche Theile aus dem Punkte o eingetheilt worden.

§ 116.

Aufgabe. Das Dreieck aqd aus einem Punkte o in der Fläche in zwei gleiche Theile einzutheilen.

Auflösung. 1. Man theile die Grundlinie des Dreiecks aqd in zwei gleiche Theile. 2. Ziehe man von dem angenommenen Theilungspunkte o eine Hülfslinie nach der Mitte von ad nach n, und mit dieser ziehe man 3. eine Hülfs=



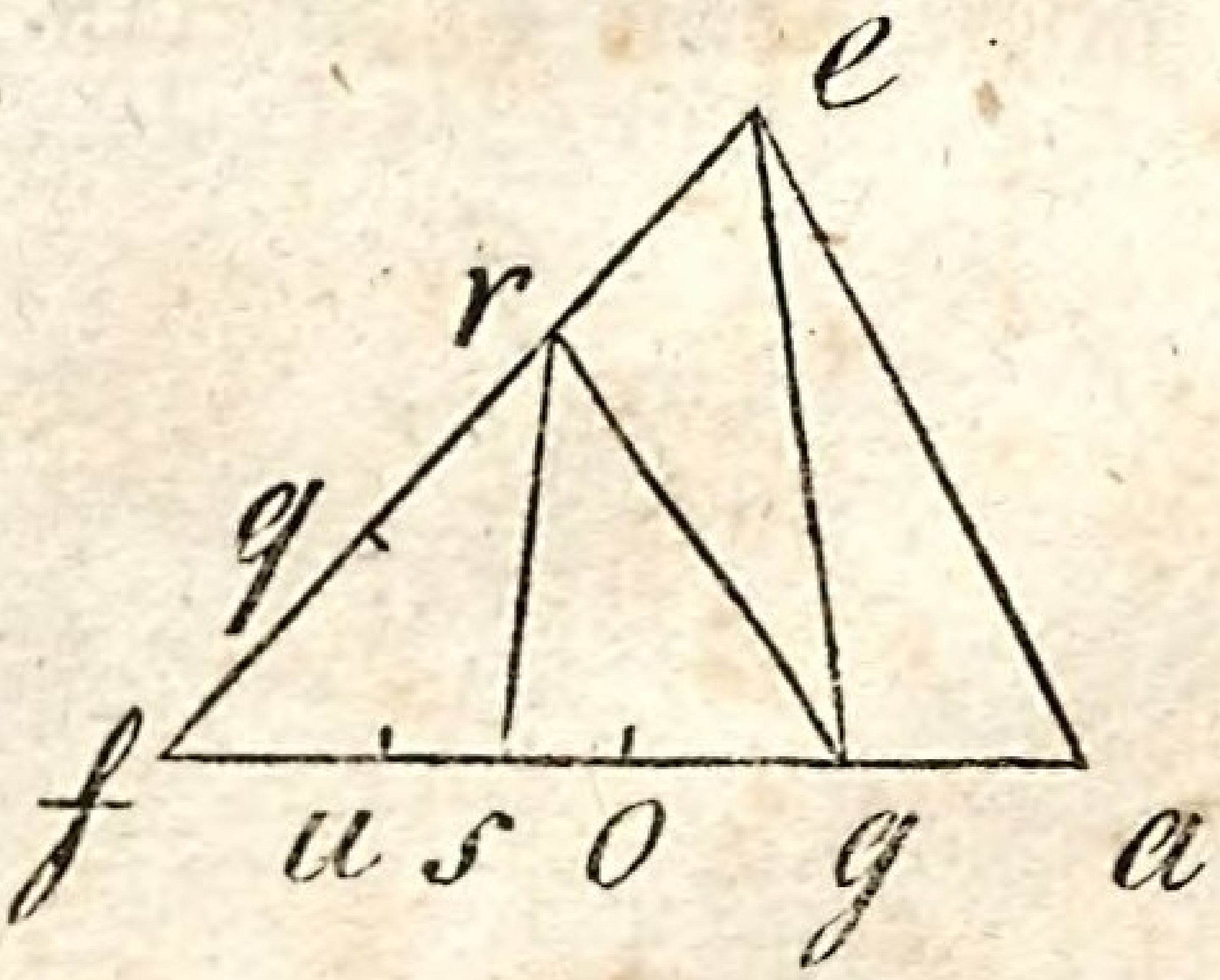
parallellinie durch die Spitze q, wodurch alsdann der Punkt r auf der Grundlinie bestimmt wird, nach welchem von o die Linie or hingezogen werden muß. Hierauf ziehe man auch die Linie oq, so ist das Trapez. qord $= \frac{1}{2} \triangle$ aqd.

Beweis. $\triangle$ nqd = Trap. qord
denn $\triangle$ rqd = $\triangle$ rqd
und $\triangle$ nqr = $\triangle$ roq. § 44. 1. Abschn.

$\triangle$ rqd + $\triangle$ nqr = $\triangle$ rqd + $\triangle$ roq
oder
$\triangle$ nqd = Trap. qord.
Da nun $\triangle$ nqd $= \frac{1}{2} \triangle$ aqd ist,
so ist auch Trap. qord $= \frac{1}{2} \triangle$ aqd.

§ 117.

Aufgabe. Ein Dreieck in 4 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien von der einen Seite zur andern, aber nicht parallel, hingehen.



Auflösung. Man theile 1. die Linie af in 4 gleiche Theile und ziehe die Linie eg, so wird dadurch von dem $\triangle$ aef ein Theil = $\triangle$ aeg abgeschnitten, wodurch das $\triangle$ egf übrig bleibt. Hierauf theile man 2. ef in 3 gleiche Theile und ziehe gr, wodurch das $\triangle$ egr gebildet, und von dem $\triangle$ egf der dritte Theil weggenommen wird. Hierauf theile man endlich 3.

das noch übrig gebliebene △ g e f in 2 gleiche Theile, wie es durch die Theilungslinie r s geschehen ist, so wird dadurch das △ a e f in die verlangten Theile eingetheilt worden sein.

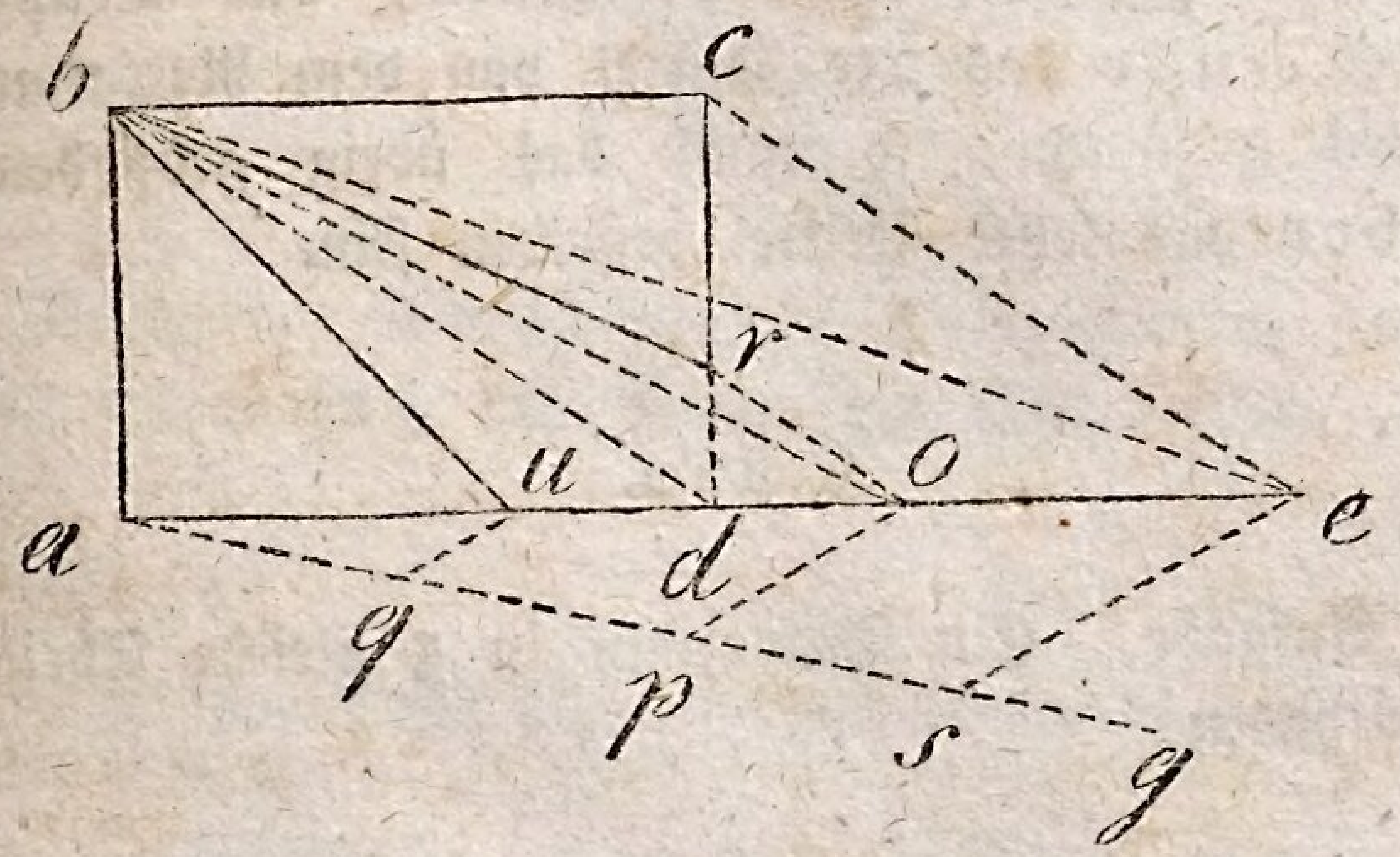
D. Von der Eintheilung der Vierecke aus einer beliebigen Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 118.

Um eine solche Figur in solche Theile eintheilen zu können, so muß man sie nach dem § 55 des 1 sten Abschnittes zuerst in ein Dreieck verwandeln, hierauf dies Dreieck in die verlangten Theile eintheilen, und diese Theile durch neue Verwandlungen der Dreiecke in das Viereck bringen.

§ 119.

Aufgabe. Ein Rektangel in 3 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man verwandele 1. das □ abcd in das △ abe nach dem § 56. 2. Man theile die Grundlinie des △ abe in 3 gleiche Theile in u, o und e. 3. Man ziehe von b nach u eine gerade Linie, so ist △ abu = $\frac{1}{3}$ des △ abe und = $\frac{1}{3}$ des □ abcd, weil △ abe = □ abcd ist, und △ abu ganz in dem □ abcd liegt. 4. Man ziehe die Linie bo, so ist △ ubo ebenfalls = $\frac{1}{3}$ des △ abe; weil aber der Theil bdo nicht ganz in dem □ abcd liegt, so muß dieser durch eine Verwandlung in ein anderes Dreieck in das Rektangel gebracht werden. Deswegen ziehe man 5. mit der Diagonallinie bd eine Parallellinie durch den Punkt o bis r, so ist das Trapezoides budr = △ ubo.

(Siehe Fig. auf voriger Seite.)

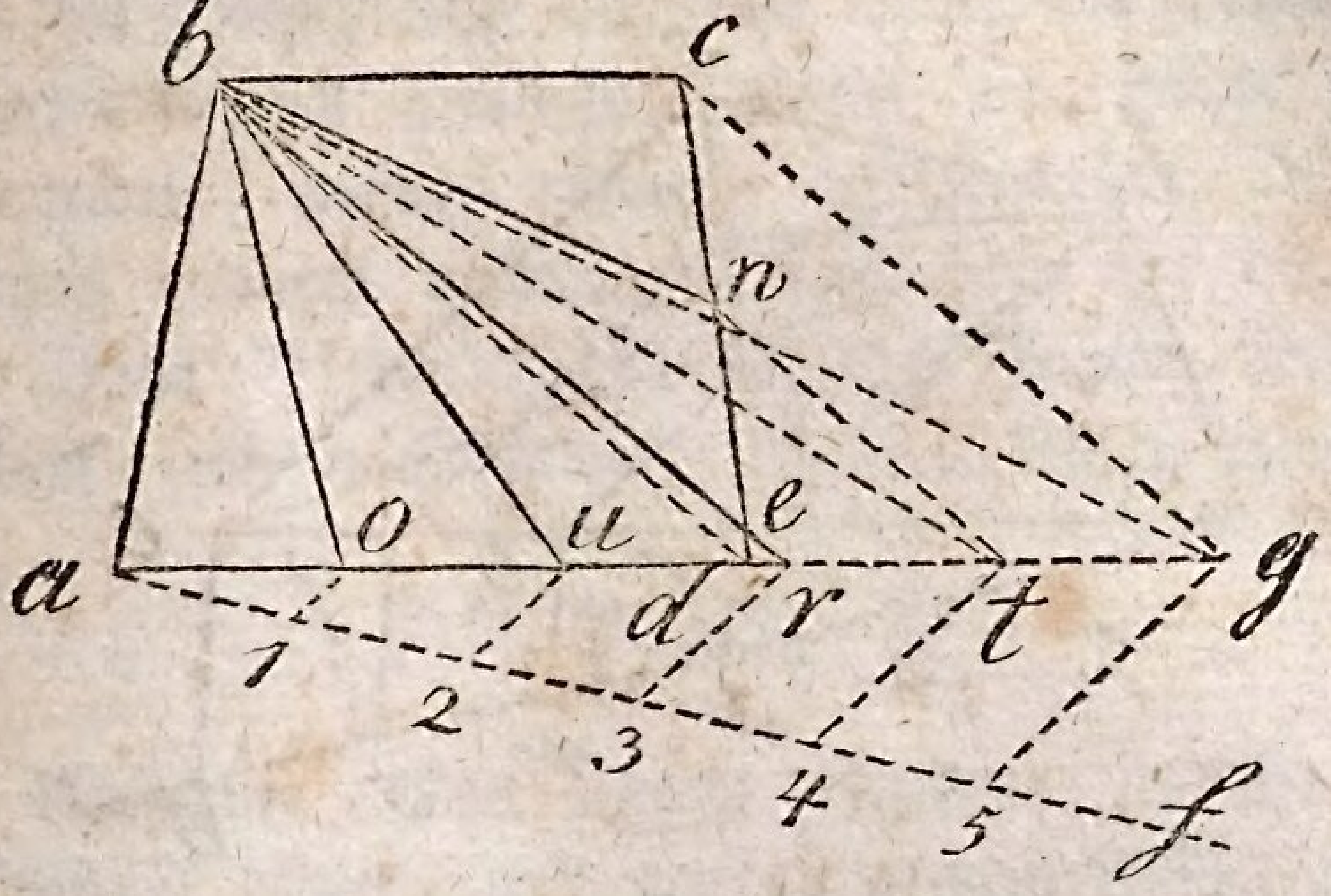
Denn △ ubd = △ ubd
△ dbo = △ bdr nach § 44. 1. Abschn.

also △ ubd + △ dbo = △ ubd + △ bdr
oder
△ ubo = Trap. budr.

Da nun △ abu das 1ste Drittel, das Trapezoides budr das 2te Drittel von dem Rektangel abcd ausmacht, so muß das übrig gebliebene △ bcr das letzte Drittel desselben sein.

§ 120.

Aufgabe. Ein Trapezium in 5 gleiche Theile einzutheilen.



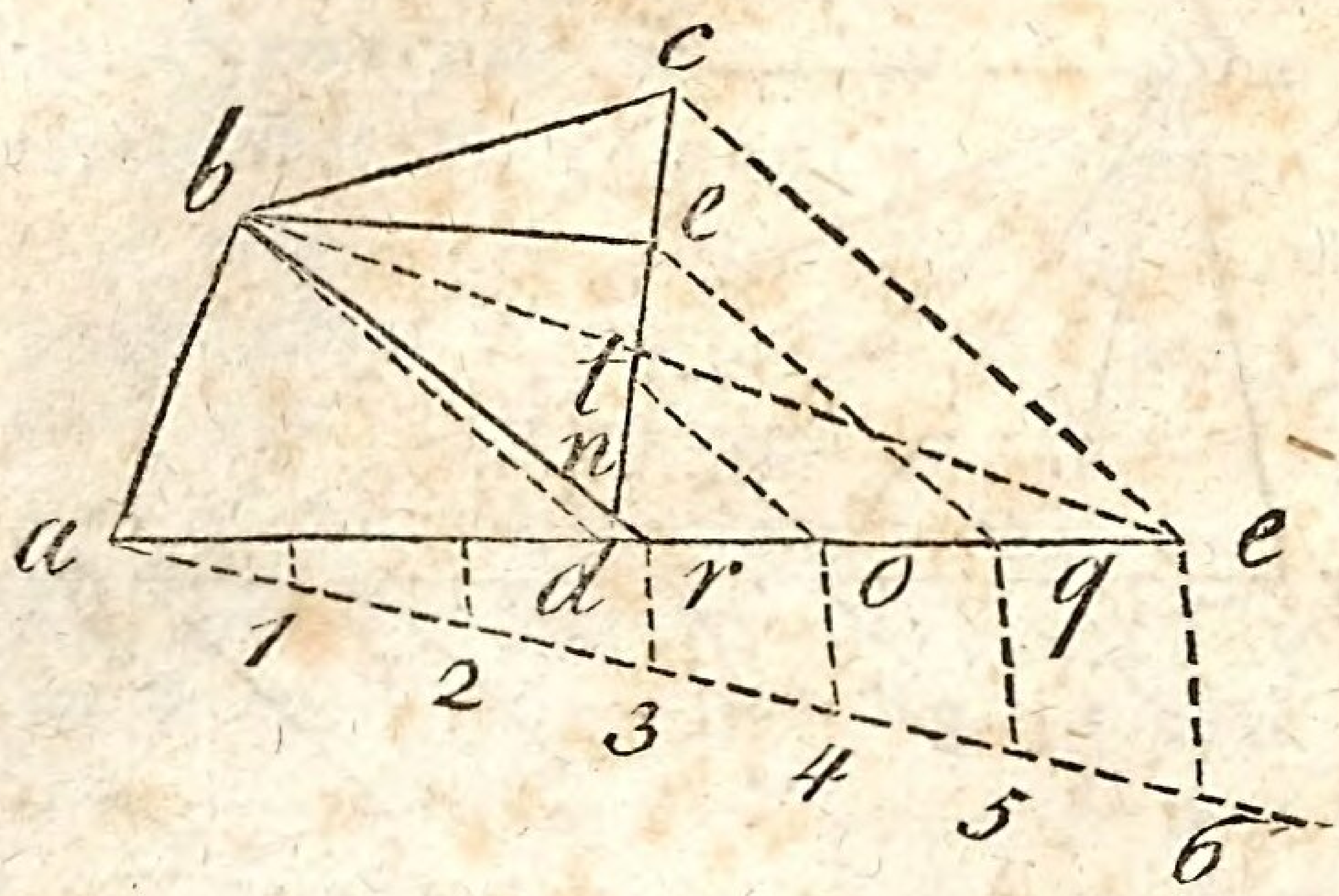
Auflösung. Man verwandle 1. das Trapez. abcd in das △abg, theile 2. die Grundlinie ag in 5 gleiche Theile, ziehe 3. aus b nach o und u gerade Linien, so werden dadurch die beiden Theile abo und obu, welche in das Trapezoides fallen, abgeschnitten. Hierauf verwandle man durch die Diagonallinie bd und durch die damit parallel gezogenen geraden Linien re und tn das △ubr in das Trapez. bude und das △brt in das △ben *), so bleibt das △bcn als der letzte fünfte Theil von dem Trap. abcd übrig.

§ 121.

Aufgabe. Ein Trapezoides so einzutheilen, daß A = ½, B = ⅓ und C = den Rest erhält.

---

*) Der Beweis von diesen Verwandlungen ist dem vorhergehenden gleich.



Auflösung. Man addire beide Theile von A und B zusammen, so findet man, daß C = $\frac{1}{6}$ bekommt. Hierauf theile man die Grundlinie a e des △ a b e, worin das Trapezoides verwandelt worden ist, in 6 gleiche Theile, und verfahre darauf eben so, wie vorhin angeführt und in der Figur gezeigt ist. Auf diese Weise erhält A den Theil a b n d, B den Theil n b e und C den Theil b e c.

§ 122.

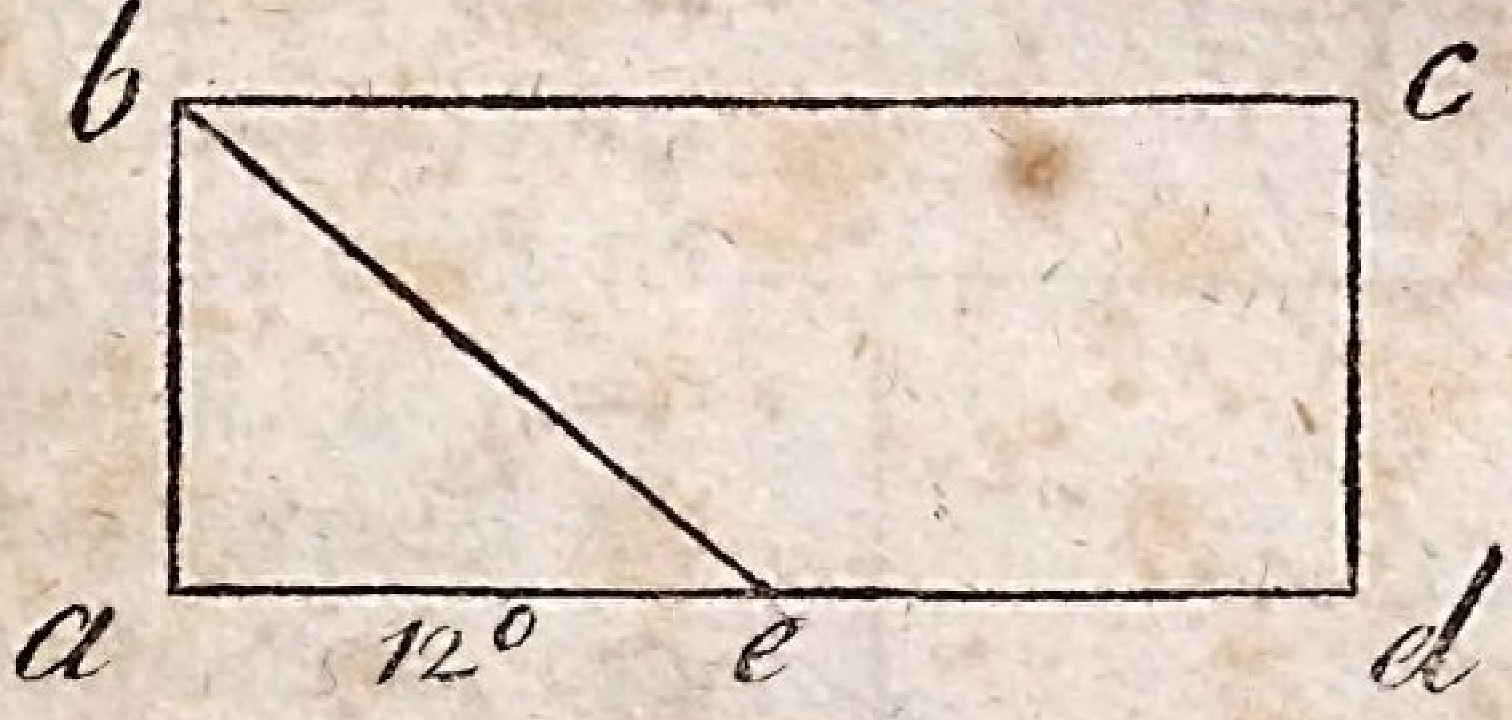
Zusatz. Soll von einem Viereck, welches ein Parallelogramm ist, ein Stück abgeschnitten werden, so sucht man durch die Berechnung nach dem § 113 die Grundlinie des abzuschneidenden Stücks, und nimmt solche doppelt, weil bei der Verwandlung einer solchen Figur in ein Dreieck die Grundlinie desselben doppelt so lang wird, als die des Parallelogramms ist.

Bei der Abschneidung eines Stücks von einem Trapezium und Trapezoides aber muß zuvor, ehe

man die Berechnung anstellen kann, die Länge der Grundlinie des Dreiecks, worin eine solche Figur verwandelt werden kann, ausgemittelt werden, welches dadurch geschiehet, daß man mit der halben Höhe *) der Figur in den Inhalt derselben dividirt, wie nachfolgende Beispiele lehren werden.

§ 123.

Aufgabe. Von einem Garten, welcher ein Rektangel bildet, und der zu seinem Flächenraume 2 Morgen in sich faßt, und eine Länge von 24 Ruthen hat, ein Stück von einem halben Morgen abzuschneiden.



Auflösung. Man setzt auf: 2 Morgen, das ist 240 □° haben eine Länge von 24°, was muß ½ Morgen, das ist 60 □° für eine Länge geben?

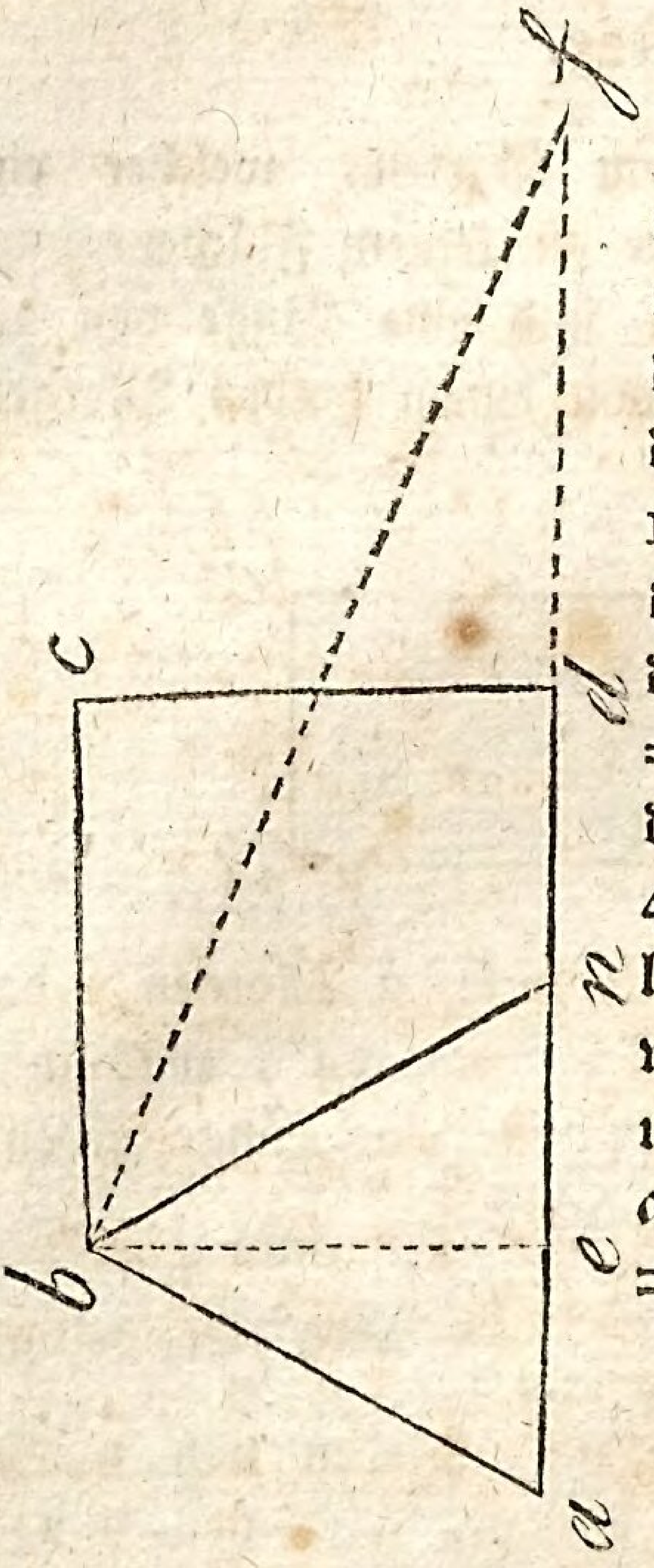
$$240^\circ : 24^\circ = 60^\circ : x$$

$$x = \frac{24 : 60^\circ}{240} = 6^\circ$$, doppelt genommen = 12°. Diese 12° werden von a aus nach e hingetragen, und alsdann wird von b nach e eine gerade Linie gezogen, so ist △ a b e das verlangte Stück.

*) Den Grund davon siehe im 3ten Abschnitte.

§ 124.

Aufgabe. Von einem Garten, welcher ein Trapezium bildet und der zu seinem Inhalte $440\,\square^{\circ}$ und zu seiner Breite b e $= 17^{\circ}\,6'$ hat, soll ein Stück von $163^{\circ}\,68'$ abgeschnitten werden.



Auflösung. Man dividire, um die Grundlinie a f des $\triangle$ a b f, worin das Trapezium verwandelt worden ist, zu finden 1. mit der halben Breite des Trapeziums, die gleich der Höhe des $\triangle$ a b f ist $= 8^{\circ}\,8'$ in den Inhalt des Trapeziums d. i. in 440°, wodurch die Grundlinie a f $= 50^{\circ}$ gefunden wird. Hierauf setze man, um die Grundlinie des abzuschneidenden Stückes $=$ a n zu finden, 2. auf:

$$440^{\circ}\,00' : 50^{\circ}\,0' = 163^{\circ}\,68' : x$$

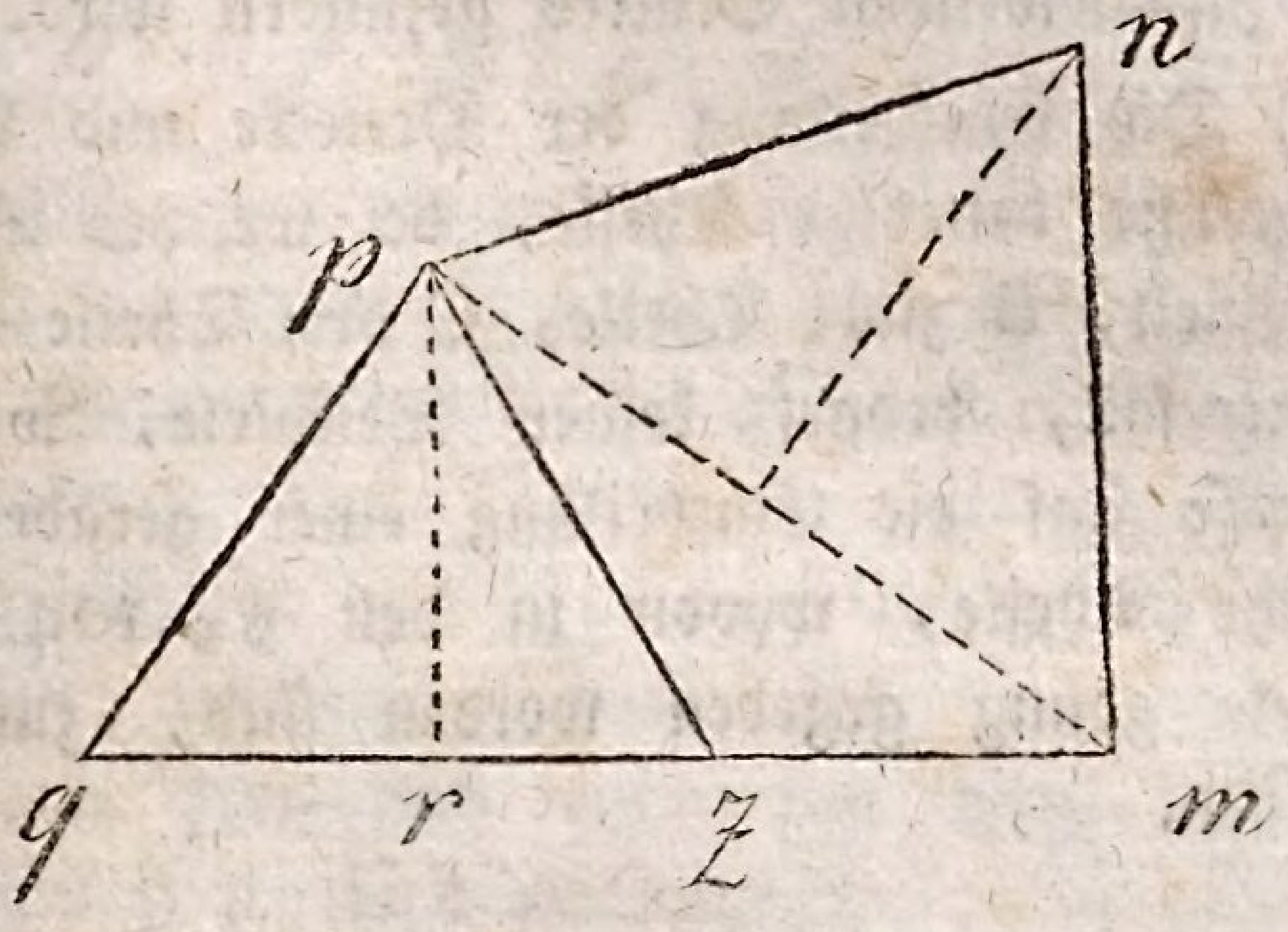
$$x = \frac{16368' \times 500'}{440^{\circ}\,00'} = 18^{\circ}\,6' = an$$

diese Weite von $186'$ trage man von a nach n,

und ziehe die Linie bn, so ist △abn das verlangte Stück von 163°68′.

§ 125.

Aufgabe. Von einem Trapezoides, dessen Inhalt 392°10′ ist, und welches zur einen Breite = pr, 13°8′ hat, soll ein Stück von 124°20′ abgenommen werden.



Auflösung. Man dividire ebeefalls 1. mit der halben Höhe oder Breite = 69′ in den Inhalt des Trapezoides, um die Grundlinie des Dreiecks zu finden, worin solches verwandelt werden könnte, welches aber hier nicht geschehen ist, weil man durch die Berechnung die Grundlinie ausgemittelt hat, und die dadurch 568′ lang gefunden worden ist. 2. Setze man auf:

$$392°10′ : 568 = 124°20′ : x$$

$$x = \frac{12420′ \times 568′}{39210′} = 18° = qz$$

diese Länge von 18° trage man von a nach z,

und ziehe die Linie pz, so ist das $\triangle qpz$ das verlangte Stück von $124^{\circ}20\,\square'$.

§ 126.

Zusatz. a) Diese drei letzten Aufgaben in den § 123—125 lassen sich weit leichter dadurch auflösen, daß man mit der halben Höhe der Figur in den Inhalt des abzuschneidenden Stückes dividirt, wodurch sogleich die Länge oder Grundlinie des abzuschneidenden Stückes gefunden wird.

b) Die Eintheilung der Dreiecke und Vierecke in ungleiche beliebige Theile, bei welcher A etwa einen Theil, B zwei Theile, C drei Theile u. s. w. erhalten soll, bedarf keiner Beispiele, weil sich alle diese auf die Eintheilung einer geraden Linie in solche Theile, wovon in den §§ 104—109 Beispiele genug gegeben worden sind, zurückführen lassen.

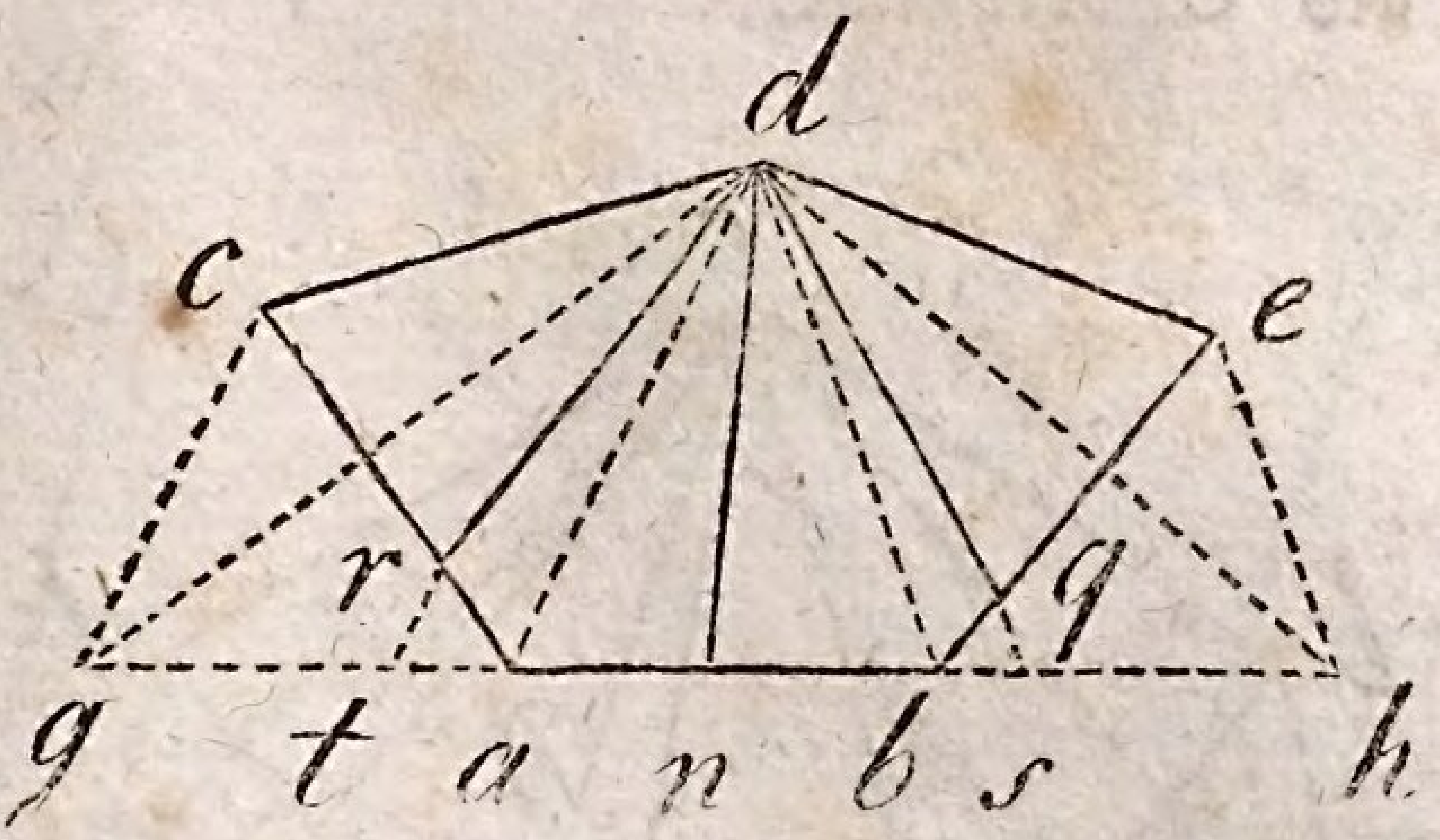
E. Von der Eintheilung der Vielecke aus einer beliebigen Spitze in gleiche und ungleiche beliebige Theile.

§ 127.

Zusatz. Man verwandelt das Vieleck ebenfalls in ein Dreieck, theilt hierauf die Grundlinie desselben in die verlangten Theile und bringt diejenigen Theile, welche außerhalb des Vielecks fallen, und Dreiecke sind, durch neue Verwandlungen in das Vieleck.

§ 128.

Aufgabe. Ein Fünfeck in 4 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man verwandle 1. das Fünfeck acdeb in das △gdh. Hierauf theile man 2. die Grundlinie gh in 4 gleiche Theile, und verwandle 3. das △adt in das △adr und das △bds in das △bdq, so ist die Aufgabe aufgelöset, indem cdr den 1sten, rdn den 2ten, ndq den 3ten und qde den 4ten Theil von dem Fünfeck acdeb ausmachen.

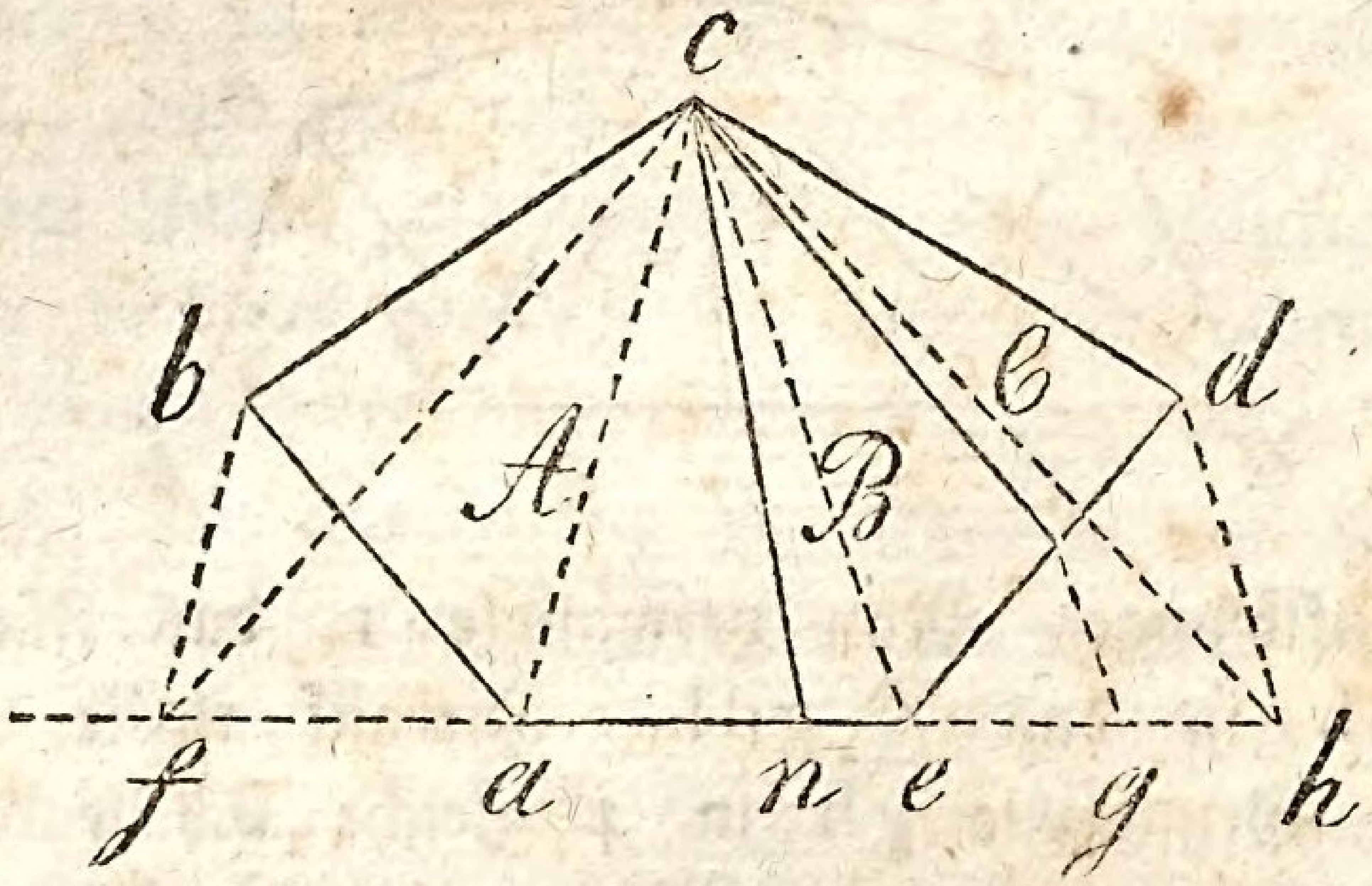
Beweis. △ndt = Trapez. nard
denn △nad = △nad
und △atd = △ard. § 44. 1ster Abschn.

△nad + △atd = △nad + △ard
also
△ndt = Trapez. nard
und △ndt = $\frac{1}{4}$ des Fünfecks,

also ist auch Trap. nard = $\frac{1}{4}$ des Fünfecks. Und eben so wird bewiesen, daß △nbs = dem Trap. ndqb und = $\frac{1}{4}$ des Fünfecks acdeb sei; und folglich müssen die △rcd und △qde die beiden andern Theile desselben ausmachen.

§ 129.

Aufgabe. Ein Fünfeck so einzutheilen, das A noch einmal so viel als B, und B noch einmal so viel als C bekommt.



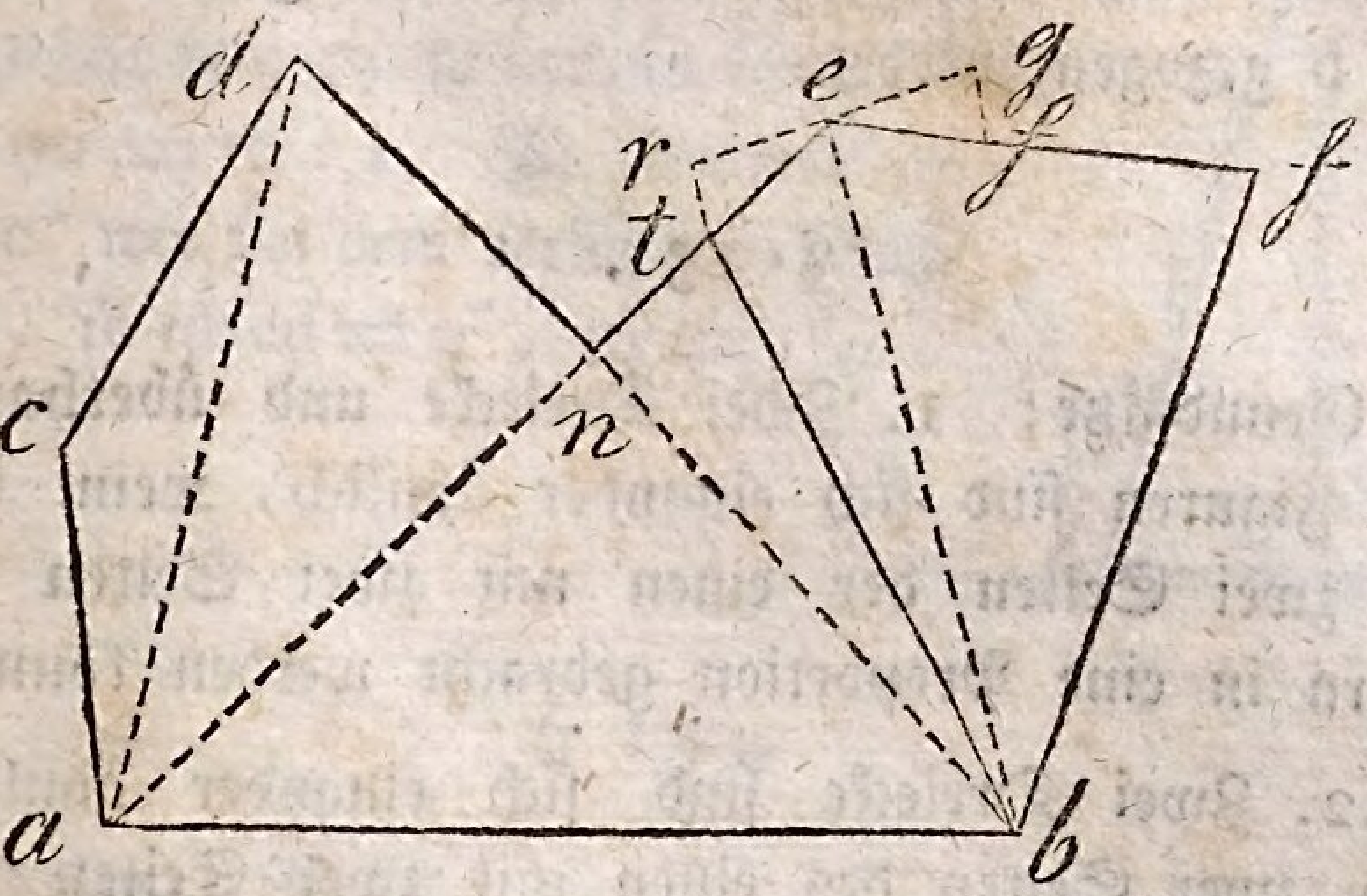
Auflösung. Man zähle 1. die Theile zusammen, welche sieben ausmachen, und theile 2. die Grundlinie des △ fch in 7 gleiche Theile. Hierauf gebe man von diesen Theilen A = $\frac{4}{7}$; B = $\frac{2}{7}$ u. C = $\frac{1}{7}$, so ist die Theilung gehörig geschehen.

§ 130.

Aufgabe. Von einem Siebeneck ein Stück abzuschneiden.

Auflösung. Hierbei muß man bestimmen 1. wo das Stück weggenommen werden soll, 2. ob das wegzunehmende Stück ein Dreieck sein soll oder nicht. Soll dies Stück ein Dreieck sein und am Ende abgeschnitten werden, so untersuche man, ob das daselbst sich befindende Dreieck dem abzuschneidenden Stücke am Raume gleich sei. Ist dieses

der Fall, so ist die Aufgabe aufgelöset, ist aber solches nicht der Fall, so untersucht man, um wie viel das Dreieck größer oder kleiner als das abzuschneidende sei.



Ist dieses Stück größer, weswegen dem △ bef noch ein Stück hinzugefügt werden muß, so setzt man die gefundene Höhe außerhalb des △ bef nach r hin; ist es aber kleiner, so setzt man solche innerhalb des △ bef nach g hin. Um aber die Höhe zu finden, so dividirt man mit der halben Grundlinie, das ist mit $\frac{1}{2}$ be in den fehlenden Rest. Es sei das abzuschneidende Stück $= 1^{\circ}\,38'$ und das △ bef $= 92'$, so muß dem △ bef noch ein Stück von $46'$ angesetzt werden; deswegen dividire man $46'$ durch $\frac{1}{2}$be$=11'5''$. Dies giebt $\frac{46'00''}{115} = 4'\,0''$, und ist gleich der zu suchenden Höhe. Diese wird senkrecht auf be in e nach r hingesetzt, und durch den Punkt r wird eine Parallellinie mit be gezogen, welche in dem Punkt t fällt. Von t wird hierauf eine eine gerade Linie nach b gezogen,

wodurch das $\triangle$ t b e entstehet, welches = 46′ ist. Soll das Stück von dem $\triangle$ b e f abgezogen werden, so muß durch den Punkt g eine Parallellinie mit e b nach s, und von da eine gerade Linie nach b gezogen werden.

§ 131.

Grundsätze: 1. Zwei Dreiecke und überhaupt zwei Figuren sind sich einander ähnlich, wenn immer zwei Seiten der einen mit zwei Seiten der andern in eine Proportion gebracht werden können.

2. Zwei Dreiecke sind sich einander ähnlich, wenn zwei Seiten des einen mit zwei Seiten des andern in eine Proportion gebracht werden können und wenn dabei die Winkel, welche von diesen Seiten eingeschlossen werden, sich gleich sind.

3. Wenn die drei Winkel einzeln genommen in dem einen Dreiecke eben so groß sind, als die drei Winkel einzeln genommen in dem andern Dreiecke.

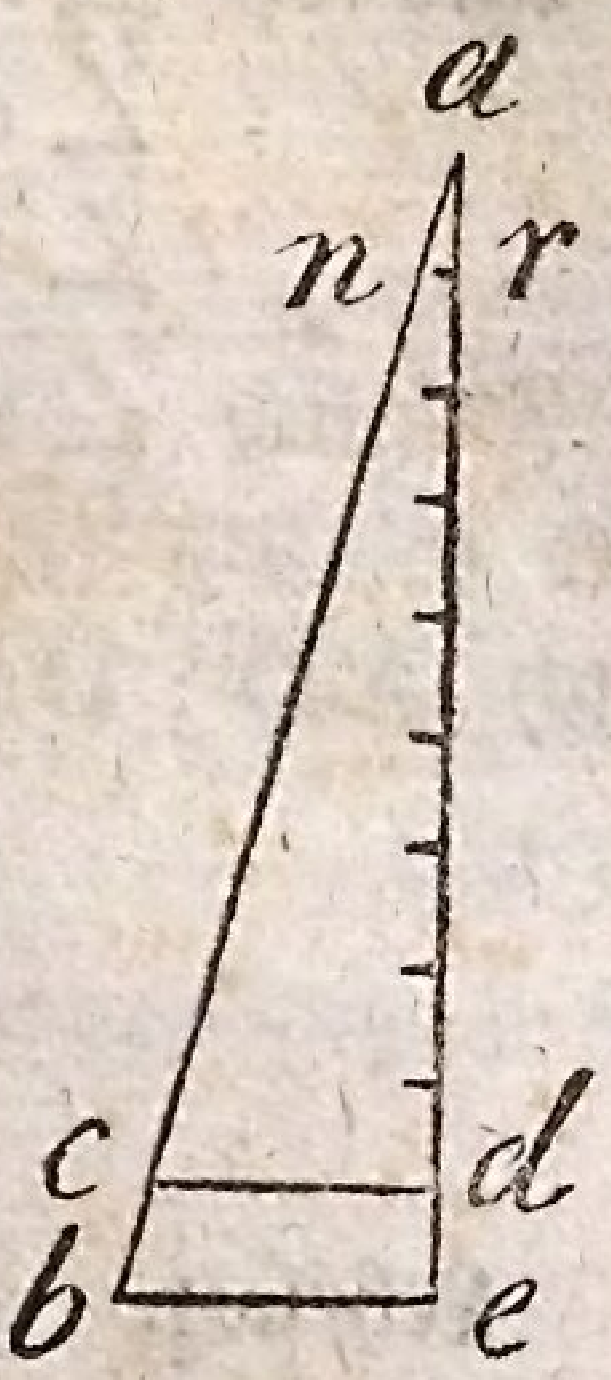
§ 132.

Zusatz. In allen drei Fällen folgt, daß ähnlichen Seiten gleiche Winkel und gleichen Winkeln ähnliche Seiten gegenüber stehen.

§ 133.

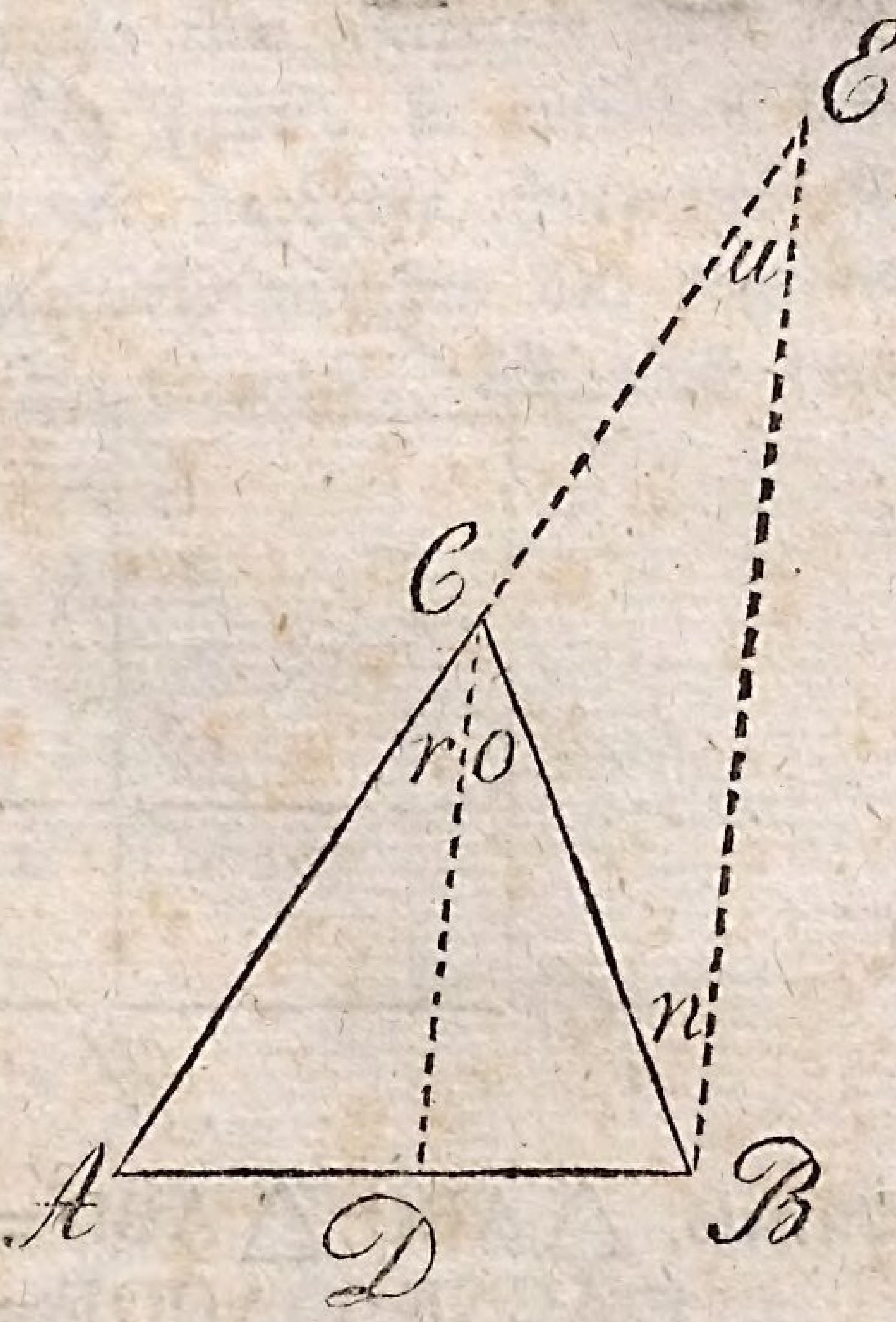
Zusatz. Aus dem § 131 No. 3 folgt demnach, daß $\triangle$ a b e ∼ $\triangle$ a c d sei, deswegen verhält sich

ae : ad = be : cd. Da nun ae : ad = 10 : 9, so muß sich auch be : cd = 10 : 9 verhalten. Eben so verhält sich ae : ar = be : nr; Verhält sich nun ae : ar = 10 : 1, so verhält sich auch be : nr = 10 : 1. Ist demnach be = 10″ wie bei dem verjüngten Maßstabe, so ist cd = 9″, nr = 1″.



§ 134.

Lehrsatz. Wenn eine Linie aus der Spitze, wodurch diese in zwei gleiche Theile getheilt, nach der Grundlinie gezogen wird, so wird solche den Seiten proportionirt abgeschnitten. Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhält:
AD:DB = AC:CB



Beweis. Man verlängere die Seite AC und ziehe BE parallel, so verhält sich

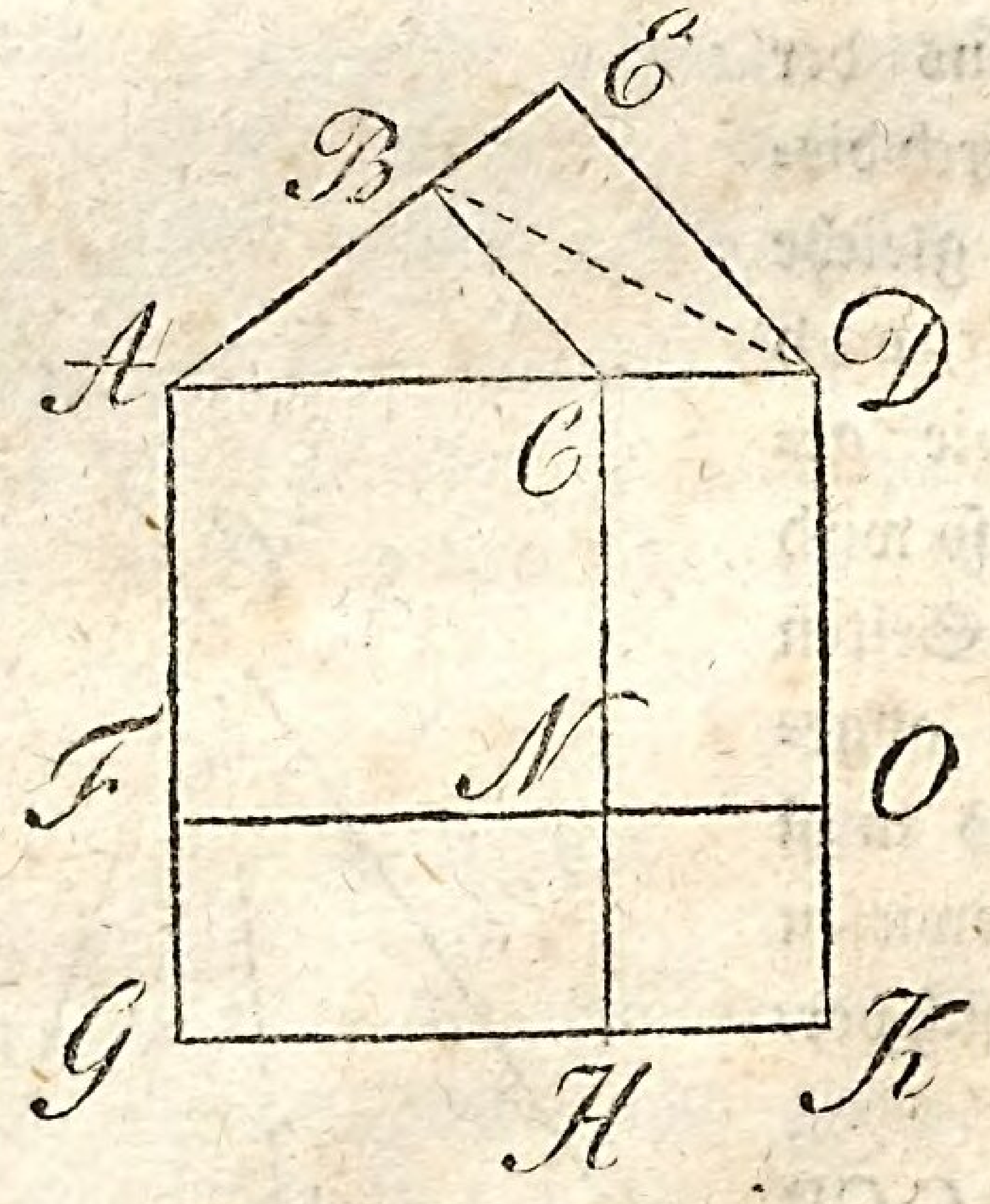
AD : DB = AC : CB.

Und da $\angle$ n = o. Weil es Wechselswinkel sind.
$\angle$ o = r. Vermöge der Bedingung.
$\angle$ r = u. Der äußere = dem innern $\angle$

Folglich $\angle$ n = u,
und folglich ist CB = CE, deswegen verhält sich auch AD : DB = AC : CB.

§ 135.

Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhält $\triangle ABC : \triangle AED = AC^2 : AD^2$.



Beweis. $\triangle ABC : \triangle ABD = AC : AD.$
$\square ACNF : \square ADOF = AC : AD.$

Folglich $\triangle ABC : \triangle ABD = \square ACNF : \square ADOF.$
Da aber $\square ADOF = \square ACHG$

so verhält sich $\triangle ABC : \triangle ABD = \square ACNF : \square ACHG$

Ferner $\triangle ABD : \triangle AED = AB : AE$
$= AC : AD$
$\square ACHG : \square ADHG = AC : AD.$

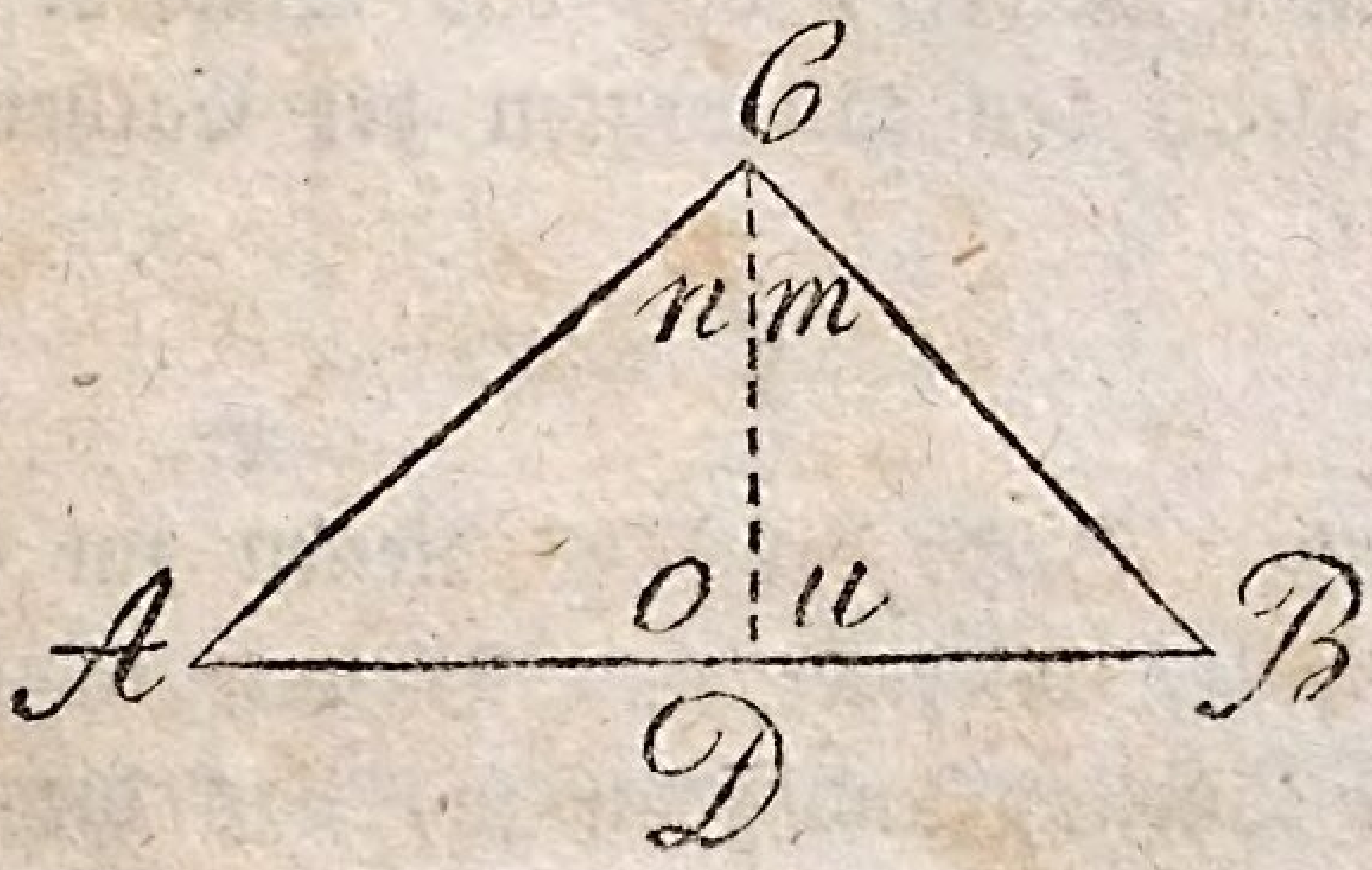
$\triangle ABD : \triangle AED = \square ACHG : \square ADKG$
und da $\triangle ABC : \triangle ABD = \square ACNF : \square ACHG$

$\triangle ABC : \triangle AED = \square ACNF : \square ADKG$
$= AC^2 : AD^2.$
Siehe Anmerkung § 98.

§ 136.

Lehrsatz. Wenn man aus der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse desselben ziehet, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke und die senkrechte ist die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Stücken der Hypothenuse. Es muß demnach bewiesen werden, daß

1. $\triangle ACB \sim \triangle ACD$
2. $\triangle ACB \sim \triangle CDB$
3. $\triangle ACD \sim \triangle CDB$
4. $AD : CD = CD : BD.$



Beweis. Da $\angle A = \angle A$
$\angle C = \angle o = R\ 90°$
$\angle B = \angle n$

so ist 1. $\triangle ACB \sim \triangle ACD$. nach § 131. 3.
Und da $\angle B = \angle B$
$\angle C = \angle u$
$\angle A = \angle m$

so ist 2. $\triangle ACB \sim \triangle CDB$. Hieraus
folgt 3. $\triangle ACD \sim \triangle CDB$, und
4. $AD : CD = CD : BD$ nach § 132.
Ferner 5. $AC : AD = AB : AC$.
6. $AD : AC = AC : AB$.
Und 7. $CB : BD = AB : CB$.

§ 137.

Zusatz. Ist $AC = a$,
$BC = b$,
$AB = d$,

so ist $a^2 = AD \times AB$.
$b^2 = BD \times AB$.

$$a^2 + b^2 = (AD + BD)\,AB.$$

Da aber $AD + BD = AB = d$ ist,
so ist $a^2 + b^2 = d \times d = d^2$.
Ein zweiter Beweis, daß das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der Catheten ist.

§ 138.

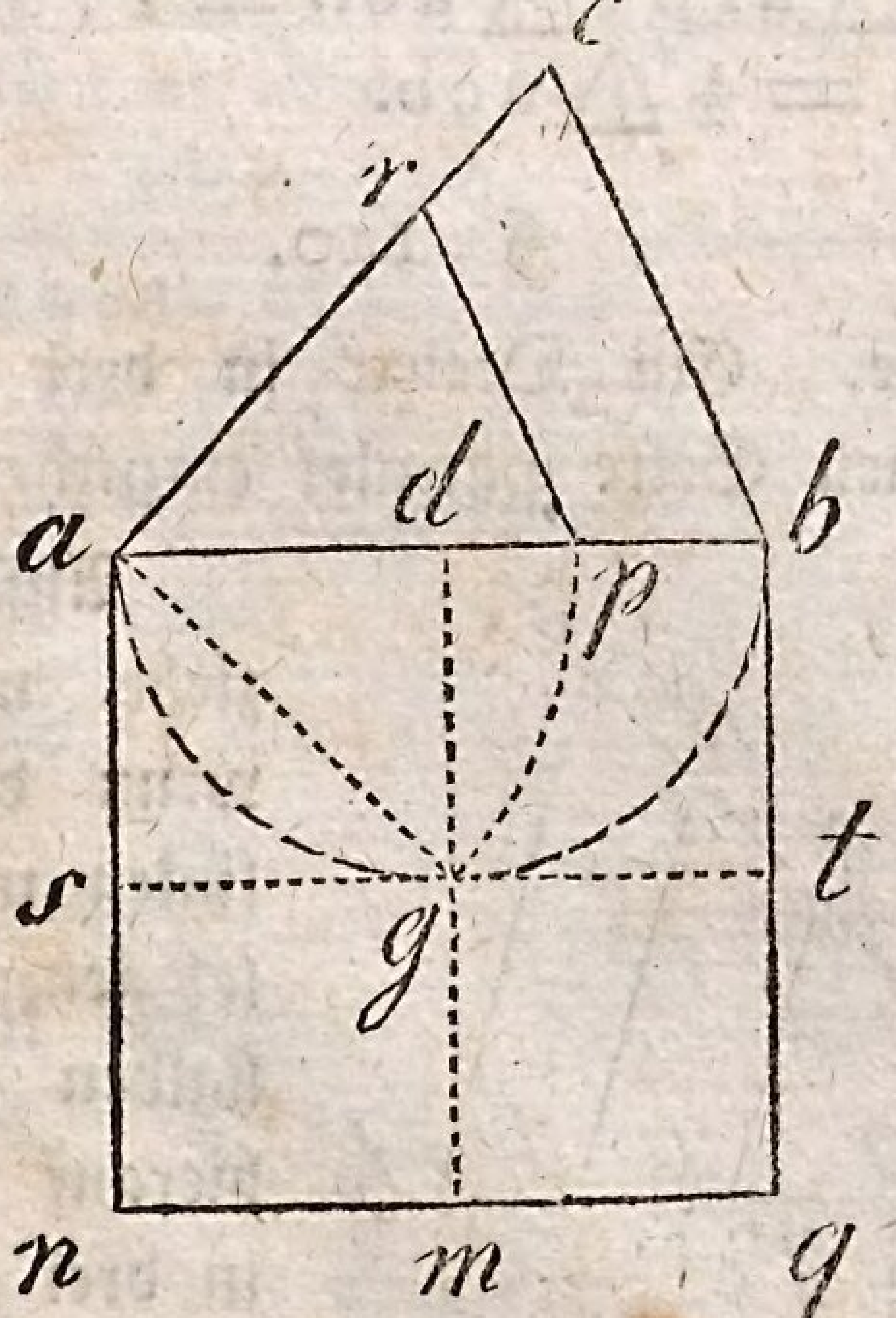
Zusatz. Beide Lehrsätze dienen zur Eintheilung der Dreiecke, Vierecke und Vielecke in gleiche und ungleiche Theile, und zwar so, daß die Theilungs=

linien mit einer und mit allen Seiten parallel laufen, und der letztere besonders noch zur Aufsuchung der mittlern Proportional-Linien und zur Verwandlung einer jeden geradlinigen Figur in ein Quadrat.

A. Von der Eintheilung der Dreiecke in gleiche und ungleiche beliebige Theile, bei welchen die Theilungs-Linien mit einer Seite parallel laufen.

§ 139.

Aufgabe. Ein Dreieck in zwei gleiche Theile mit einer beliebigen Seite parallel einzutheilen.



Auflösung. Soll die Theilungslinie mit cb parallel gehen, so muß man um ab oder um ac

einen halben Kreis ziehen, und die Linie, um welche dieser gezogen ist, in zwei gleiche Theile theilen, wie solches mit ab in d geschehen ist. Aus diesem Theilungspunkte läßt man eine senkrechte Linie nach der Peripherie hinfallen, faßt hierauf die Weite ag, und trägt solche von a nach p; so ist p der Punkt, durch welchen die Parallellinie mit cb gezogen werden muß, und $\triangle$ arp = Trap. rpcb.

Beweis. $\triangle$ arp : $\triangle$ acb = $ap^2 : ab^2$.

$ap^2 = ag^2$

und $ag^2 = 2\,ad^2$

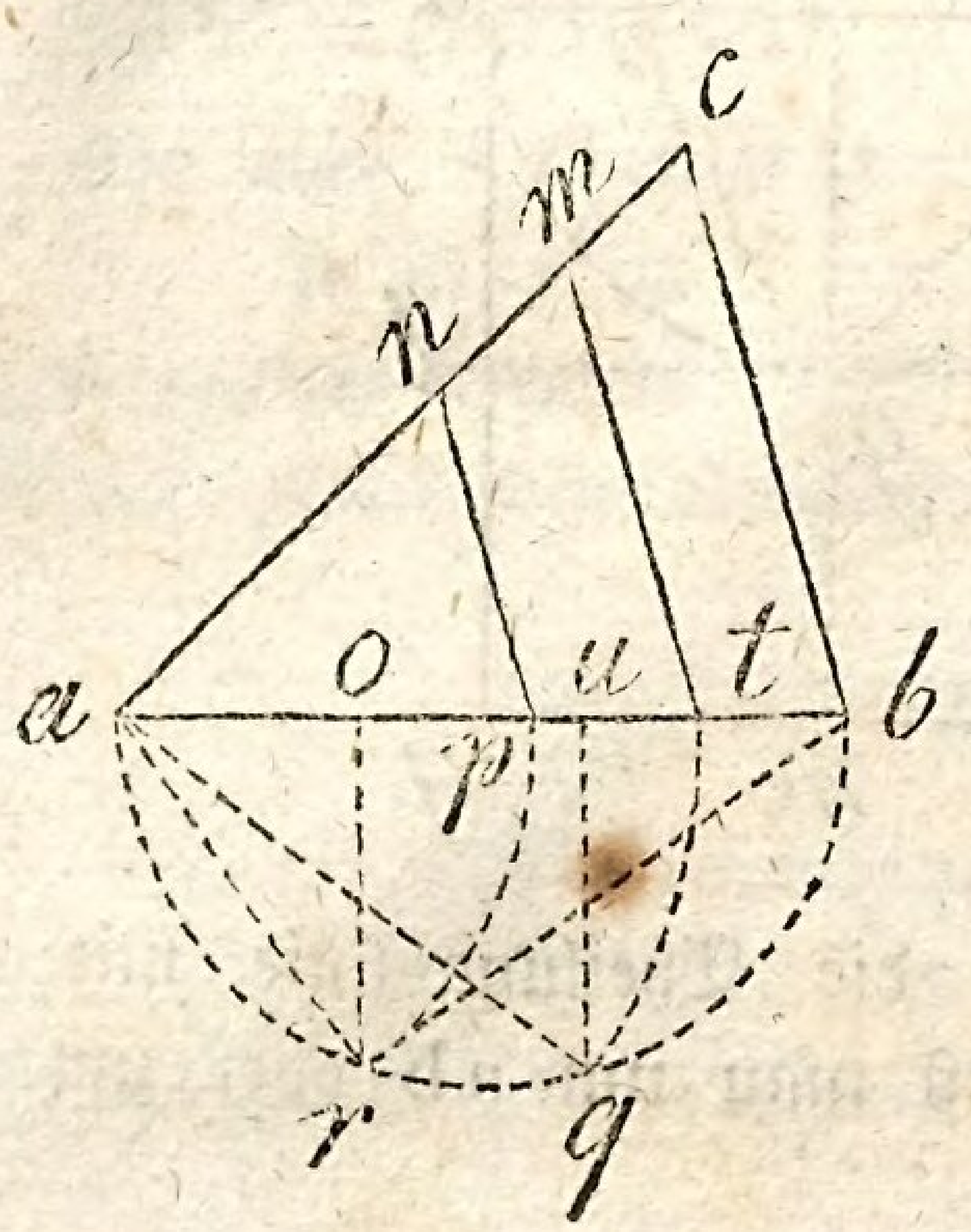
also ist $ap^2 = 2\,ad^2$

und $ab^2 = 4\,ad^2$.

Daher verhält sich $ap^2 : ab^2 = 2 : 4 = 1 : 2$; also auch $\triangle$ arp : $\triangle$ acb = 1 : 2, und folglich ist $\triangle$ arp = $\frac{1}{2}$ $\triangle$ acb.

§ 140.

Aufgabe. Ein Dreieck in drei gleiche Theile mit der einen Seite parallel einzutheilen.



Auflösung. Man ziehe unterhalb ab, wenn die Theilungslinien mit cb parallel gehen sollen, einen halben Kreis, theile hierauf die Linie ab in drei gleiche Theile, und lasse aus den Theilungspunkten o u. u senkrechte Linien

nach dem Umfange des halben Kreises fallen. Ist dieses geschehen, so ziehe man aus dem Punkte a, welcher cb gegenüber liegt, Hülfslinien nach r und q, und trage die Weite ar nach p und die Weite aq nach t, so wird dadurch das $\triangle abc$ in drei gleiche Theile eingetheilt sein. Es muß demnach bewiesen werden, daß sich verhält

$$\triangle anp : acb = 1 : 5.$$

Beweis. $\triangle aro \sim \triangle arb$. § 136. 1.

$$ao : ar = ar : ab. \quad (\S\ 136.\ 6.)$$

Es ist aber $ar = ap$.

$$ao : ap = ap : ab.$$

$$ap^2 = ao \times ab$$

und $ab = ab$

$$ab \times ap^2 = ao \times ab^2.$$

$$ab : ao = ab^2 : ap^2.$$

Aber $ab = 3ao$.

$$3ao : ao = ab^2 : ap^2.$$

$$3 : 1 = ab^2 : ap^2.$$

Aber $\triangle acb : \triangle anp = ab^2 : ap^2$. (§ 135.)

da sich aber $ab^2 : ap^2 = 3 : 1$.

Also $\triangle acb : \triangle anp = 3 : 1$.

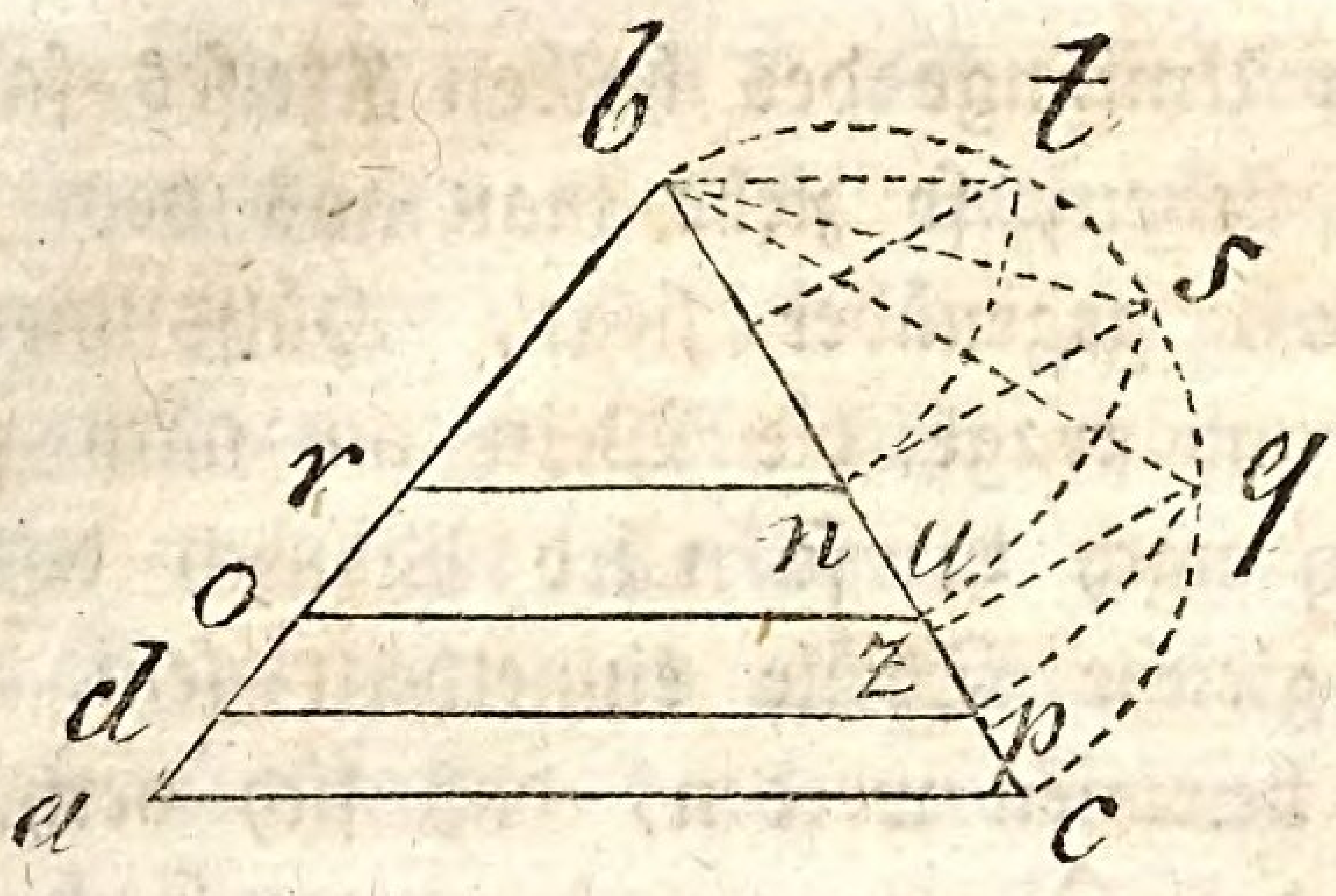
$$\triangle acb = 3 \triangle anp.$$

$$\tfrac{1}{3} \triangle acb = \triangle anp.$$

Eben so kann bewiesen werden, daß $\triangle amt = \tfrac{2}{3} \triangle acb$ sei.

§ 141.

Aufgabe. Ein Dreieck in 4 gleiche Theile mit der Grundlinie parallel einzutheilen.

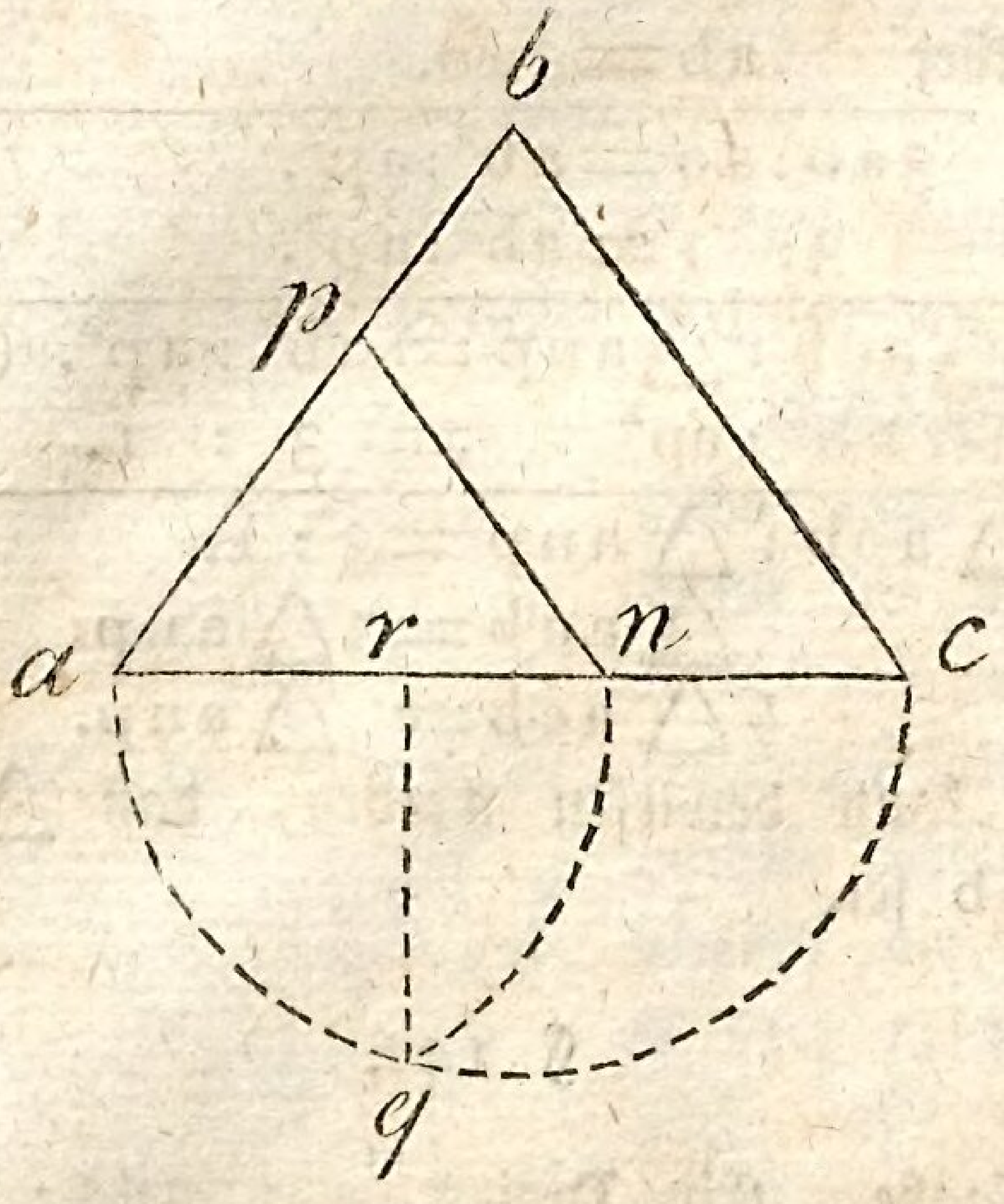


Die Auflösung ist der vorhergehenden gleich und erhellet auch aus der Zeichnung der Figur.

§ 142.

Aufgabe. Von einem Dreiecke ein gegebenes Stück mit der einen Seite parallel abzuschneiden.

Es sei der Inhalt des $\triangle$ abc $= 2^{\circ}\, 30'\, 64''$, die Grundlinie $= 248''$ und der Inhalt des abzuschneidenden Stückes $= 79'\, 98''$.

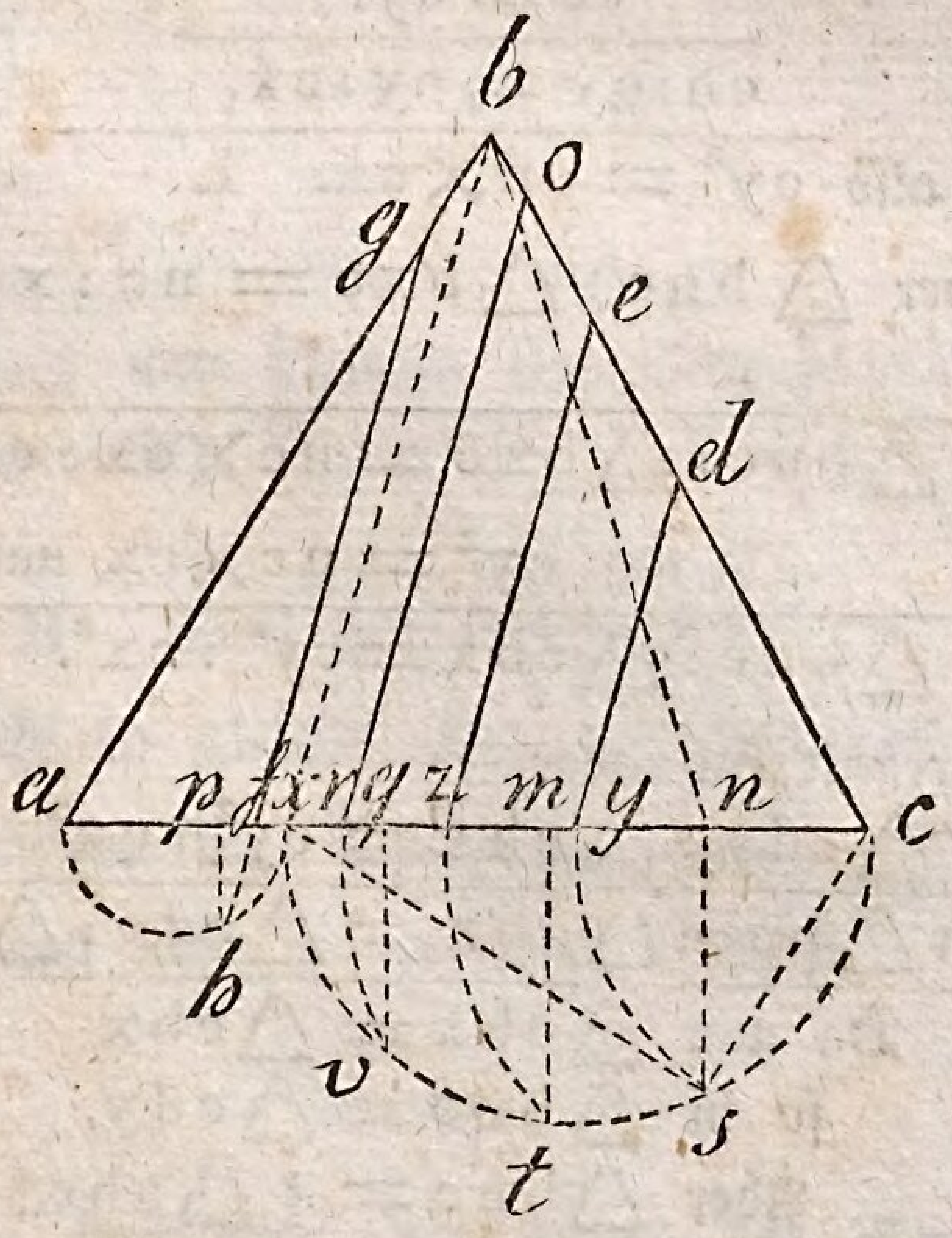


Auflösung. Man suche nach dem § 113. die

Länge der Grundlinie des abzuschneidenden Stückes $= 86' =$ ar. Hierauf ziehe man um ac einen halben Kreis, lasse aus r die senkrechte Linie rq fallen und trage die Weite aq nach n, so ist n der Punkt, nach welchem mit cb die Parallellinie gezogen werden muß, und $\triangle$ apn ist alsdann $= 79'98''$.

§ 143.

Aufgabe. Ein Dreieck in 4 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit einer aus der Spitze willkührlich nach der Grundlinie hingezogenen geraden Linie bx parallel laufen.



Auflösung. Man beschreibe 1. um ax und bx einen halben Kreis, 2. theile man die Linie ac in

5 gleiche Theile, und lasse 3. aus den Theilungspunkten n, m und q senkrechte Linien nach dem halben Kreise a h x hinfallen. Hierauf fasse man 4. die Weite c s und trage solche aus c nach y,

— — c t — — — — c — z,

— — c v — — — — c — r,

— — a h — — — — a — f,

und ziehe endlich 5. durch die Punkte y, z, r und f Parallellinien mit b x, so wird dadurch das $\triangle$ a b c verlangter Maßen eingetheilt sein.

Es muß demnach bewiesen werden, daß $\triangle cdy = \frac{1}{5} \triangle abc$; $\triangle cez = \frac{2}{5} \triangle abc$ u. s. w. sei.

Beweis. $cn : cs = cs : cx$. (§ 136. 6.)

$cs = cy$.

$cn : cy = cy : cx$.

---

also $cy^2 = cn \times cx$. I.

Aber $\triangle bnc : \triangle bxc = nc : xc$ durch cx multiplicirt.

$\triangle bnc : \triangle bxc = nc \times cx : cx^2$

Da nun $cy^2 = nc \times cx$ nach I. ist.

$\triangle bnc : \triangle cbx = cy^2 : cx^2$. II.

Es verhält sich aber

$\triangle cdy : \triangle cbx = cy^2 : cx^2$. § 134.

Daher $\triangle bnc : \triangle cbx = \triangle cdy : \triangle cbx$.

Da nun $\triangle cbx = \triangle cbx$

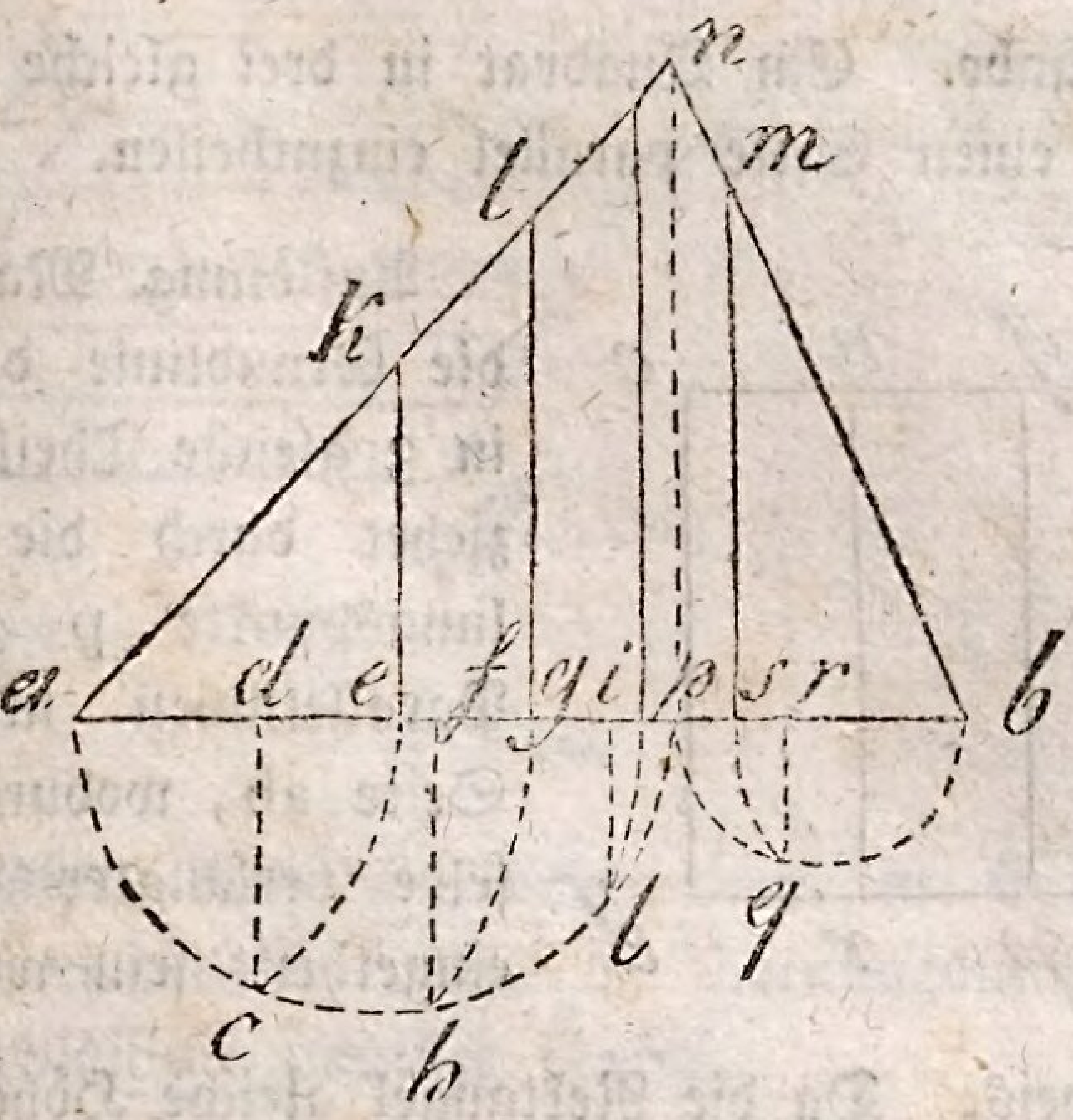
so ist $\triangle bnc = \triangle cdy$.

Aber $\triangle bnc = \frac{1}{5} \triangle abc$.

Eben so wird bewiesen, daß $\triangle cez = \frac{2}{5} \triangle abc$ sei u. s. w.

§ 144.

Aufgabe. Ein Dreieck in 5 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit der Höhe np parallel laufen.



Auflösung und Beweis sind eben so, wie in dem vorhergehenden Paragraph.

B. Von der Eintheilung der Vierecke in gleiche und ungleiche beliebige Theile, wobei die Theilungs-Linien mit der einen Seite parallel laufen.

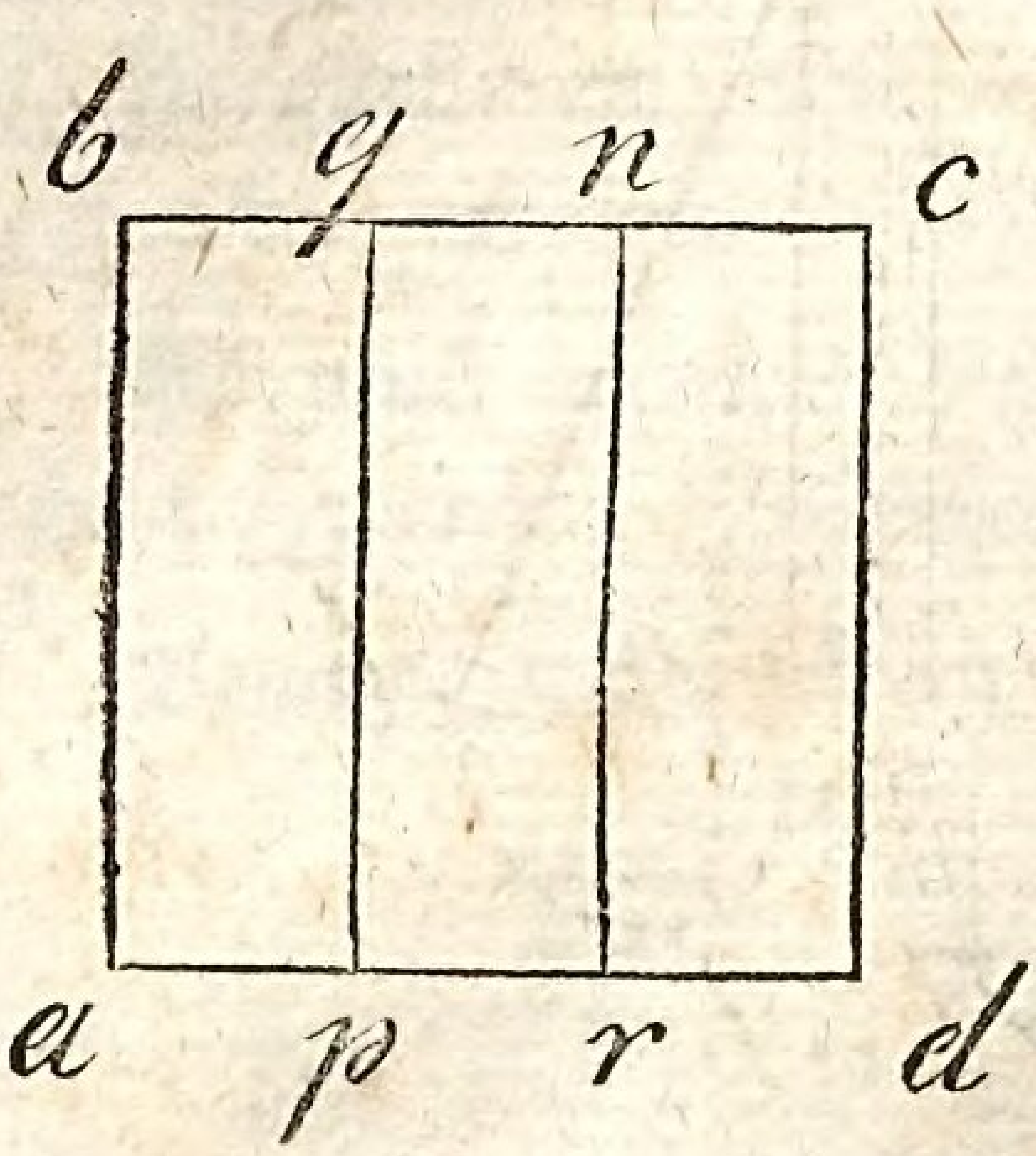
§ 145.

Zusatz. Bei der Eintheilung der Parallelogramme auf diese Art darf man nur entweder die Grundlinie, wenn die Theilungslinien mit der

Grundlinie parallel gehen sollen, in die verlangten Theile eintheilen.

§ 146.

Aufgabe. Ein Quadrat in drei gleiche Theile mit der einen Seite parallel einzutheilen.

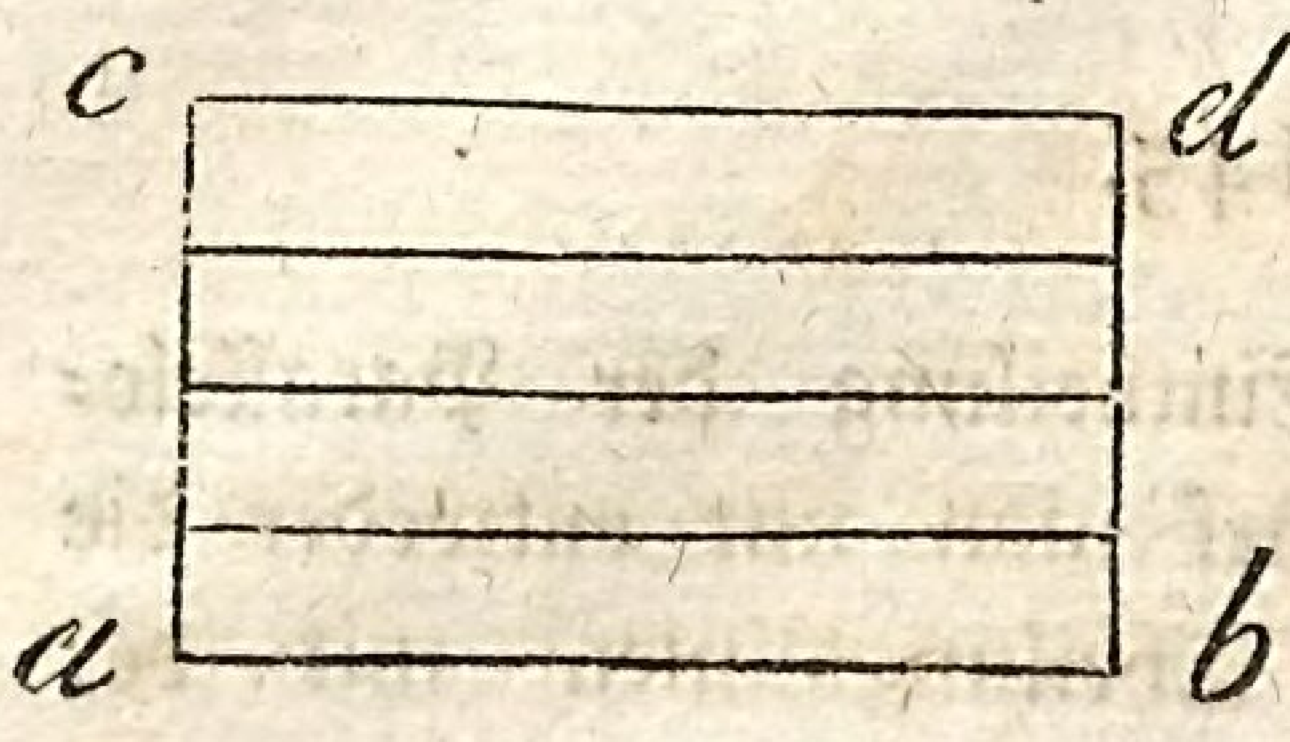


Auflösung. Man theilt die Grundlinie desselben in 3 gleiche Theile, und ziehet durch die Theilungspunkte p und r Parallellinien mit der Seite ab, wodurch dasselbe verlangter Maßen eingetheilt sein wird.

Beweis. Da die Rektangel gleiche Höhen und gleiche Grundlinien ap, pr und rd haben, so müssen sie sich nach § 38 des 1sten Abschnittes gleich sein.

§ 147.

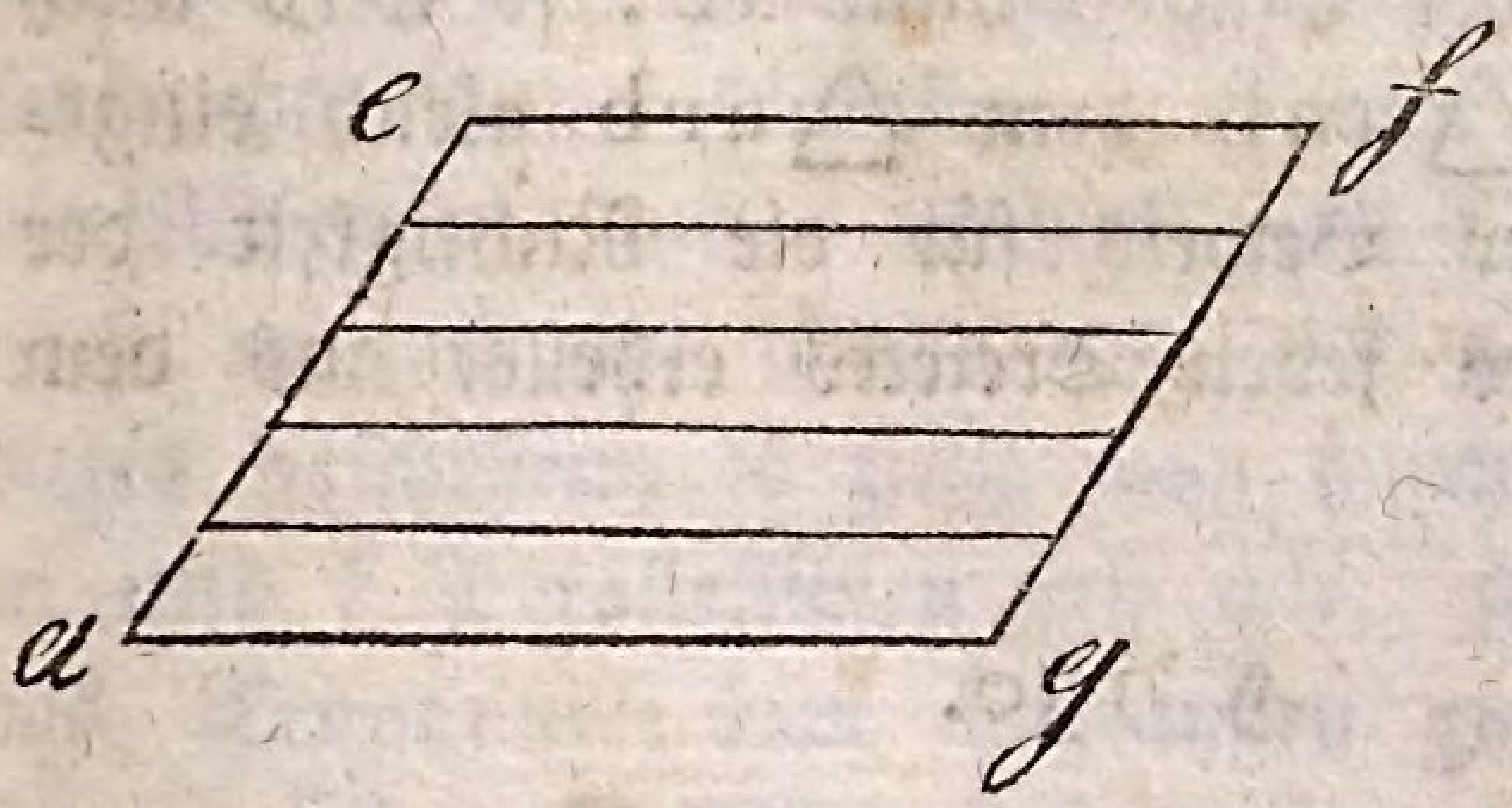
Aufgabe. Ein Rektangel in 4 gleiche Theile mit der Grundlinie parallel einzutheilen.



Auflösung. Siehe Fig.

§ 148.

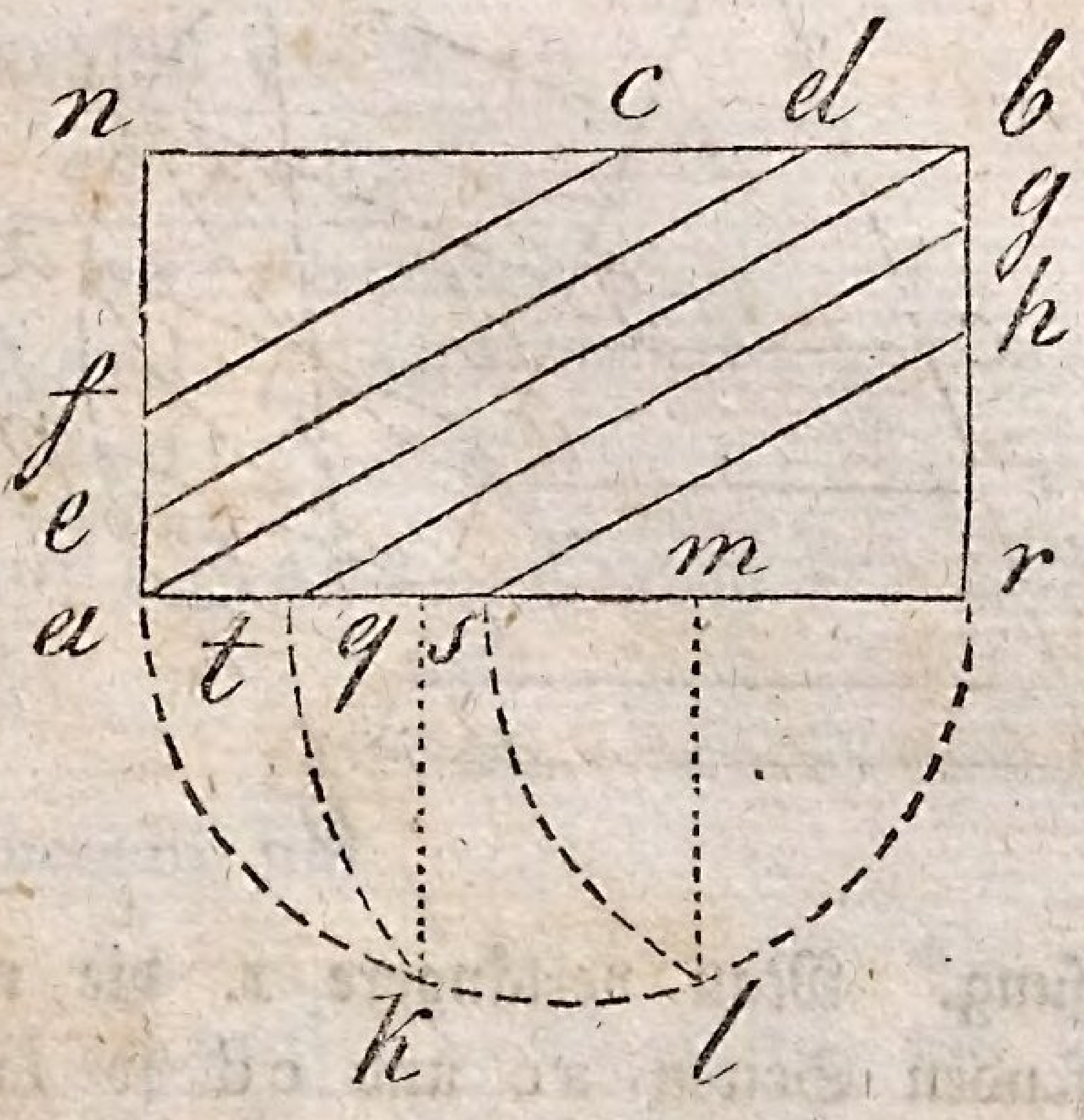
Aufgabe. Ein Rhombus oder Rhomboides in 5 gleiche Theile mit der Grundlinie parallel einzutheilen.



Auflösung u. Beweis wie im § 146.

§ 149.

Aufgabe. Ein Parallelogramm in 6 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit der Diagonallinie parallel laufen.

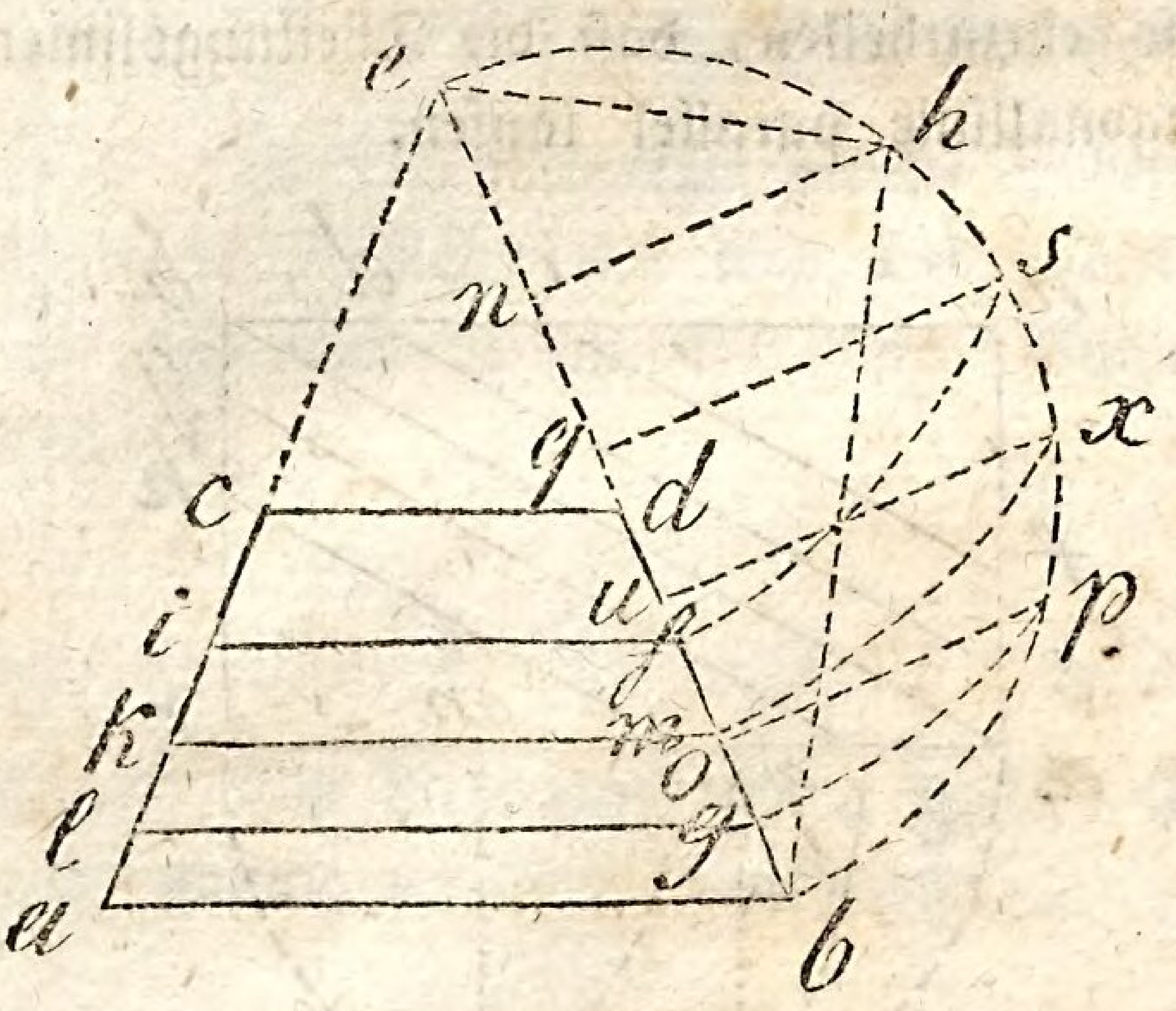


Auflösung. Man theile 1. das Rektangel durch eine Diagonallinie in zwei gleiche Dreiecke, und

theile das △arb nach § 140 in 3 gleiche Theile, wovon die Theilungslinien mit der Diagonallinie parallel laufen. 2. Man trage hierauf die Weite as von b nach c und die Weite st von c nach d, und ziehe 3. durch die Punkte c und d Parallellinien mit der Diagonallinie ab, so wird auch hierdurch das △anb dem △arb gleich eingetheilt sein. Der Beweis für die Richtigkeit der Eintheilung eines jeden Dreiecks erhellet aus dem § 140.

§ 150.

Aufgabe. Ein Trapezium in 4 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit den Parallelseiten desselben parallel laufen.



Auflösung. Man verlängere 1. die nicht parallel laufenden Seiten ac und cd so lange bis sie zusammen stoßen, wodurch das △abe gebildet wird. Hierauf beschreibe man 2. um eb einen

halben Kreis, und trage darauf 3. die Weite ed aus e nach h, und lasse 4. aus h eine senkrechte Linie nach n auf eb hingehen. Diese dadurch von eb abgeschnittene Linie nb theile man 5. in 4 gleiche Theile, und lasse 6. aus den Theilungspunkten r, u u. o nach dem halben Kreise ehsxpb senkrechte Linien hinfallen. Hierauf trage man 7. die Weite es aus e nach f, die Weite ex aus e nach m und die Weite ep aus e nach g. Ist dieses geschehen, so ziehe man durch die Punkte g, m und f Parallellinien mit ab, so wird dadurch das Trapezium dem Verlangen gemäß eingetheilt sein. Es muß demnach bewiesen werden, daß das Trapez. cdfi $= \frac{1}{4}$ Trap. abdc sei.

Beweis. $en : eh = eh : eb$

$$eh = ed$$

$$en : ed = ed : eb$$

$$ed^2 = en \times eb$$

multipl. $eb = eb$

$$ed^2 \times eb = en \times eb^2$$

$$en : eb = ed^2 : eb^2. \quad \text{I.}$$

Ferner $\triangle ecd : \triangle abe = ed^2 : eb^2$. § 135.

daher $\triangle ecd : \triangle abe = en : eb$. II.

$$\triangle ecd : \triangle abe - \triangle ecd = en : eb - en$$

oder

$$\triangle ecd : abdc = en : nb. \quad \text{III.}$$

Eben so verhält sich

$$\triangle efi : \triangle abe = eq : eb$$

Es ist aber $\triangle ecd : \triangle abe = en : eb$. Nach II.

$$\triangle efi : \triangle ecd = eq : en$$

$$\triangle efi - \triangle ecd : \triangle ecd = eq - en : en.$$

oder

Trapez. cdfi : ecd = nq : en
und △ edc : abdc = en : nb. III.

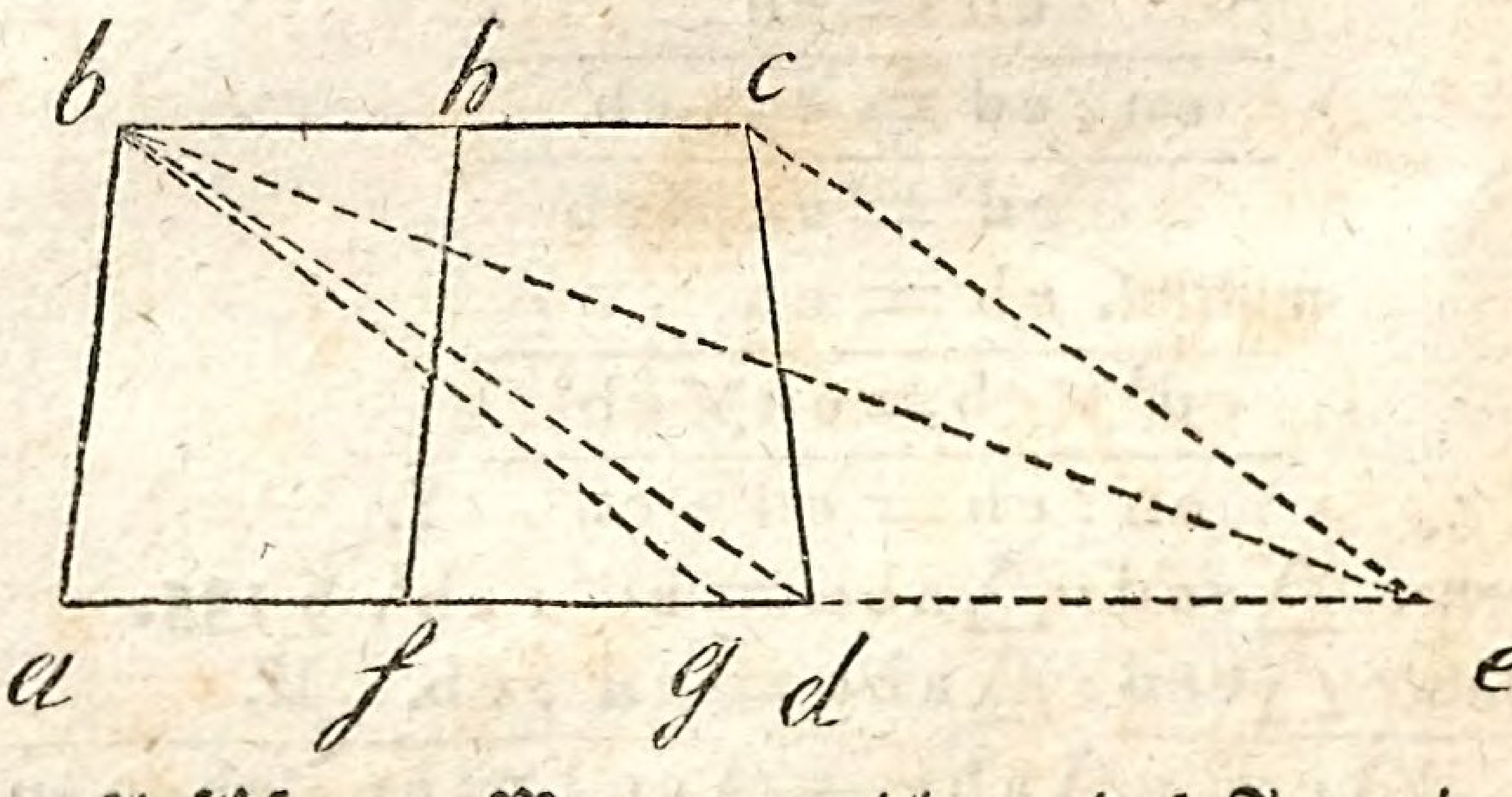
cdfi : abdc = nq : nb.
Es ist aber nq = $\frac{1}{4}$ nb

also cdfi = $\frac{1}{4}$ abdc.

Eben so ist zu beweisen, daß alle übrigen Theile $\frac{1}{4}$ vom ganzen Trapez. abdc sind.

§ 151.

Aufgabe. Ein Trapezium in zwei Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinie mit der einen Seite, welche keine Parallelseite ist, parallel läuft.



Auflösung. Man verwandle 1. das Trapezium abcd in das △ abe nach § 57. 1ster Abschnitt. 2. Man theile die Grundlinie ae des Dreiecks abe in 2 gleiche Theile, wie solches in g geschehen ist, wodurch auch zugleich das △ abe selbst, durch die Ziehung der geraden Linie bg, in 2 gleiche Theile getheilt wird. Hierauf verwandele man 3. das △ abg nach § 65, wonach die Grundlinie

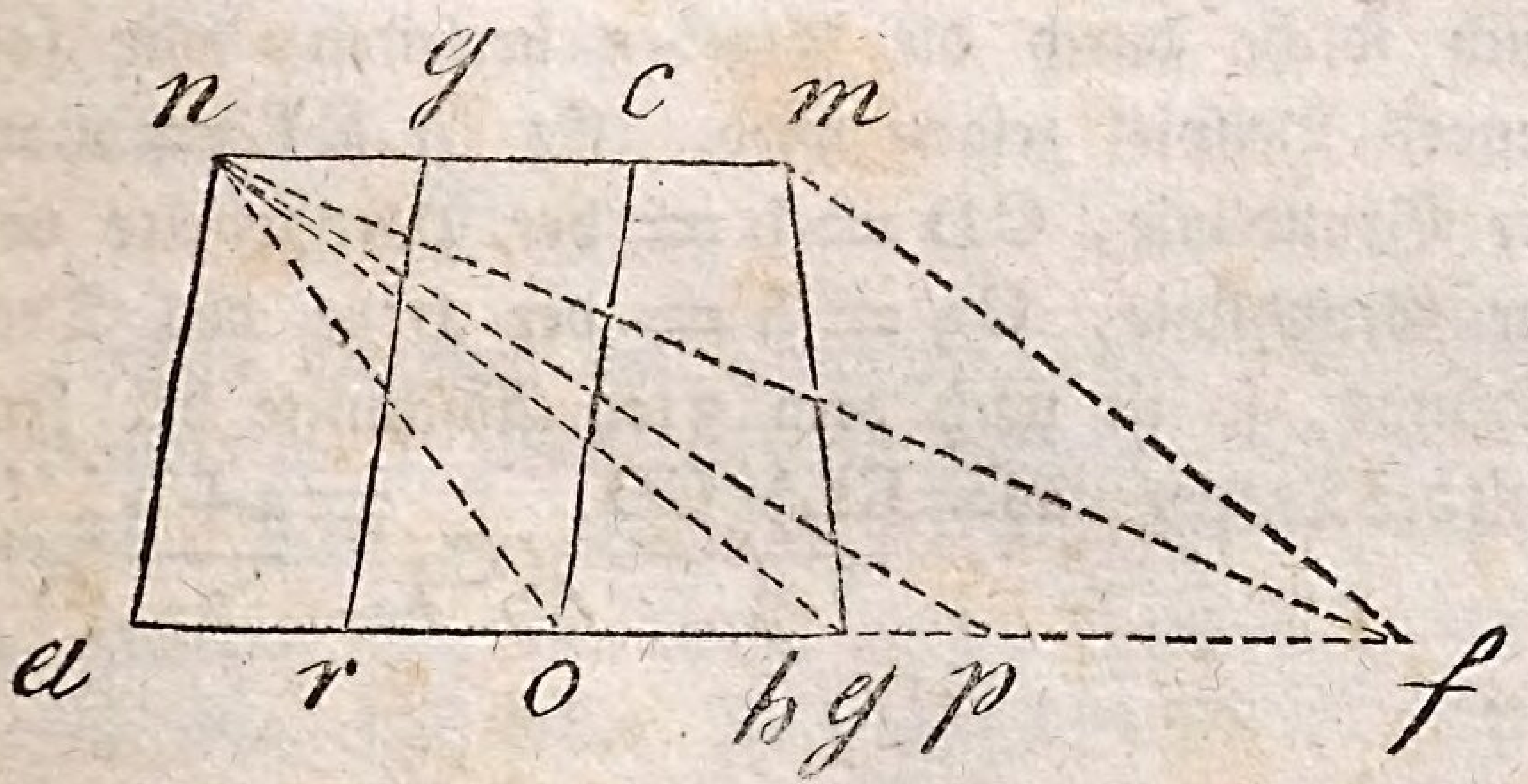
desselben ag in zwei gleiche Theile getheilt wird, in das □abhf, dessen eine Seite ab gleich und parallel der Seite des Trapeziums abcd ist. Es muß demnach bewiesen werden, daß □abhf = ½ Trapez. abcd sei.

Beweis. Trap. abcd = △abe nach § 57.
daher ist ½ Trap abcd = ½ △abe
und ½ △abe = △abg.
Nun ist aber △abg = □abhf.

□abhf = ½ Trap. abcd.

§ 152.

Aufgabe. Ein Trapezium in 3 gleiche Theile auf die vorhergehende Art einzutheilen.



Auflösung. Man verwandele 1. das Trapezium anmg in das △anf. 2. Man theile die Grundlinie af des Dreiecks anf in 3 gleiche Theile in o und p, und ziehe 3 die Linie np, so wird dadurch das △anf in die 3 gleichen Dreiecke ano, onp und pnf getheilt sein. Hierauf verwandele man 4. das △ano in das □anqr; und 5.

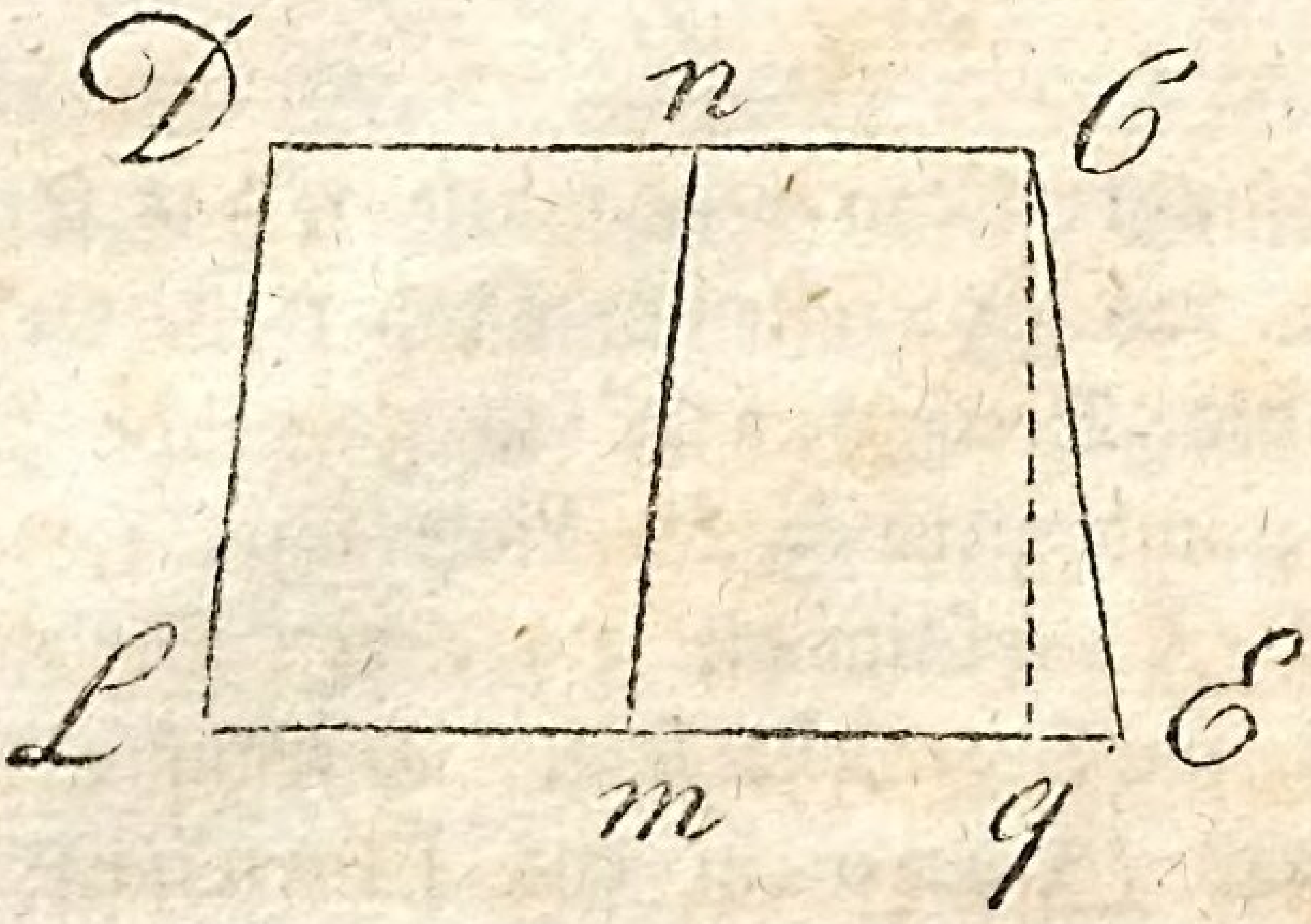
das △ onp durch die Theilung der Grundlinie, deren Hälfte = oh = ro ist, in das □ rqco, wodurch die Seiten qr und co gleich und parallel der Seite an gemacht worden sind. Es muß demnach bewiesen werden, daß $\frac{1}{3}$ Trapez. anmg = □ anqr sei.

Beweis. Trap. anmg = △ anf. § 57. 1. Abschn. daher ist $\frac{1}{3}$ Trap. anmg = $\frac{1}{3}$ △ anf
und $\frac{1}{3}$ △ anf = △ ano.
Aber △ ano = □ anqr. § 65.

□ anqr = $\frac{1}{3}$ Trap. anmg.

§ 153.

Zusatz. Soll diese Eintheilung eines Trapeziums in 2, 3, 4 u. s. w. gleiche Theile nicht auf die vorhergehende Art geschehen, so kann man auch solche durch die Algebra herleiten, wie folgendes Beispiel zeigen wird. Es sei EL = a = der Grundlinie, CD = b = der Parallelseite von der Grundlinie, Cq = h = der Höhe des Trapeziums, so ist nach dem 3ten Abschnitte der Inhalt des Trapeziums = $\frac{EL \times CD}{2} \times Cq = \frac{a+b}{2} \times h$.



Ist nun mL = x = dem abzuschneidenden Stücke von der Grundlinie, so ist der Inhalt davon, wenn mn mit LD parallel gehet, = xh. Soll nun dies Parallelogramm die Hälfte von dem Trapezium ausmachen, so muß

$$\frac{Em+En}{2} h = xh \text{ sein}$$

oder

$$\frac{(a-x)+(b-x)}{2} h = xh$$

$$\frac{(a+b-2x)\ h}{2} = xh$$

$$\frac{a+b-2x}{2} = x$$

$$a+b-2x = 2x$$

$$a+b = 4x$$

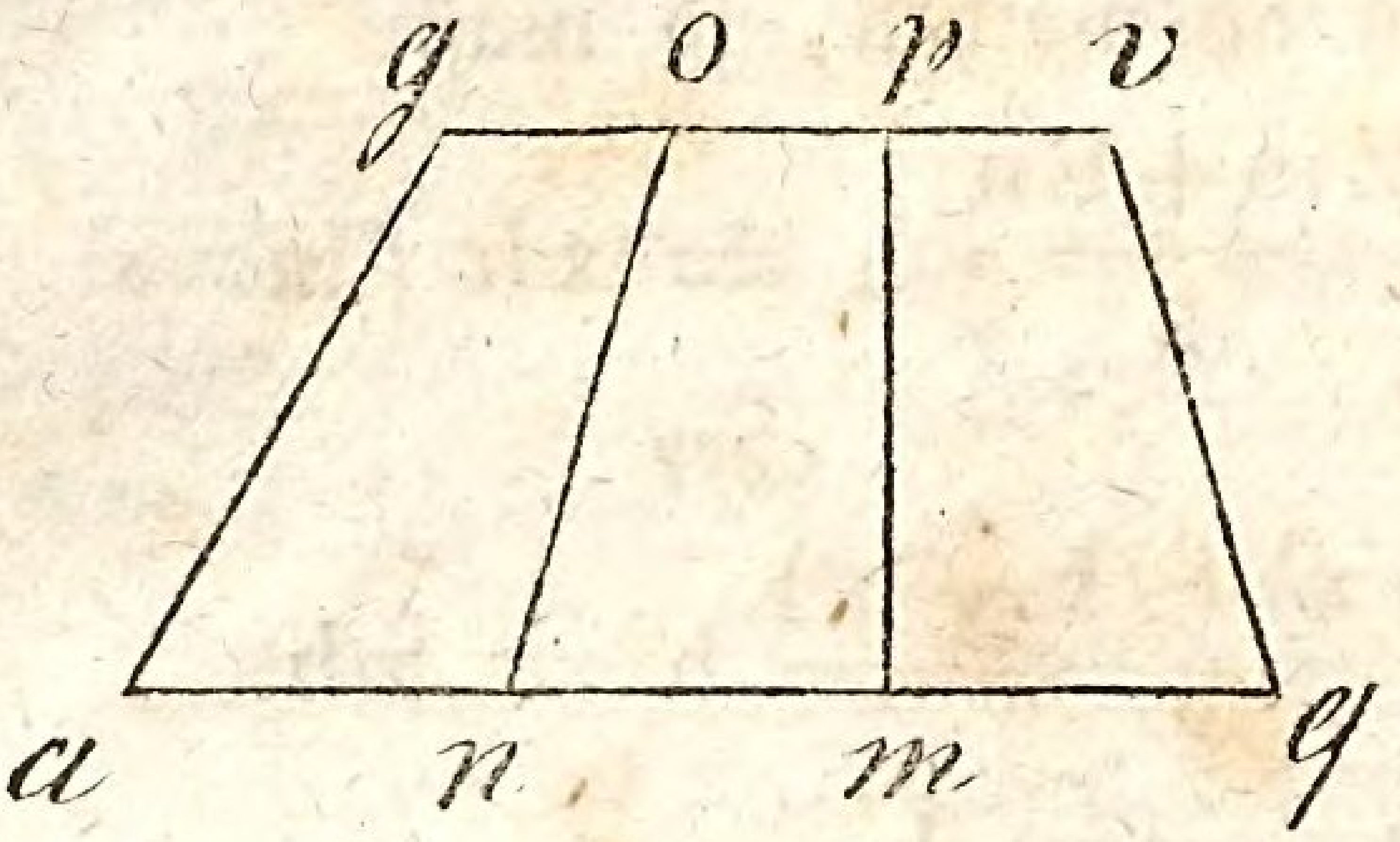
also $\frac{a+b}{4} = x.$

Soll demnach ein Trapezium mit einer Seite parallel in 2 gleiche Theile getheilt werden, so dividirt man die Summe a+b durch 6 und bei 4 gleichen Theilen durch 8 u. s. w.; wodurch jedes Mal das Stück mL gefunden wird, welches hierauf bei 3 gleichen Theilen 2mal und bei 4 gleichen Theilen 3mal u. s. w. bei einander hingesetzt werden muß.

§ 154.

Zusatz. Soll ein Trapezium in 3 gleiche Trapezien eingetheilt werden, so theilt man jede von

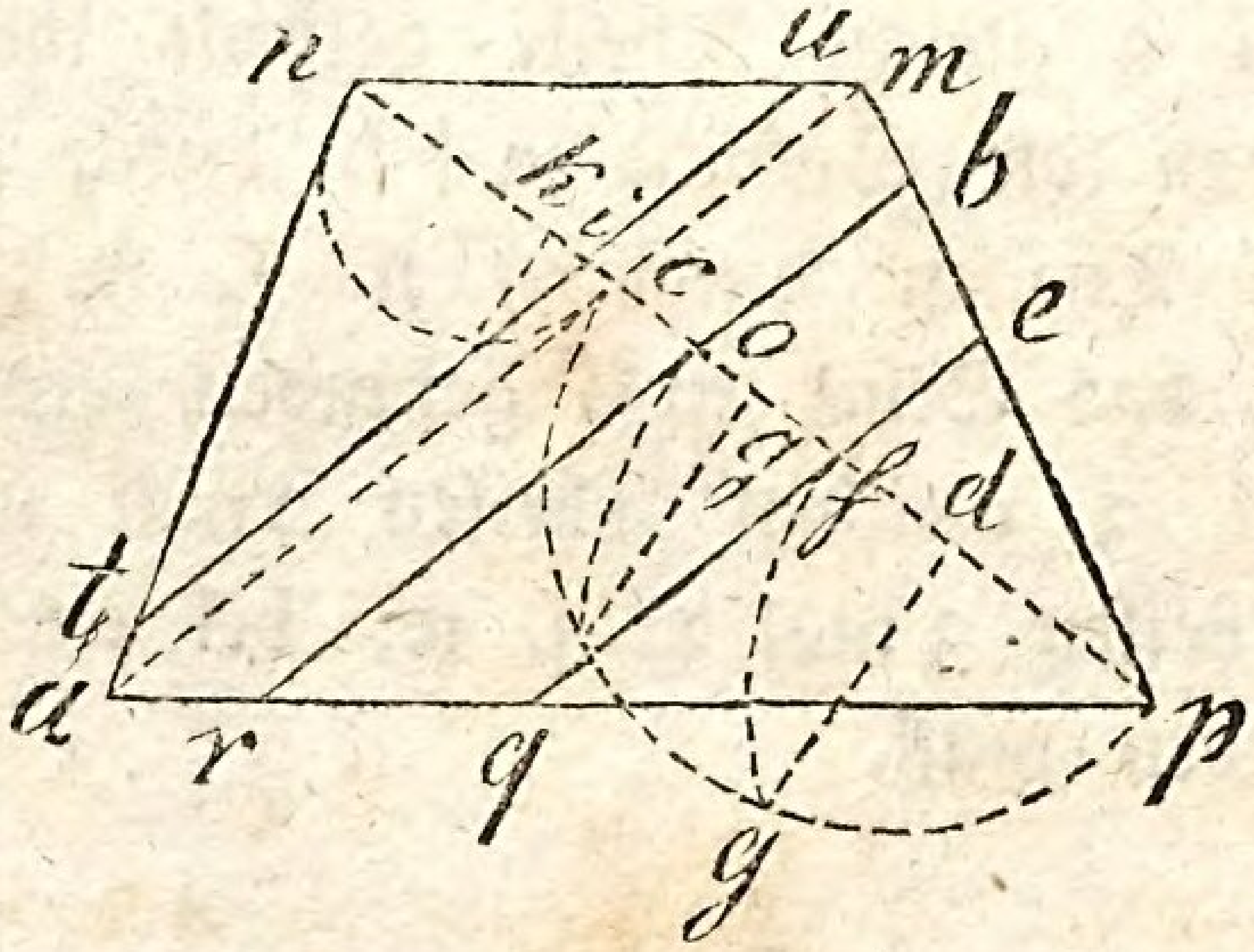
den Parallelseiten in 3 gleiche Theile, und verbindet die Theilungspunkte durch gerade Linien mit einander, wie solches bei der Figur mit on und pm geschehen ist.



Beweis. Die Theile agon, onmp und mpvq sind Trapezien mit gleichen Parallelseiten und gleicher Höhe, daher sind sie sich gleich.

§ 155.

Aufgabe. Ein Trapezium in 4 gleiche Theile so einzutheilen, daß die Theilungslinien mit der Diagonallinie parallel laufen.

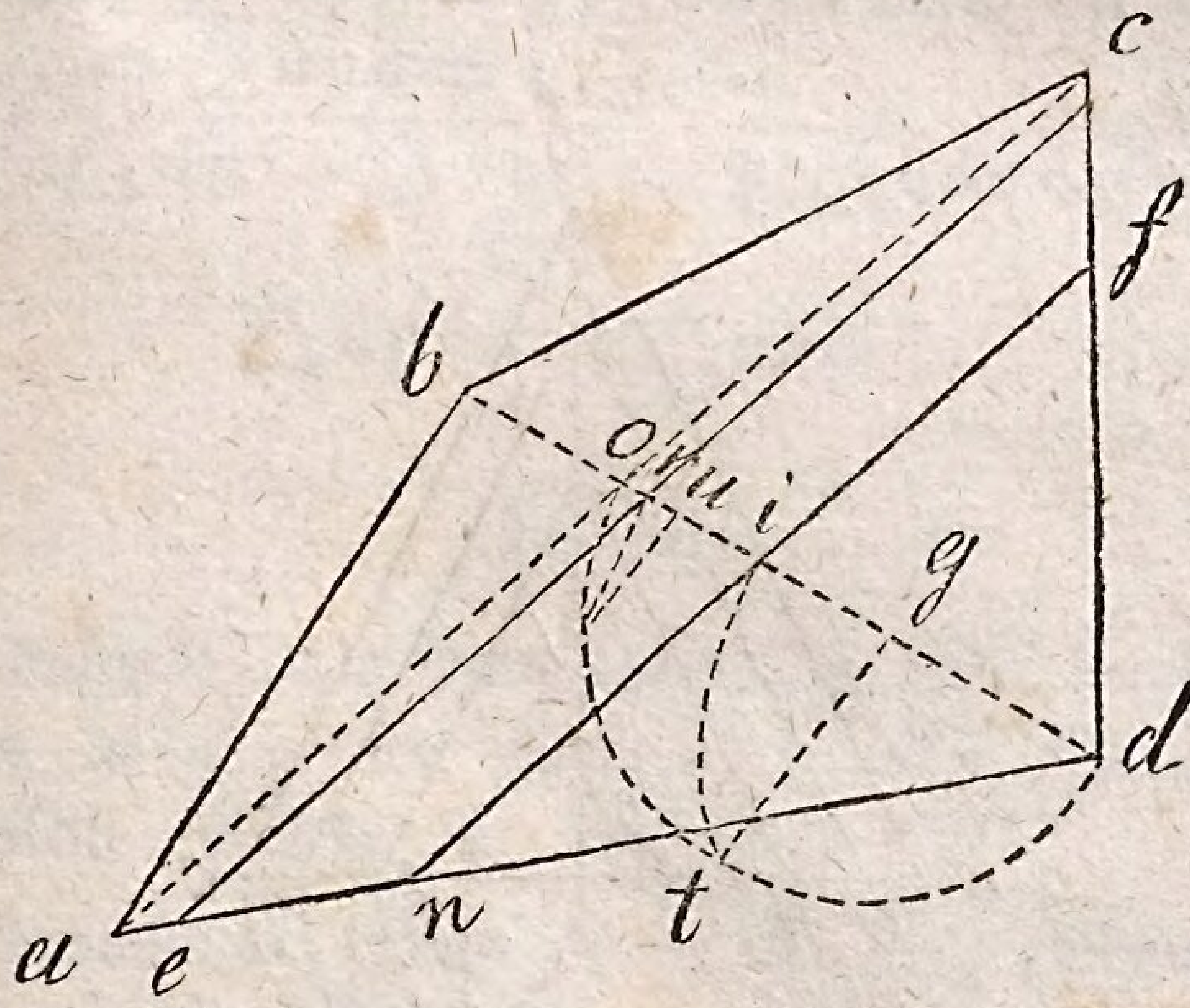


Auflösung. Man ziehe 1. die Diagonallinien np und am, theile 2. eine von denselben in 4 gleiche Theile, und beschreibe 3. um nc und cp

einen halben Kreis und verfahre dabei eben so, wie im § 143 angegeben ist.

Beweis. Da das △nmp nach § 143 in 4 gleiche Theile eingetheilt ist, und die Theilungspunkte auf der Linie np auch zugleich die Theilungspunkte für das △anp sind, und die Linie ac mit mc eine gerade Linie ausmacht, so müssen die mit mc parallel gezogenen Linien, wenn solche nach den Seiten des Dreiecks anp hin verlängert werden, auch parallel mit ac sein, und folglich muß das Trapezium anmp auf diese Weise verlangter Maßen in 4 gleiche Theile eingetheilt sein.

§ 156.



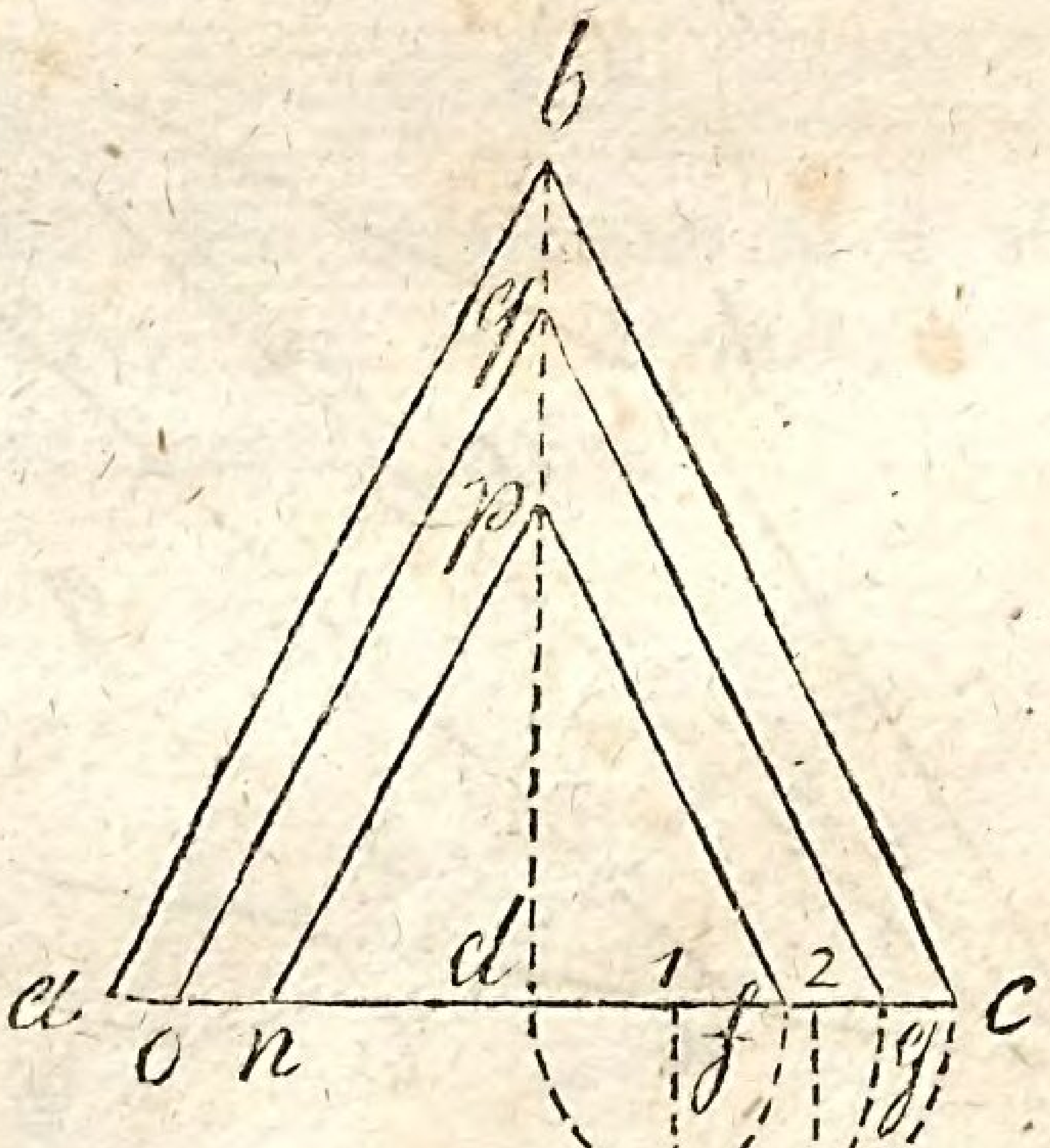
Zusatz. Auf eben diese Weise kann auch ein Trapezoides in 2, 3, 4 und mehrere gleiche und ungleiche Theile, bei welchen die Theilungslinien mit einer von den Diagonallinien parallel laufen, eingetheilt werden, wie aus der vorstehenden Figur,

die in 3 gleiche Theile eingetheilt worden ist, erhellet, und wovon die Auflösung und der Beweis eben so sind, wie sie bei dem Trapezium waren.

C. Von der Eintheilung der Dreiecke und Vierecke in gleiche und ungleiche Theile, wobei die Theilungslinien mit zwei Seiten parallel laufen.

§ 157.

Aufgabe. Ein Dreieck auf diese Weise in 3 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man nehme 1. einen beliebigen Punkt d auf der Grundlinie an, ziehe 2. eine gerade Linie von der Spitze b nach diesem Punkte d, und theile 3. entweder △bcd oder abd nach

§ 140 in 3 gleiche Theile, wobei die Theilungslinien mit bc, wenn dc in 3 gleiche Theile eingetheilt worden ist, parallel laufen. Hierauf ziehe man 3. durch die Punkte p und q Parallellinien mit ab, so ist das △abc dem Verlangen gemäß in 3 gleiche Theile eingetheilt worden, und es ist $\triangle npf = \frac{1}{3} \triangle abc$.

Beweis. $\triangle dbc : \triangle dpf = dc^2 : df^2$
Aber $dc : df = db : dp$

also $dc^2 : df^2 = db^2 : dp^2$
daher $\triangle dbc : \triangle dpf = db^2 : dp^2$.
Eben so $\triangle abd : \triangle npd = db^2 : dp^2$

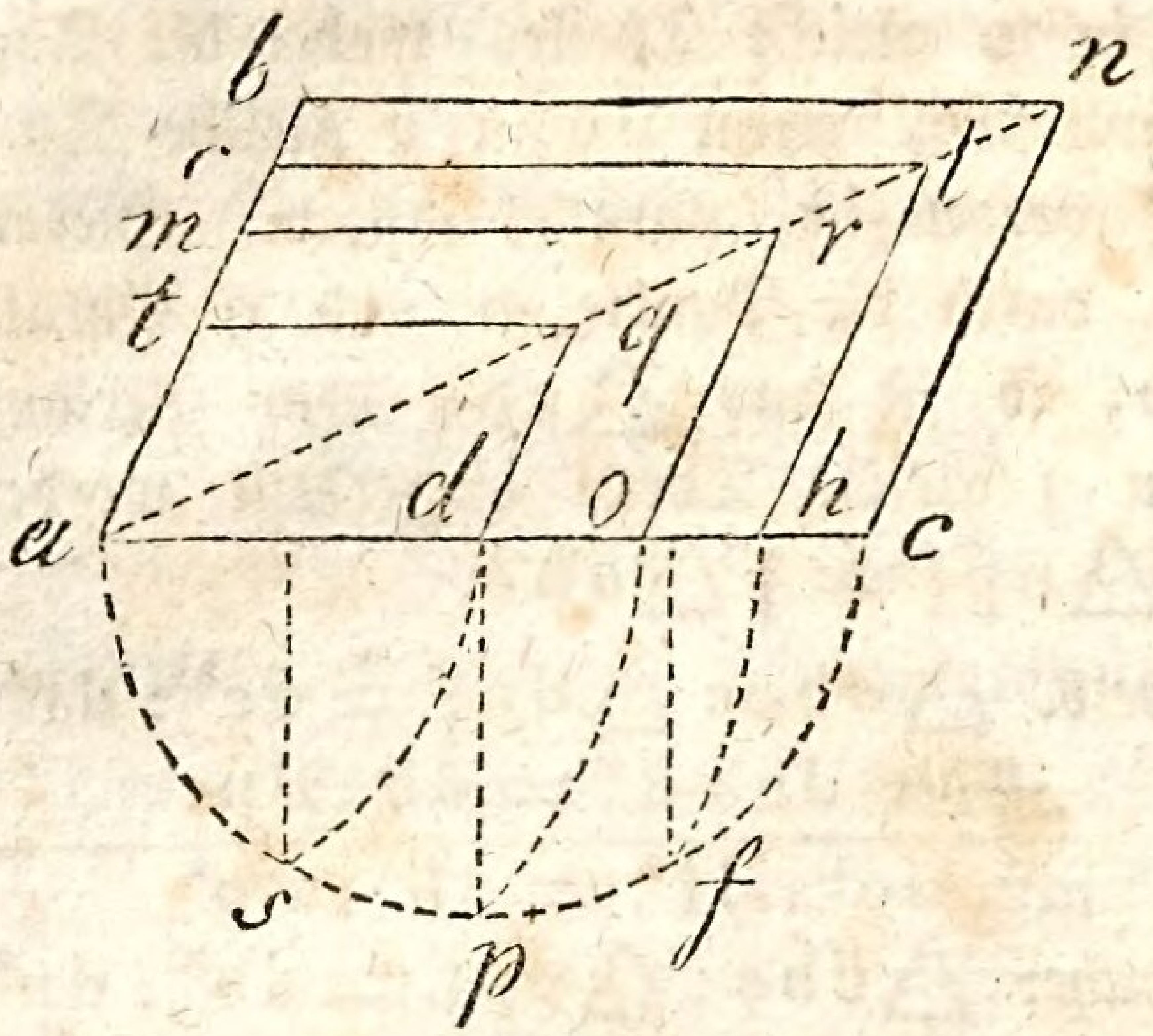
$\triangle dbc : \triangle dpf = \triangle abd : \triangle npd$.
Aber $\triangle dpf = \frac{1}{3} \triangle bdc$. Verm. der Konstr.
daher auch $\triangle npd = \frac{1}{3} \triangle abd$

$\triangle dpf + \triangle npd = \frac{1}{3}(\triangle bdc + \triangle abd)$
oder
$\triangle npf = \frac{1}{3} \triangle abc$.

§ 158.

Aufgabe. Ein Parallelogramm z. B. ein Rhomboides in 4 gleiche Theile auf diese Weise einzutheilen. (Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man theile 1. das Rhomboides in 2 gleiche Dreiecke, und theile 2. eins davon nach § 141 in 4 gleiche Theile. Hierauf ziehe man 3. durch die Theilungspunkte q, r und l Parallellinien mit der Seite bn, so ist das Rhomboides in 4 gleiche Theile und zwar der Aufgabe gemäß eingetheilt worden.



Beweis. $\triangle acn : \triangle aqd = an^2 : aq^2$
und eben so $\triangle abn : \triangle atq = an^2 : aq^2$
Aber $\triangle acn = \triangle abn$.

Also auch $\triangle aqd = \triangle atq$.
Ferner ist $\triangle aqd = \frac{1}{4} \triangle acn$. Verm. d. Konstr.

$\triangle aqd + \triangle atq = \frac{1}{4} \triangle acn + \frac{1}{4} \triangle abn$
oder
$\square atqd = \frac{1}{4} (\triangle acn + \triangle abn)$
$= \frac{1}{4} \square abnc$.

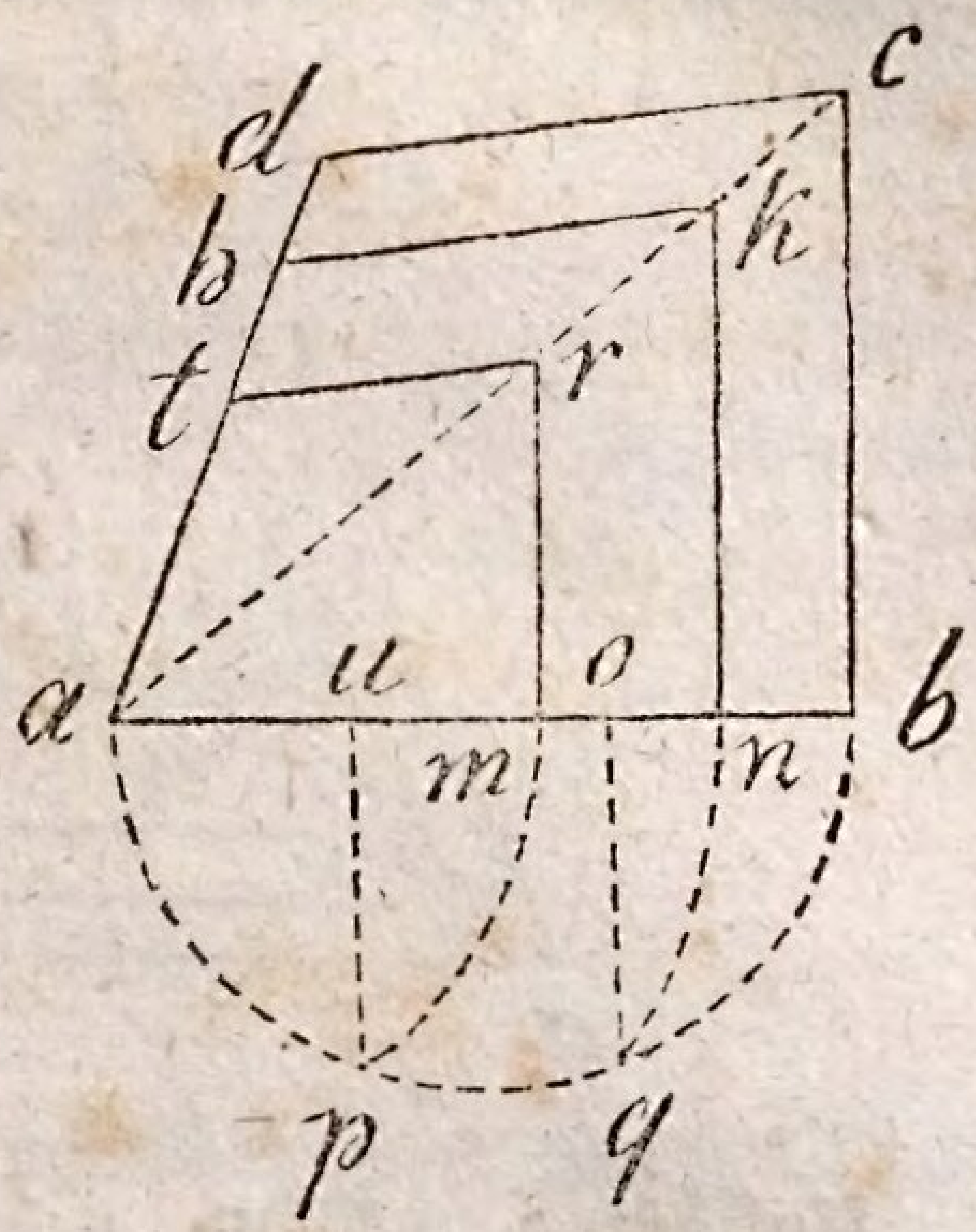
§ 159.

Aufgabe. Ein Trapezoides in 3 gleiche Theile auf eben diese Weise einzutheilen.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man theile 1. das Trapezoides durch die Diagonallinie ac in zwei Theile. Man theile hierauf 2. das $\triangle acb$ nach § 140 in 3 gleiche Theile mit cb parallel. Durch diese Theilung werden auf ac die Theilungspunkte r und k

für das △adc bestimmt, durch welche darauf mit dc Parallellinien gezogen werden. Ist dieses geschehen, so ist Trap. atrm = ⅓ Trap. abcd.



Beweis. $\triangle acb : \triangle arm = ac^2 : ar^2$
$\triangle adc : \triangle atr = ac^2 : ar^2$

$\triangle acb : \triangle arm = \triangle adc : \triangle atr.$

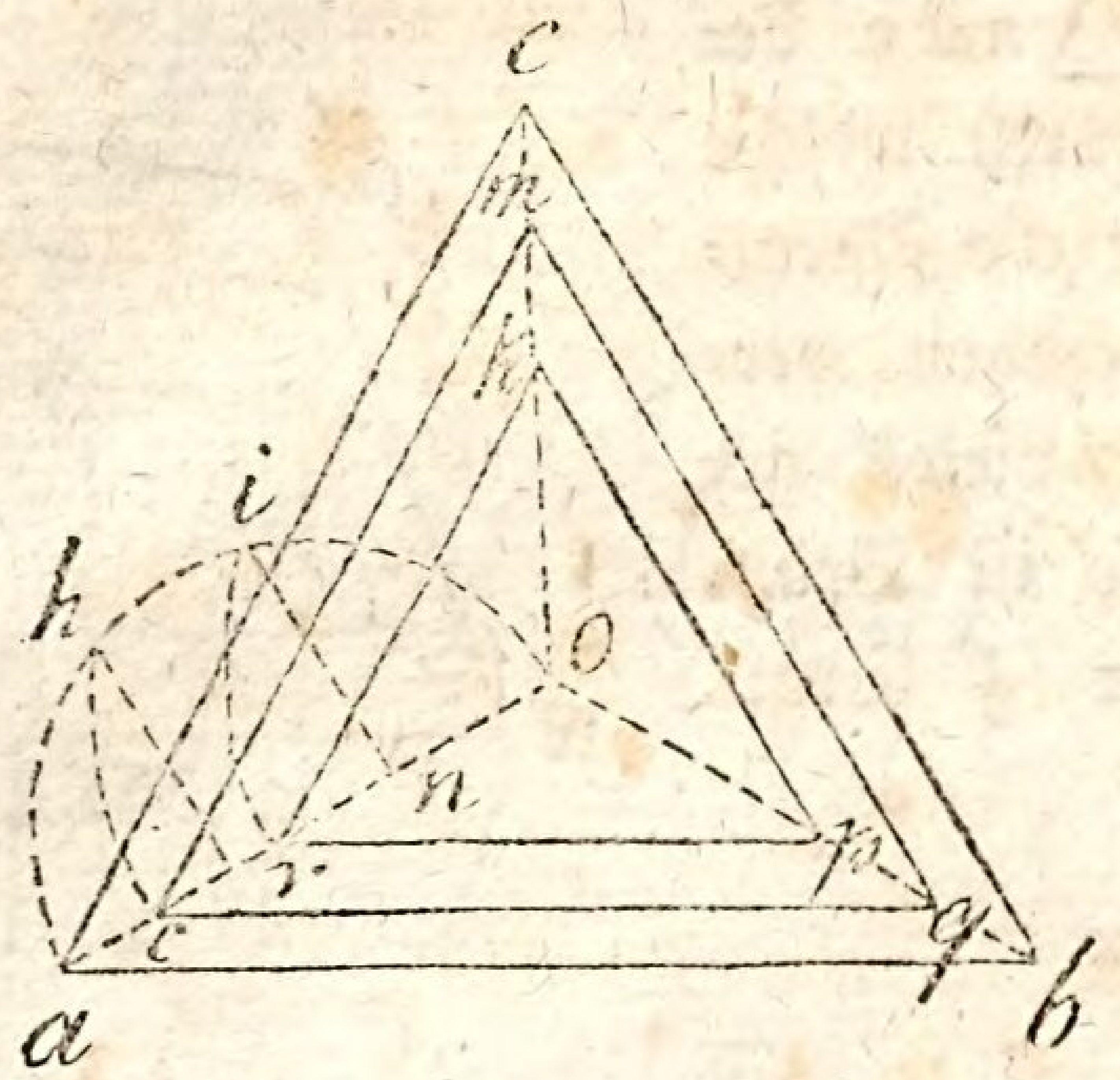
Nun ist aber $\triangle arm = \frac{1}{3} \triangle abc$. Verm. d. Konstr.
also ist auch $\triangle atr = \frac{1}{3} \triangle adc.$

Also $\triangle arm + \triangle atr = \frac{1}{3} (\triangle abc + \triangle adc)$
oder
Trap. atrm $= \frac{1}{3}$ Trap. adcb.

D. Von der Eintheilung der Dreiecke, Vierecke und Vielecke in gleiche und ungleiche Theile, wobei die Theilungslinien mit allen Seiten parallel laufen.

§ 160.

Aufgabe. Ein Dreieck auf diese angeführte Weise in 3 gleiche Theile einzutheilen.



Auflösung. Man nehme 1. einen beliebigen Punkt, bestmöglichst in der Mitte des Dreiecks abc an, und ziehe 2. aus demselben gerade Linien nach den Spitzen a, c und b, so entstehen dadurch 3 verschiedene Dreiecke. Eins von diesen theile man nach § 140 in 3 gleiche Theile so ein, daß die Theilungslinien mit ab parallel laufen. Durch die dadurch entstandenen Theilungspunkte r und e ziehe man Parallellinien mit ac, und durch die auf ob entstandenen Punkte q und p mit bc, so ist das $\triangle$ abc verlangter Maßen eingetheilt worden, und es ist alsdann $\triangle rkp = \frac{1}{3} \triangle abc$.

Beweis. $\triangle abo : \triangle orp = ao^2 : or^2$
$\triangle aco : \triangle ork = ao^2 : or^2$

Also $\triangle abo : \triangle orp = \triangle aco : \triangle ork$.

Eben so auch $\triangle abo : \triangle orp = ob^2 : op^2$
$\triangle ocb : \triangle okp = ob^2 : op^2$

Daher $\triangle abo : \triangle orp = \triangle ocb : \triangle okp$

Aber auch $\triangle abo : \triangle orp = \triangle aco : \triangle ork$
$= \triangle ocb : \triangle okp$

Nun ist aber $\triangle orp = \frac{1}{3}$ abo. Verm. d. Konstr.
Also, auch $\triangle ork = \frac{1}{3}$ aco.
Eben so $\triangle okp = \frac{1}{3}$ ocb.

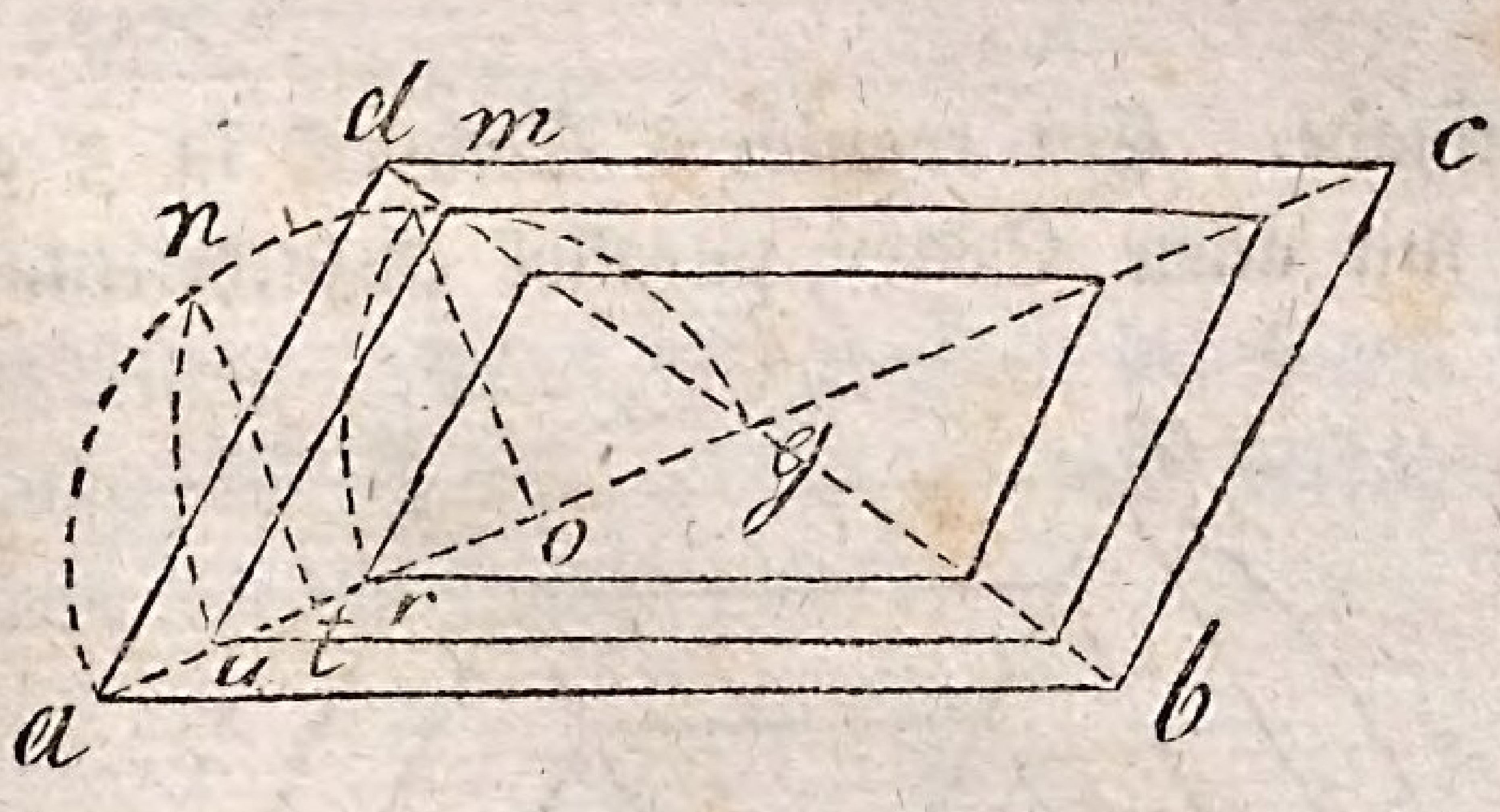
$$\triangle orp + \triangle ork + \triangle okp = \tfrac{1}{3}(\triangle abo + \triangle aco + \triangle ocb.)$$

oder

$$\triangle rkp = \tfrac{1}{3} \triangle abc.$$

§ 161.

Aufgabe. Ein Rhomboides in 3 gleiche Theile mit allen Seiten parallel einzutheilen.

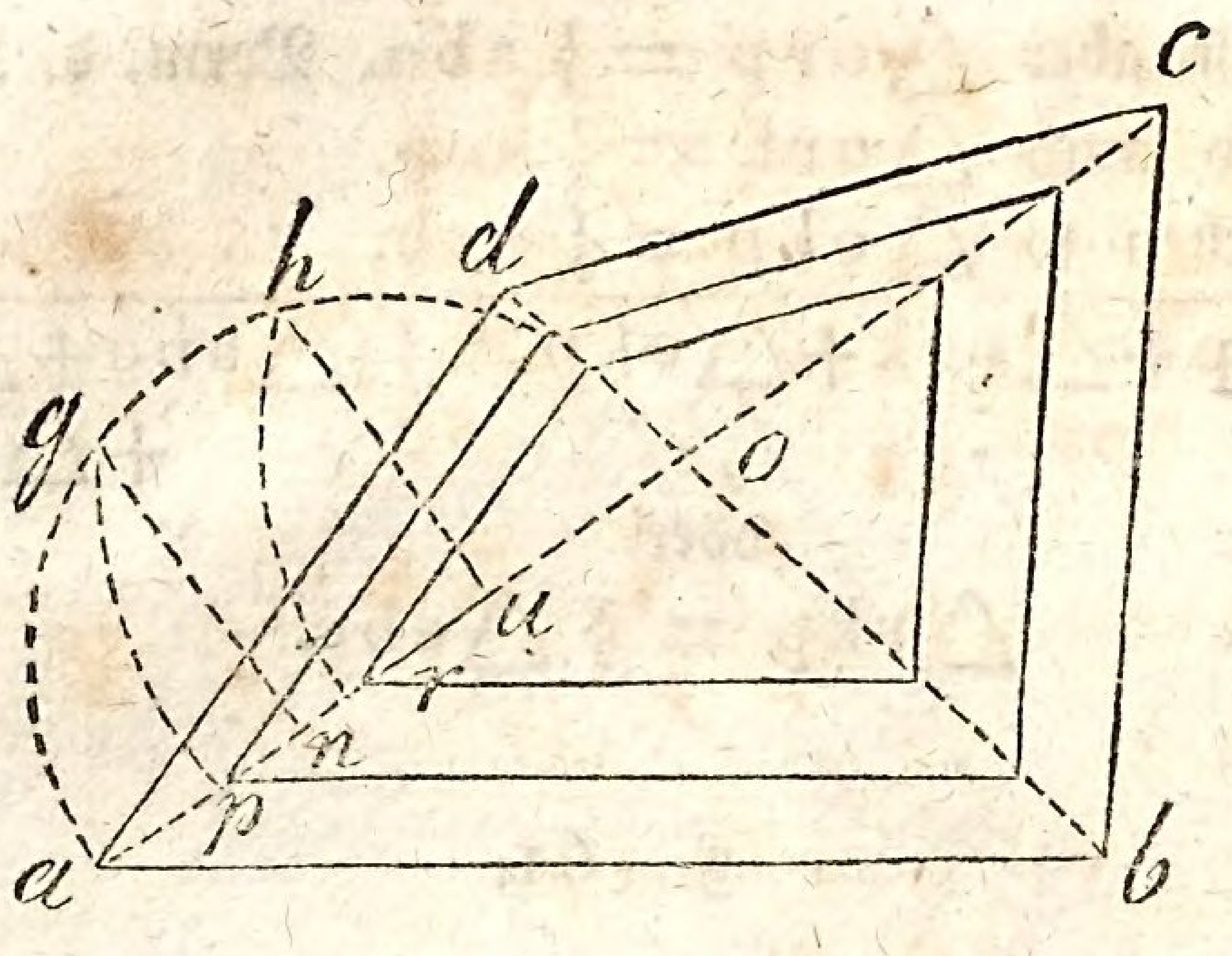


Auflösung. Man theile das Rhomboides durch die Diagonallinien in 4 Dreiecke und verfahre alsdann eben so, wie im § 160.

Der Beweis wie zuvor.

§ 162.

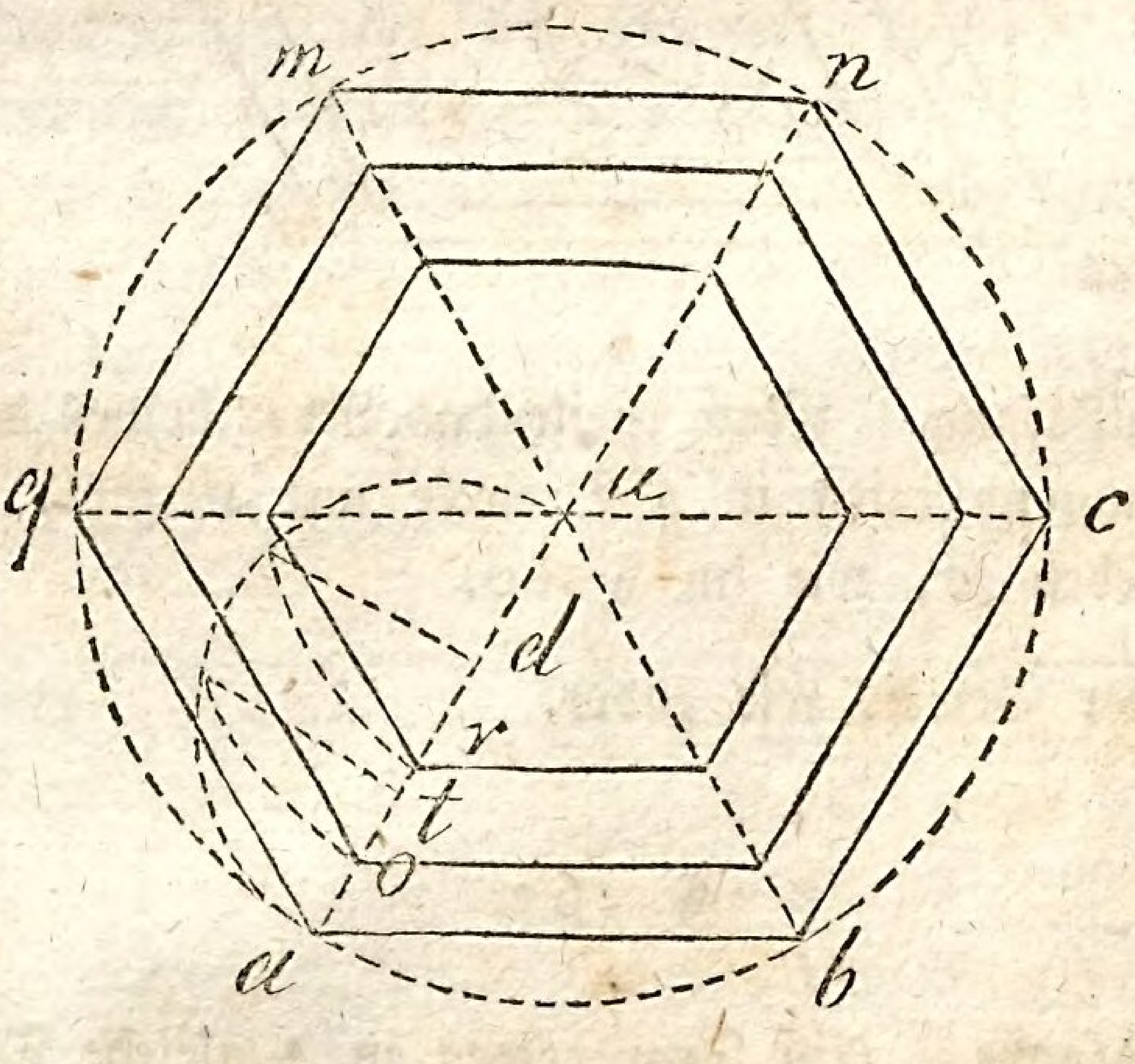
Aufgabe. Ein Trapezoides in 4 gleiche Theile mit allen Seiten parallel einzutheilen.



Auflösung wie zuvor.

§ 163.

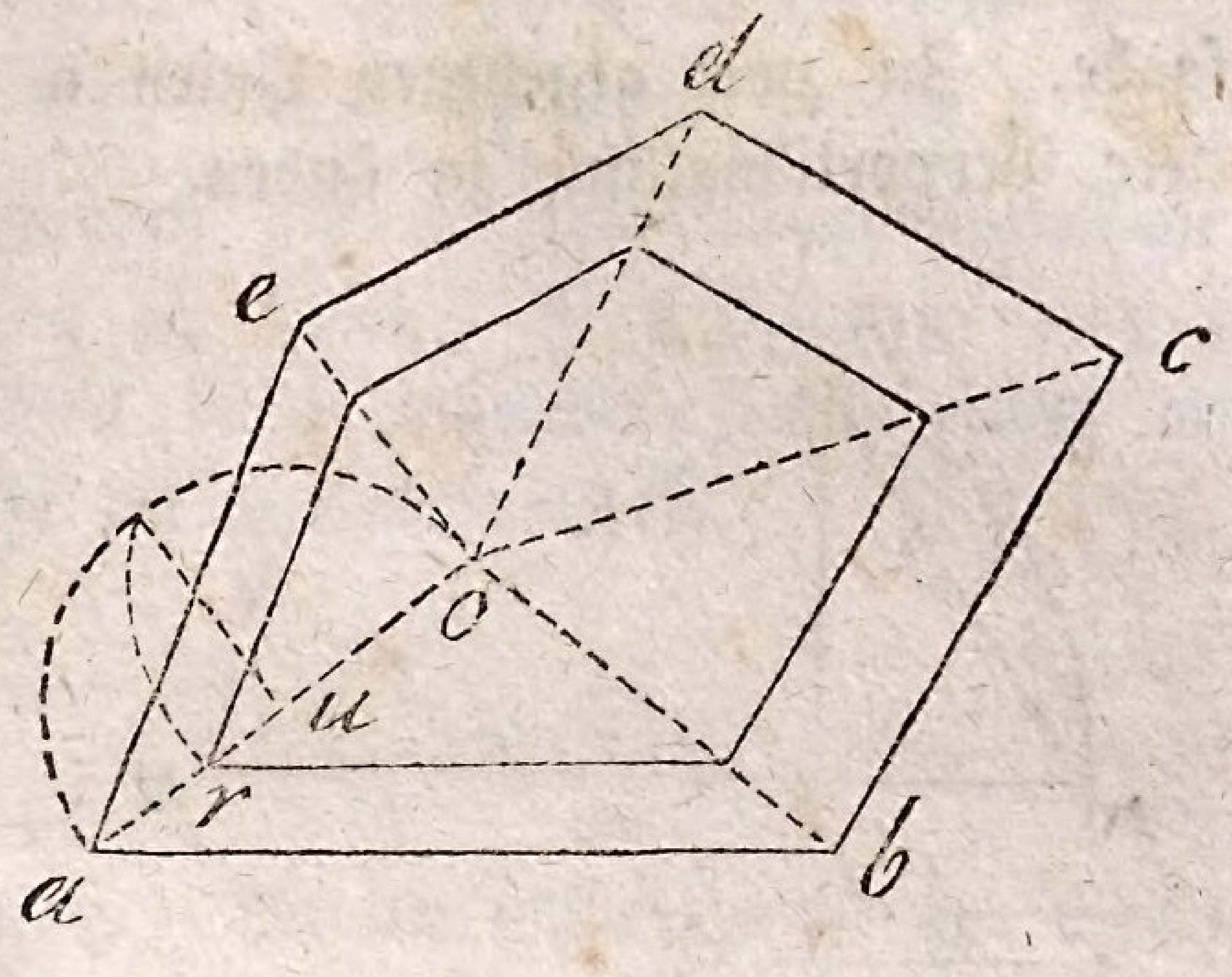
Aufgabe. Ein reguläres Sechseck in 3 gleiche Theile mit allen Seiten parallel einzutheilen.



Auflösung erhellet aus der Figur.

§ 164.

Aufgabe. Ein irreguläres Fünfeck in 2 gleiche Theile mit allen Seiten parallel einzutheilen.



Auflösung. Man nehme einen beliebigen Punkt o bestmöglichst in der Mitte an und verfahre darauf, wie vorhin gezeigt ist.

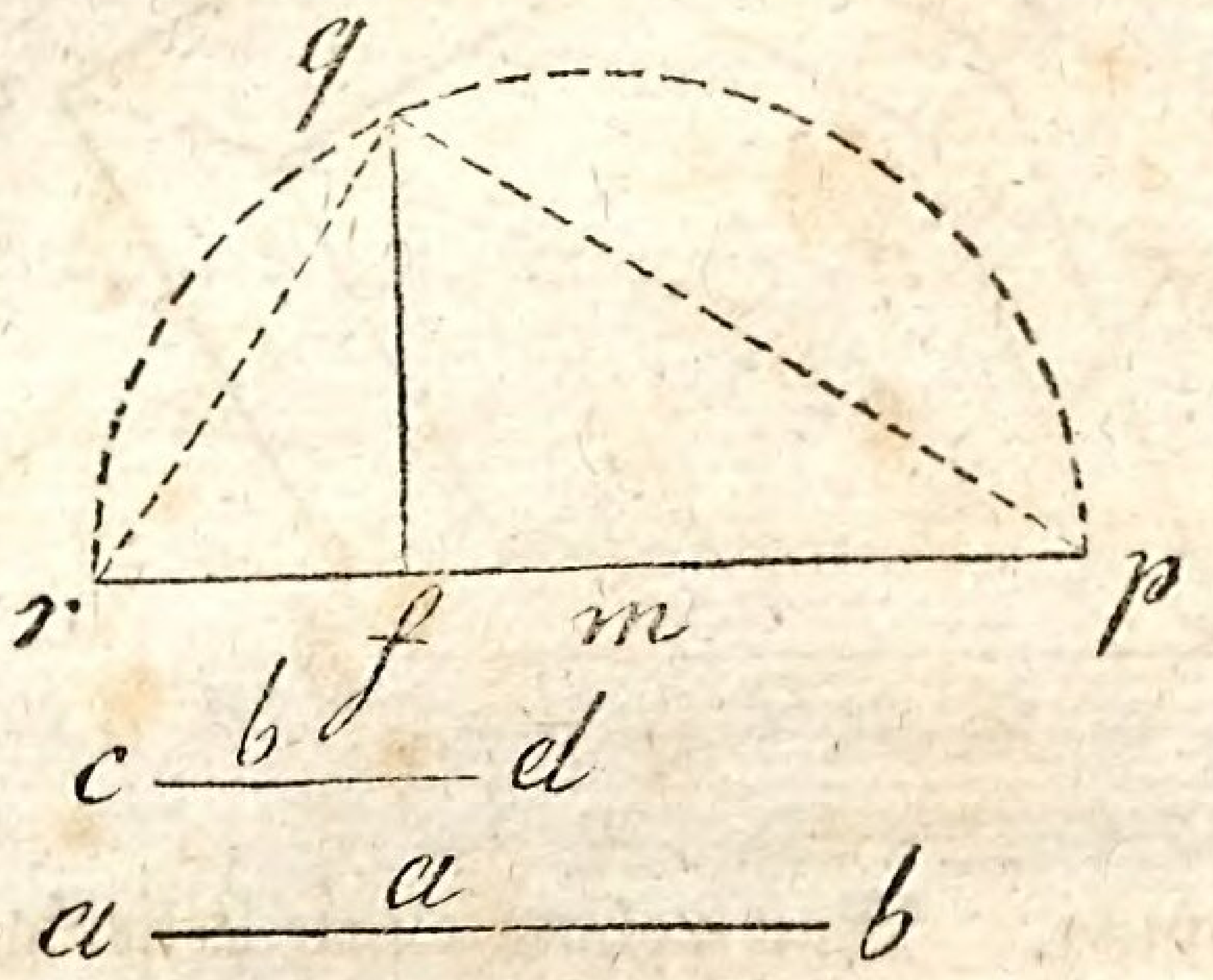
§ 165.

Zusatz. So wie in den vorhergehenden Paragraphen die Dreiecke, Vierecke und Vielecke in gleiche Theile mit zwei und mit allen Seiten parallel eingetheilt worden sind, so kann man sie auch auf diese Weise in ungleiche Theile eintheilen und beliebige Stücke davon abnehmen, wovon ich aber keine Aufgaben hier anführen will, weil ich solches für überflüssiig halte.

E. Von der mittlern Proportionallinie und den Verwandlungen der Figuren in Quadrate.

§ 166.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien a und b die mittlere Proportionallinie zu finden.



Auflösung. a) Geometrisch. Man setze 1. die beiden gegebenen Linien in eine gerade Linie rp zusammen, mache hierauf 2. aus der Mitte m um dieselbe einen halben Kreis, und lasse 3. aus dem Punkte f, in welchem beide Linien zusammen stoßen, eine senkrechte Linie nach q fallen, so ist solche die mittlere Proportionallinie zwischen ab und cd.

Beweis. Da 1. der $\angle q = 90^\circ$ ist, nach § 15. 1. Abschn. und 2. die Linie qf senkrecht auf rp stehet; so ist 3. $\triangle rqf \sim \triangle pfq$ nach § 135. Nr. 3. und folglich verhält sich $pf : fq = fq : fr$. Nach § 135. Nr. 4.

b) Arithmetisch. Wenn die Linie $a = 36^\circ$ und die Linie $b = 16^\circ$ ist, so setzt man auf:

$$a : x = x : b$$

oder

$$36 : x = x : 16.$$ Daher

$$x^2 = 16 \times 36 = 576^\circ$$

$$x = \sqrt{576^\circ} = 24^\circ.$$

Um demnach die mittlere Proportionallinie durch Rechnung zu finden, so multiplizirt man die beiden Linien durch einander, und ziehet aus dem Produkte die Quadratwurzel.

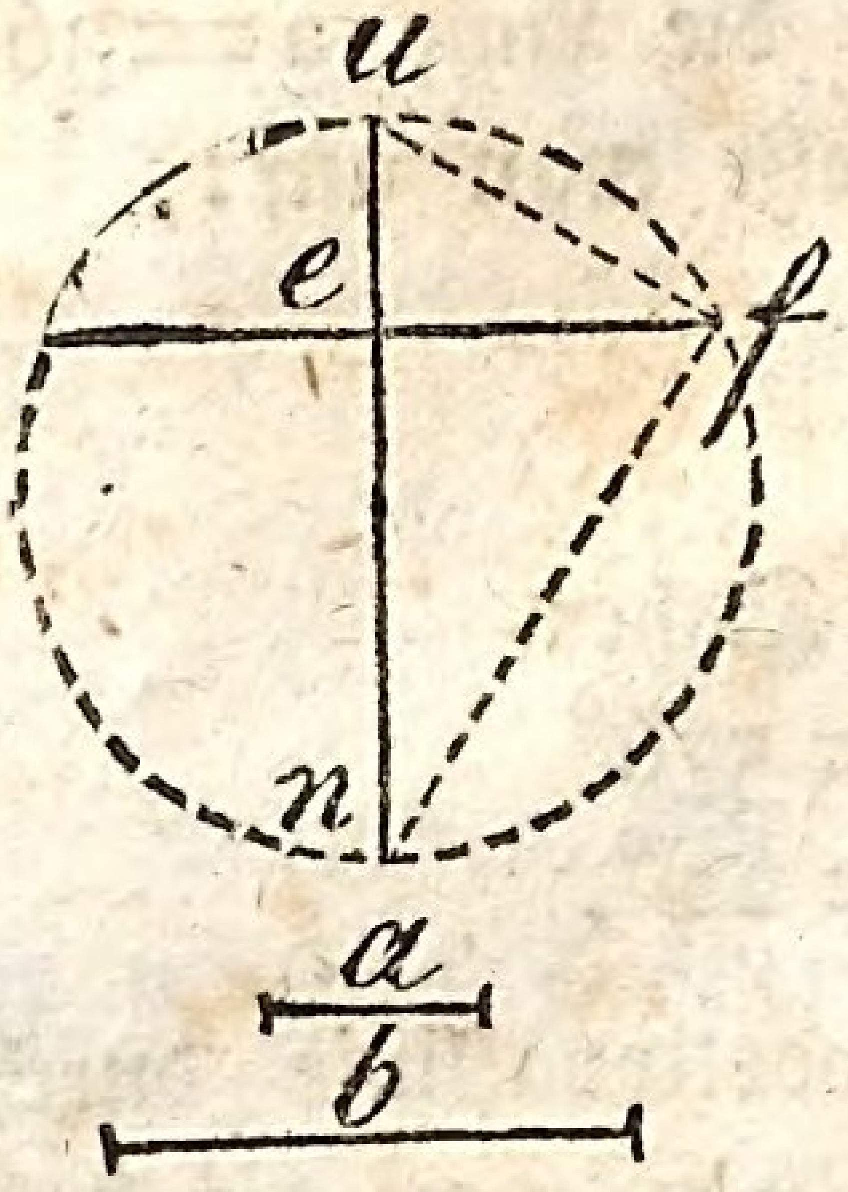
§ 167.

Zusatz. Da die halbe Sehne bei einem Kreise die mittlere Proportionallinie zwischen den Stücken des Durchmessers ist, welche sie von einander trennt, so kann man

1. Sie selbst finden, wenn die Stücken des Durchmessers bekannt sind, und
2. auch jedes Stück des Durchmessers und denselben selbst, wenn die Größe des einen Stückes und die Länge der Sehne gegeben sind.

§ 168.

Aus den gegebenen Stücken eines Durchmessers die Länge der Sehne zu finden. Es sei das kleine Stück $a = 9^\circ$ und das große $b = 16^\circ$, wie groß ist die dazu gehörige Sehne?



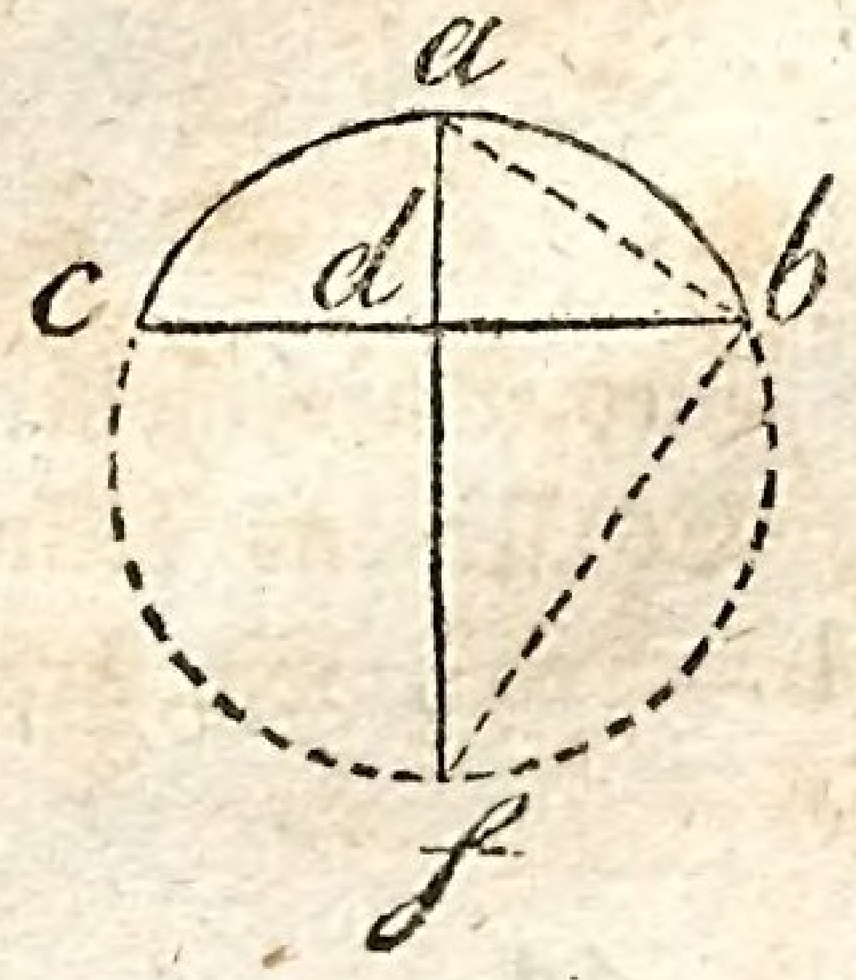
a) Geometrisch. Man setzt 1. die beiden gegebenen Stücke a und b in einer geraden Linie nu zusammen, sucht darauf 2. die Mitte der ganzen Linie, ziehet 3. den dazu gehörigen halben Kreis ufn und läßt 4. eine senkrechte Linie aus dem Verbindungspunkte e beider Linien nach dem halben Kreise hinfallen. Ist dieses geschehen, so ist die senkrechte Linie ef die halbe Sehne, und folglich doppelt genommen die ganze Sehne.

b) Arithmetisch. Man setzt auf:

$$a : x = x : b$$
$$9 : x = x : 16$$
$$x^2 = 9 \times 16^\circ = 144^\circ$$
$$x = \sqrt{144} = 12^\circ = ef.$$

§ 169.

Aus der gegebenen Weite eines Kreisbogens von der Sehne und der Länge der Sehne den dazu gehörigen Durchmesser zu finden. Es sei ad $= 9^\circ$ und bc $= 24^\circ$, wie groß ist der dazu gehörige Durchmesser af?



a) Geometrisch. Man errichte 1. aus der Mitte der Sehne die senkrechte Linie ad. Man ziehe 2. die Linie ab, setze 3. an b den rechten Winkel abf, und verlängere 4. die Linie ad so lange, bis sie

den Schenkel bf durchschneidet. Da wo alsdann solches in f geschiehet, ist der 2te Endpunkt des Durchmessers, von welchem a der 1ste ist, und folglich ist af = dem Durchmesser, und df = dem 2ten von der Sehne bc abgeschnittenen Stücke desselben.

b) Arithmetisch. Man setze auf:

$$9^\circ : 12 = 12 : df$$

$$df = \frac{12 \cdot 12}{9} = \frac{144}{9} = 16$$

also $df + ad = 16 + 9 = 25^\circ$.

§ 170.

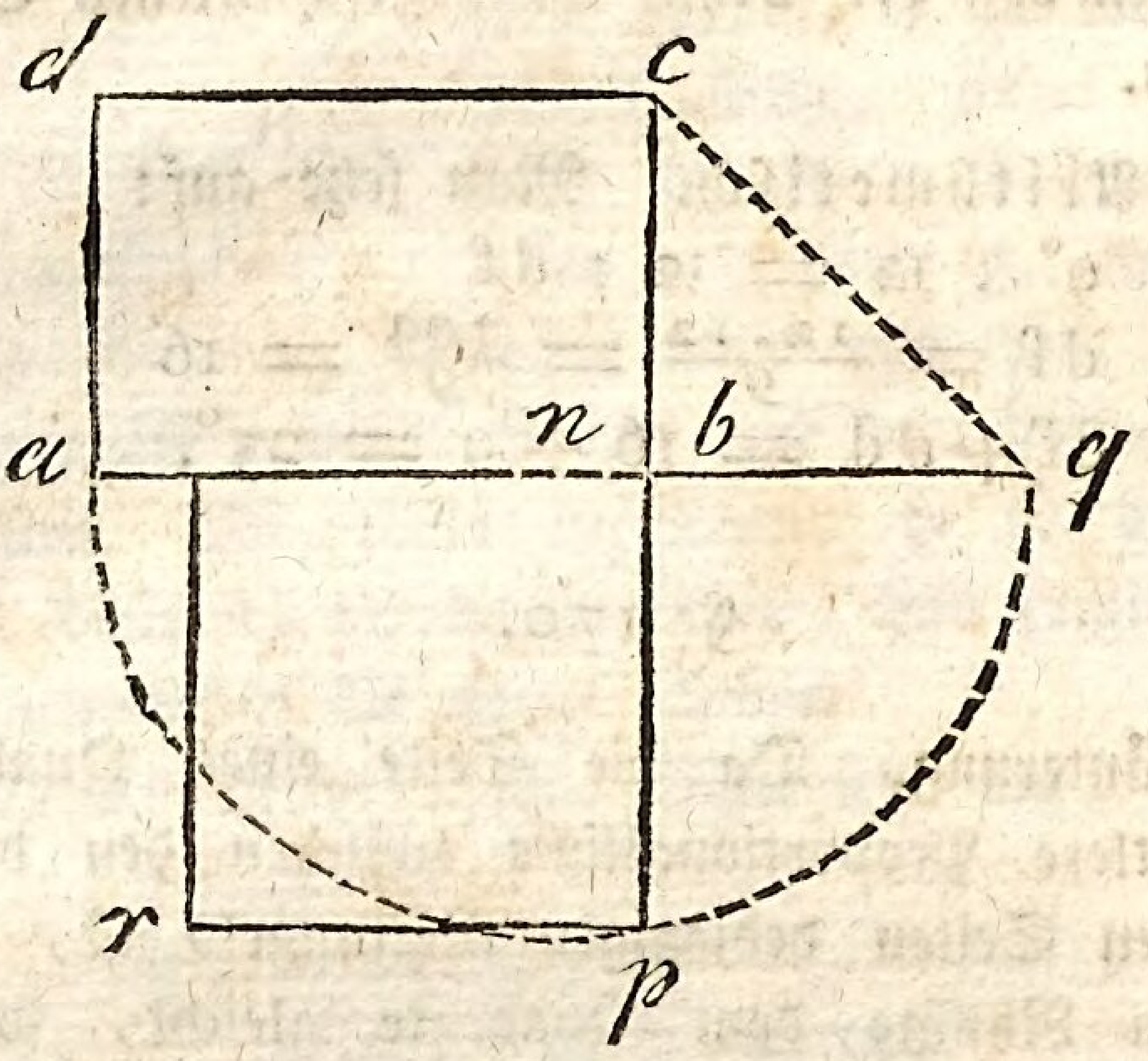
Erläuterung. Da die Seite eines Quadrats die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden ungleichen Seiten desjenigen Rektangels ist, welches am Raume dem Quadrate gleicht, so gebraucht man bei der Verwandlung eines Rektangels in ein Quadrat nur die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden ungleichen Seiten des gegebenen Rektangels zu suchen.

§ 171.

Aufgabe. Ein Rektangel, dessen Grundlinie $ab = 36^\circ$ und dessen Höhe $cb = 25^\circ$ ist, in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. a) Geometrisch. Man verlängere 1. die Seite ab und trage 2. cb aus b bis q. 3. Ziehe man aus der Mitte n der Linie aq den halben Kreis apq und lasse 4. aus b die senkrechte Linie bp fallen. Diese senkrechte Linie

b p ist alsdann die mittlere Proportionallinie zwischen a b und c b, und daher gleich der Seite des Quadrats, welches am Raume dem Rektangel a b c d gleicht.



Beweis. Der Inhalt des □ $abcd = ab \times cb$ und der Inhalt des Quadrats $ubpr = bp^2$.
Nun verhält sich aber $ab : bp = bp : bq$
und da $bq = bc$
so $ab : bq = bq : bc$
also $bq^2 = ab \times cb$.

b) Arithmetisch. Man setze auf:

$36 : bp = bp : 25$

$bp^2 = 36 . 25 . = 900^{\circ}$

also $bp = \sqrt{900} = 30^{\circ}$.

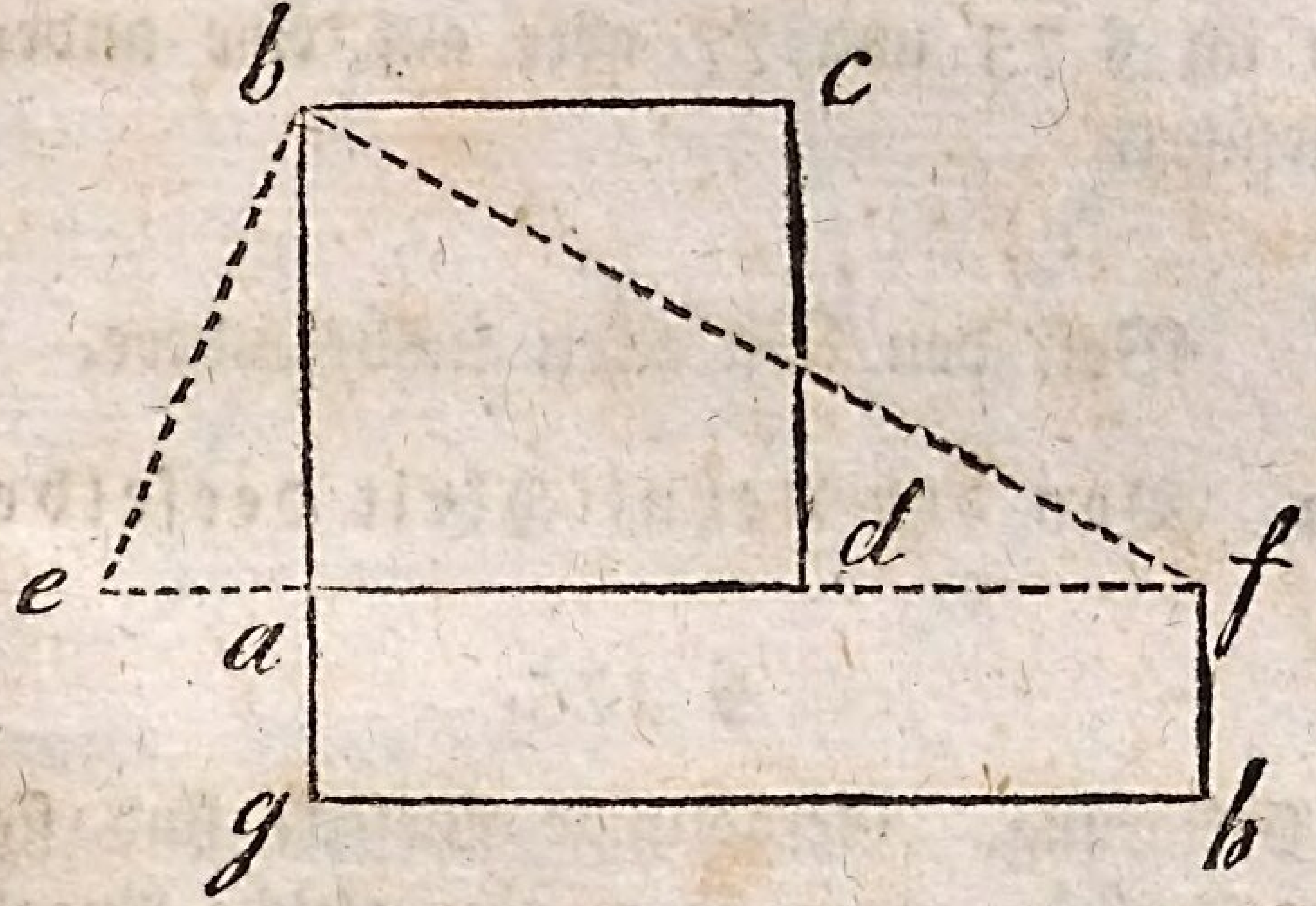
§ 172.

Zusatz. Soll man demnach ein Dreieck, Viereck, welches kein Rektangel ist, und ein Vieleck

in ein Quadrat verwandeln, so verwandele man jede von diesen Figuren zuerst nach den §§ 64 und 65 in ein Rektangel und darauf dieses Rektangel nach § 171 in ein Quadrat.

§ 173.

Aufgabe. Ein Quadrat in ein Rektangel, dessen Höhe ae gegeben ist, zu verwandeln.



Auflösung. Man setze 1. die gegebene Höhe ae an die nach der einen Seite hin verlängerte Grundlinie des Quadrats. 2. Setze man an eb den rechten ∠ ebf, und verlängere 3. die Grundlinie des Quadrats, bis solche die Linie bf durchschneidet. Hierauf verlängere man 4. die Seite des Quadrats ba, und mache ae = ag und ziehe 5. gh mit af und fh mit ag parallel, so ist das Rekt. aghf = dem Quadr. abcd.

Beweis. Da ag = ae ist

und ae : ab = ab : af;

so ist $ab^2 = ae \times af = ag \times af$; oder

Quadr. abcd = Rekt. agfh.

Will man demnach die Grundlinie des Rektangels in Zahlen finden, so braucht man nur den Inhalt des Quadrats durch die gegebene Höhe des Rektangels zu dividiren, weil $\frac{ab^2}{ag} = af$ ist.

§ 174.

Zusatz. Diese letzte Verwandlung findet sich schon im § 75 und 77 aber auf eine andere Art ausgeführt.

Von den Vielecken insbesondere.

a. Von der Aehnlichkeit derselben.

§ 175.

Erklärung. Geradlinige Vielecke sind sich einander ähnlich, wenn sie 1. eine gleiche Anzahl von Seiten haben. 2. Wenn die Winkel einzeln genommen in der einen Figur so groß als in der andern sind. Und 3. wenn die gleichnamigen Seiten in der einen mit denen in der andern einerlei Verhältnisse haben.

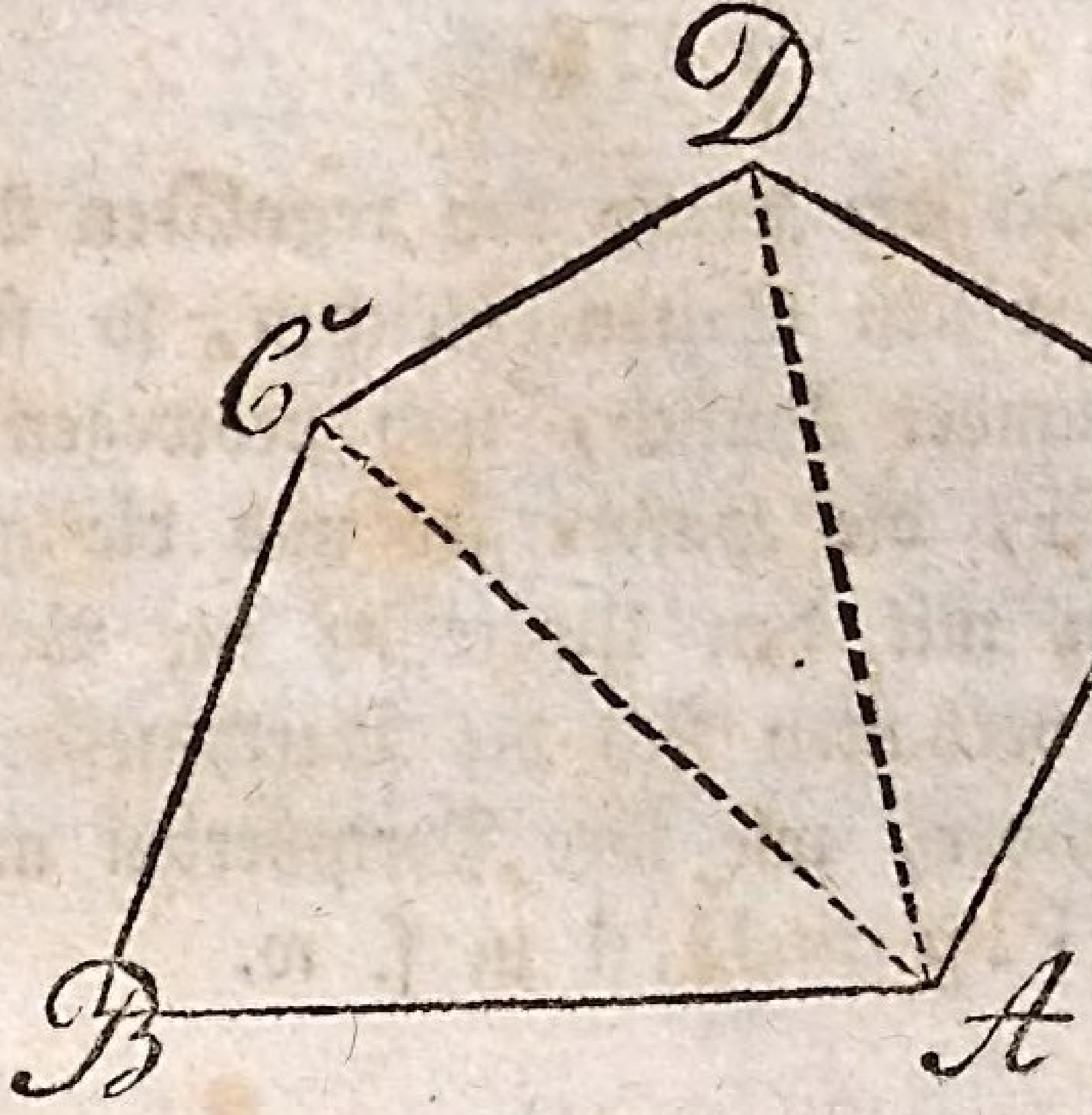
§ 176.

Zusatz. 1. Reguläre Vielecke von gleicher Anzahl Seiten sind sich daher einander ähnlich.

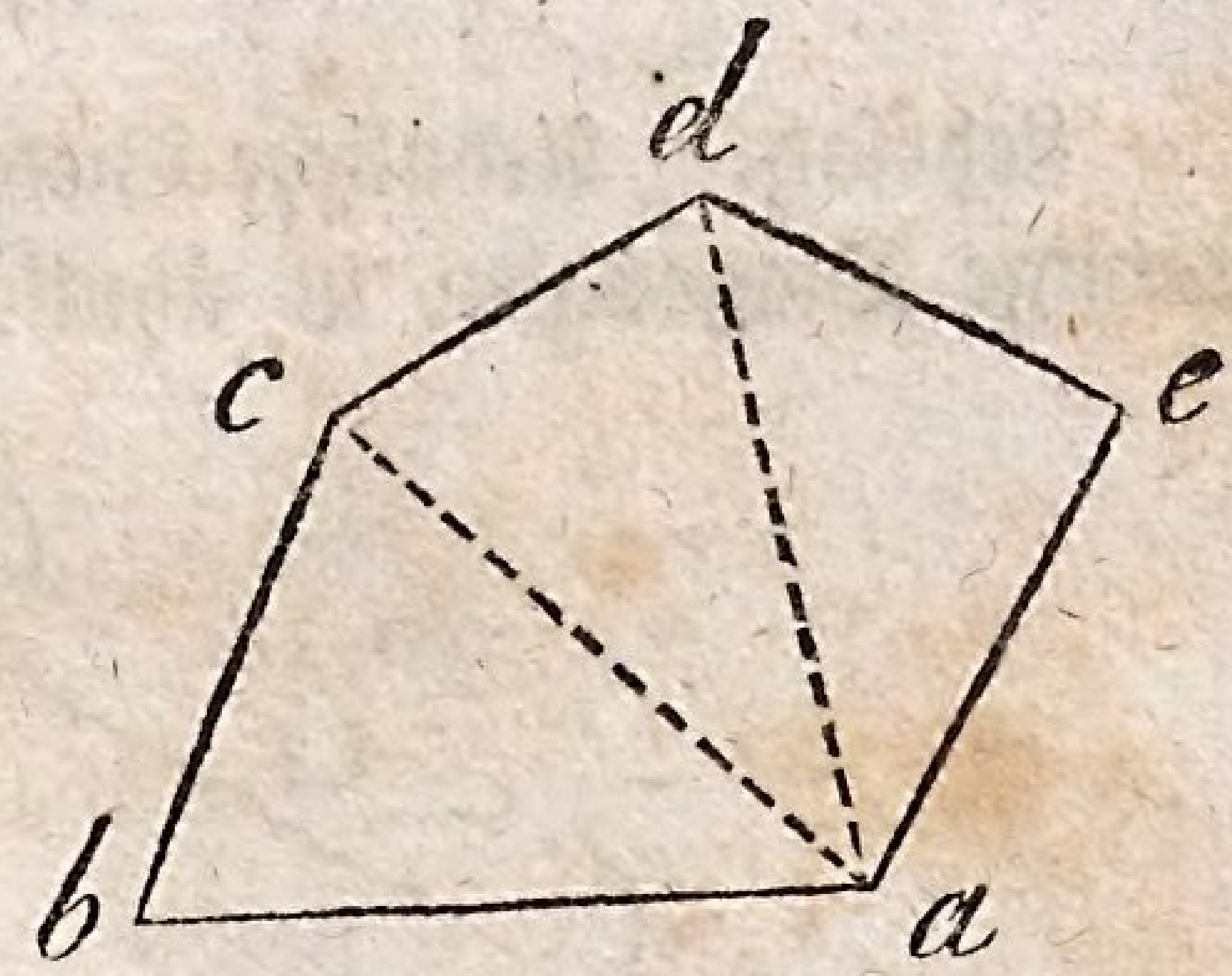
2. Da der Kreis einem regulären Vielecke von unendlich vielen Seiten gleicht, so müssen alle Kreise sich ähnlich sein.

§. 177.

Lehrsatz. In ähnlichen Vielecken ABCDE und abcde verhalten sich die gleichnamigen Diagonalen zu einander, wie die gleichnamigen Seiten.



Beweis. Wenn die in beiden Figuren mit gleichen Buchstaben bezeichneten Seiten und Winkel gleichnamige Seiten *) und Winkel sind, so verhält sich:



I. $AB : BC = ab : bc$, nach § 173. 3.
und da $\angle B = \angle b$ ist,

so ist $\triangle ABC \sim \triangle abc$ nach § 131. No. 2.

---

*) Gleichnamige Seiten sind solche, welche gleichen Winkeln gegenüber stehen.

Folglich II. AB : AC = ab : ac
daher BC : AC = bc : ac
und BC : bc = AC : ac.

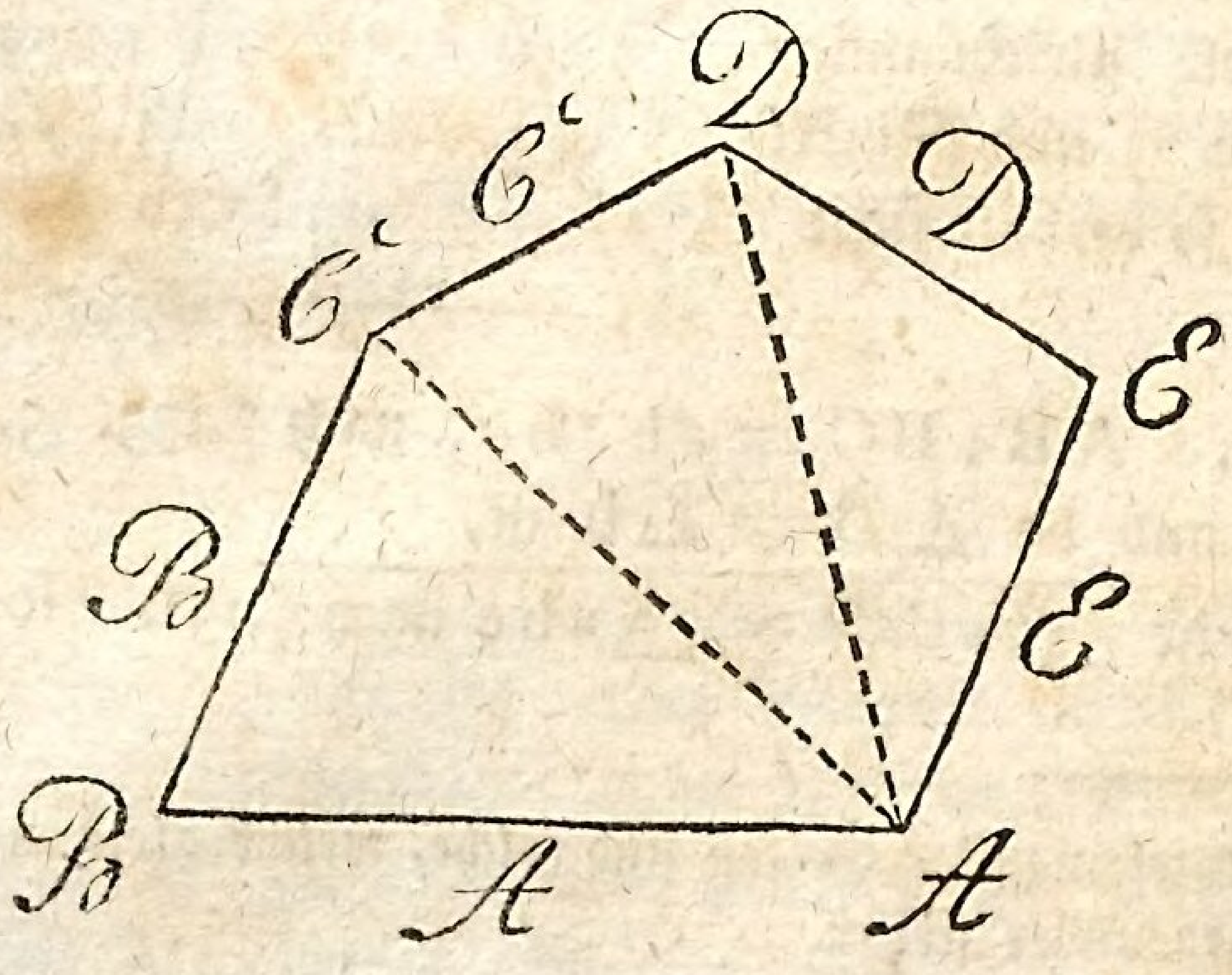
Eben dieses kann auch von den andern Diagonalen bewiesen werden.

§ 178.

Zusatz. Da die Kreise den regulären Vielecken von unendlich vielen Seiten gleichen, so sind alle Kreise sich einander ähnlich, und deswegen müssen die Durchmesser, die Halbmesser und die gleichnamigen Sehnen mit den Umkreisen im Verhältniß stehen; daher verhalten sich die Durchmesser zweier Kreise zu einander, wie ihre Peripherien und umgekehrt; d. i. P:p = D:d u. s. w.

§ 179.

Lehrsatz. Aehnliche Vielecke werden durch gleichnamige Diagonalen in ähnliche Dreiecke getheilt.



Beweis. Weil die Vielecke ähnlich sind, so verhält sich

$$AB : BC = ab : bc$$
$$\text{und } BC : AC = bc : ac$$

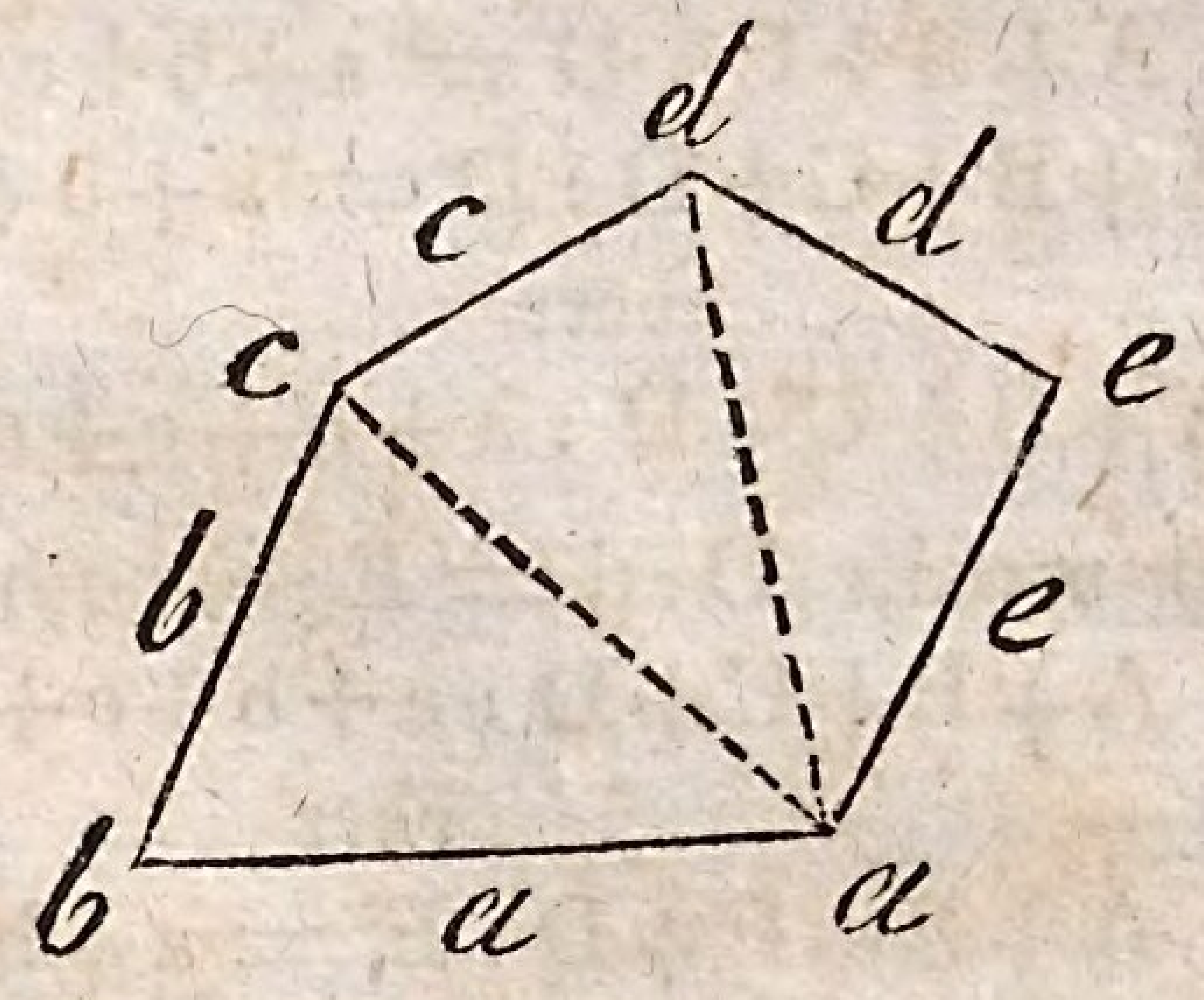
$$\text{also ist } \triangle ABC \sim \triangle abc.$$

Eben so kann bewiesen werden, daß

$$\triangle ADC \sim \triangle adc$$
$$\text{und } \triangle ADE \sim \triangle ade \text{ sei.}$$

§ 180.

Lehrsatz. Die Umkreise oder Perimeter ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie jedes Paar gleichnamiger Seiten des einen Vielecks zu jedem Paare gleichnamiger Seiten des andern.



Es sei $AB = A$; $ab = a$

$BC = B$; $bc = b$ u. s. w.

und $A + B + C + D + E = P$ = dem Umfange der einen Figur, und $a + b + c + d + e = p$ = dem Umfange der andern Figur; so ist zu beweisen, daß sich verhalte

$$P : p = A : a$$
$$= B : b$$
$$= C : c \text{ u. s. w.}$$

Beweis. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke verhält sich

$$1.\ A:a = B:b;\quad 2.\ B:b = C:c.$$
$$3.\ C:c = D:d;\quad 4.\ D:d = E:e.$$

Aus diesen folgt:

1. $A+B:B = a+b:b$; oder $A+B:a+b = B:b$.

Und da sich verhält $B:b = C:c$ nach No. 2.
so ist $A+B:a+b = C:c$; oder $A+B:C = a+b:c$
daher 2. $A+B+C:C = a+b+c:c$;

oder

$$A+B+C:a+b+c = C:c.$$

Und da sich verhält $C:c = D:d$ nach No. 3.
so ist auch $A+B+C:a+b+c = D:d$;

oder

$$A+B+C:D = a+b+c:d$$

daher 3. $A+B+C+D:D = a+b+c+d:d$;

oder

$$A+B+C+D:a+b+c+d = D:d.$$

Und da sich verhält $D:d = E:e$ nach No. 4.
so ist auch $A+B+C+D:a+b+c+d = E:e$

oder

$$A+B+C+D:E = a+b+c+d:e$$

daher 4. $A+B+C+D+E:E = a+b+c+d+e:e$;

oder

$$A+B+C+D+E:a+b+c+d+e = E:e;$$

das ist:

$$\begin{aligned} P:p &= E:e \\ &= D:d \\ &= C:c \\ &= B:b \\ &= A:a. \end{aligned}$$

§ 181.

Zusatz. Hierauf gründet sich die Abkopirung der Figuren, oder die Abtragung gemessener Felder oder Fluren auf das Papier.

§ 182.

Lehrsatz. Aehnliche Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Da man die ähnlichen Vielecke in ähnliche Dreiecke theilen kann, so verhält sich im § 177

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$$
$$\triangle ACD : \triangle acd = CD^2 : cd^2$$
$$\triangle ADE : \triangle ade = AE^2 : ae^2.$$

Weil nun aber die Seiten dieser Dreiecke mit einander in einerlei Verhältnisse stehen, so stehen auch die Seiten der Quadrate mit einander in gleichen Verhältnissen; Wenn man nun das erste Verhältniß

$$AB^2 : ab^2$$

anstatt der übrigen setzt, so haben auch alle Dreiecke dies Verhältniß, d. h.

$$\triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle DAE : \triangle dae = AB^2 : ab^2.$$

Folglich auch

$$\triangle ABC + ACD + ADE : \triangle abc + acd + ade = AB^2 : ab^2$$

oder

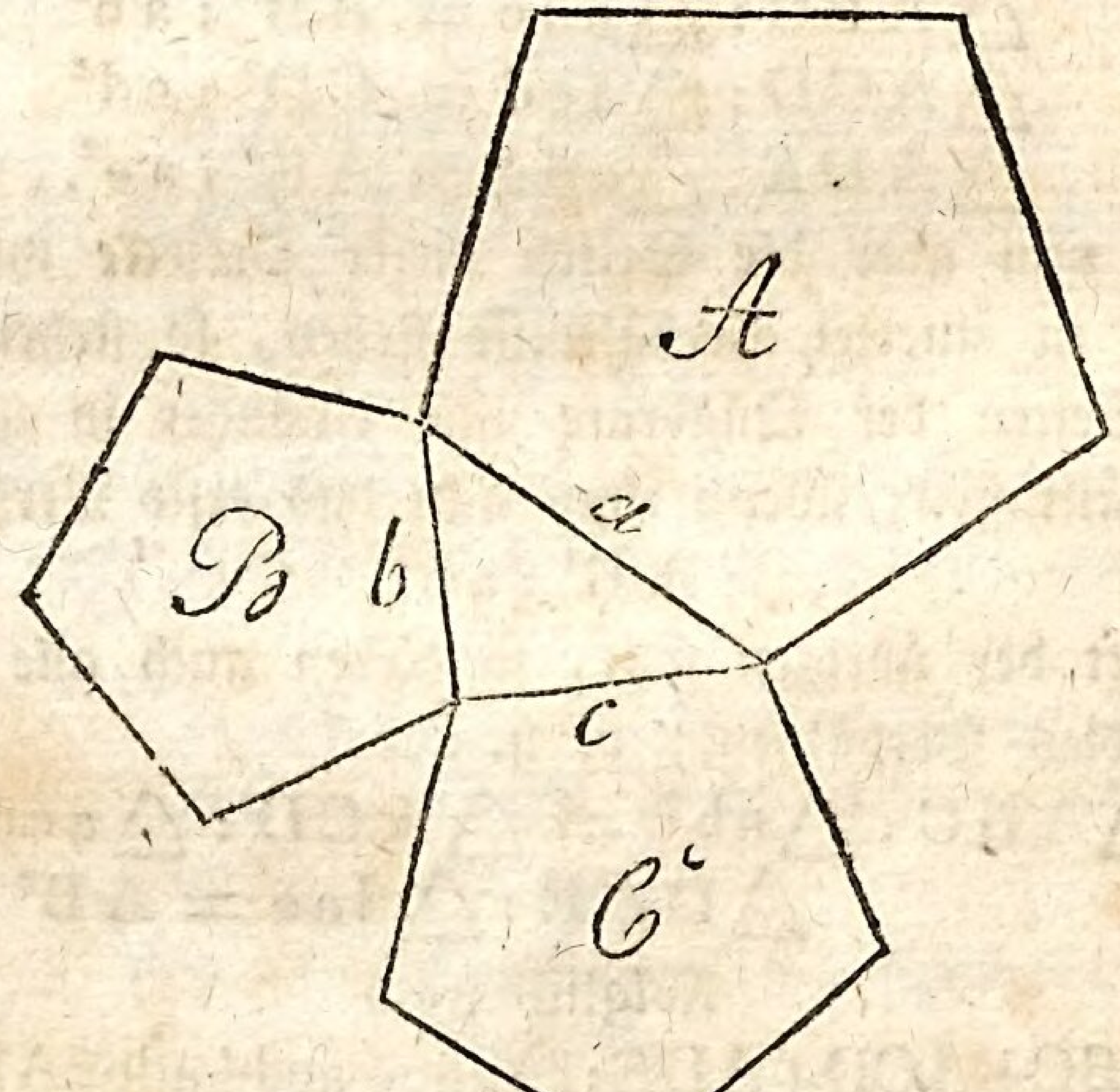
Vieleck $ABCDE$: Vieleck $abcde = AB^2 : ab^2$ d. h. wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten, oder auch wie die Quadrate ähnlich liegender Diagonalen.

§ 183.

Zusatz. Daher verhalten sich auch die Kreisflächen zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

§ 184.

Lehrsatz. Wenn auf die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren so gesetzt werden, daß die Seiten des Dreiecks die Seiten der ähnlichen Figuren ausmachen, so ist die über der Hypothenuse stehende Figur so groß als die beiden auf den Catheten stehenden Figuren.



Beweis. Ist A = der Figur a. d. Hypothenuse,
B + C = den Figuren a. d. Katheten,
a = der Hypothenuse,
und b + c = den Katheten,

so verhält sich $A : C = a^2 : c^2$, nach § 135.

oder $A : a^2 = C : c^2$. I.

Ferner $B : C = b^2 : c^2$

also $B + C : C = b^2 + c^2 : c^2$

oder $B + C : b^2 + c^2 = C : c^2$. II.

Daher $A : a^2 = B + C : b^2 + c^2$, nach I und II.

Also ist $A = \frac{(B+C)\,a^2}{b^2 + c^2}$

Da aber $a^2 = b^2 + c^2$ nach § 83 ist,

so ist $A = B + C$; und $C = A - B$ rc.

§ 185.

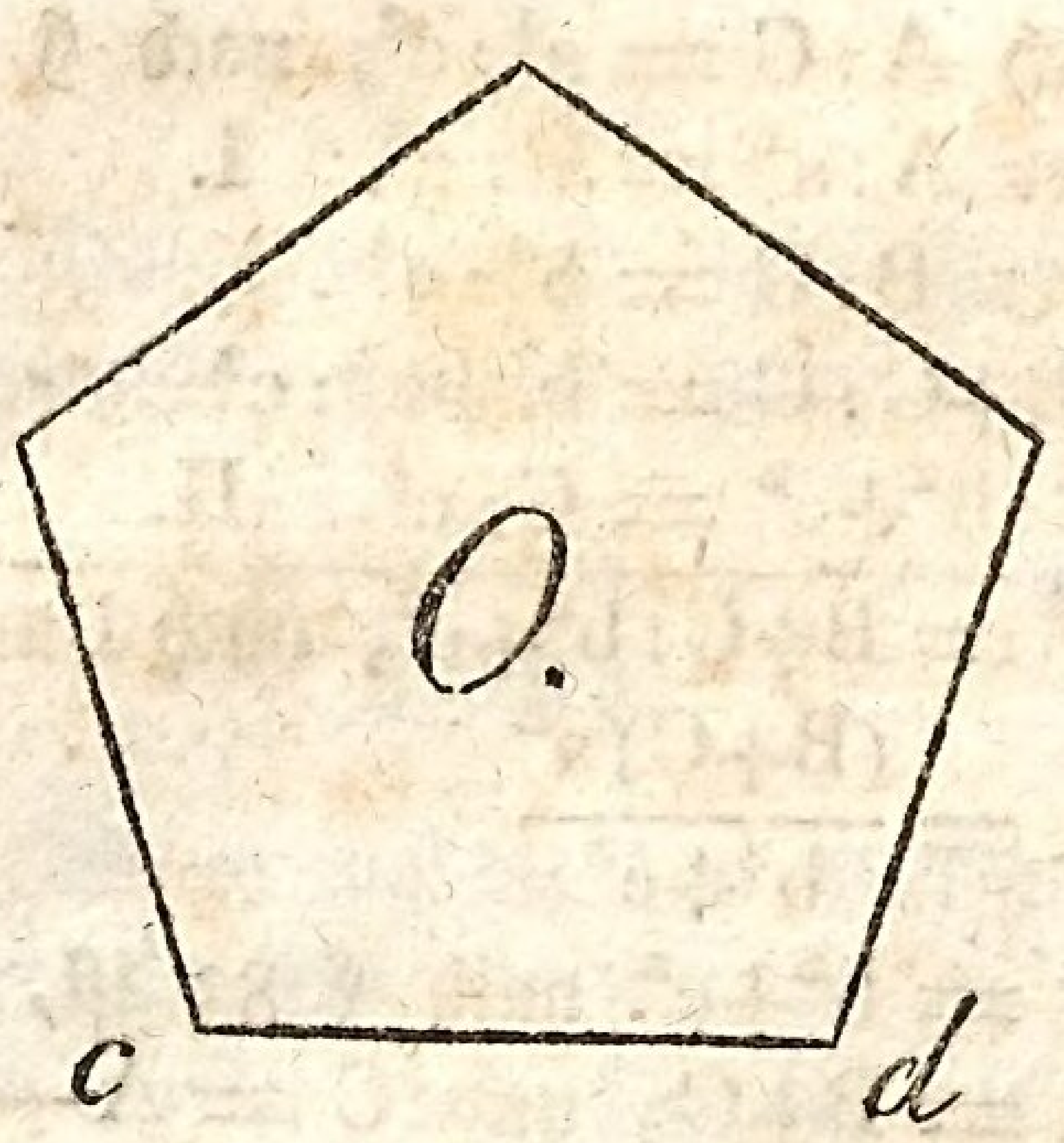
Zusatz. Dieser Lehrsatz dient zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ähnlicher Vielecke und überhaupt ähnlicher Figuren, wobei eben so, wie bei der Addition, Subtraktion u. s. w. der Quadrate in den §§ 85—91 verfahren ist, verfahren wird.

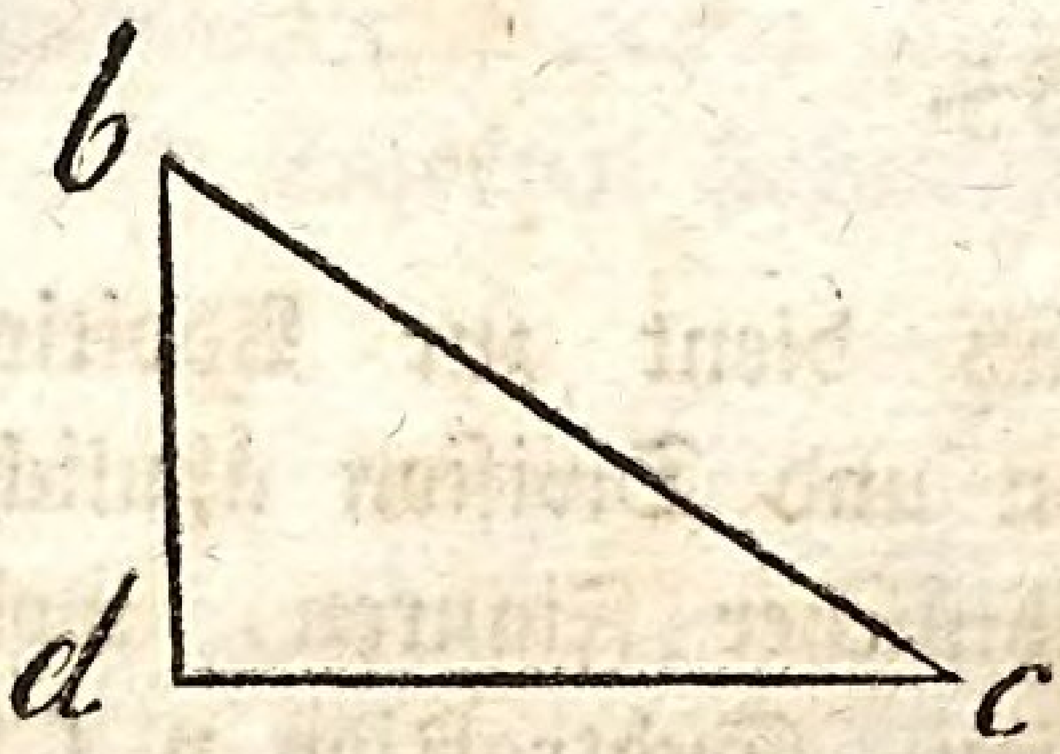
§ 186.

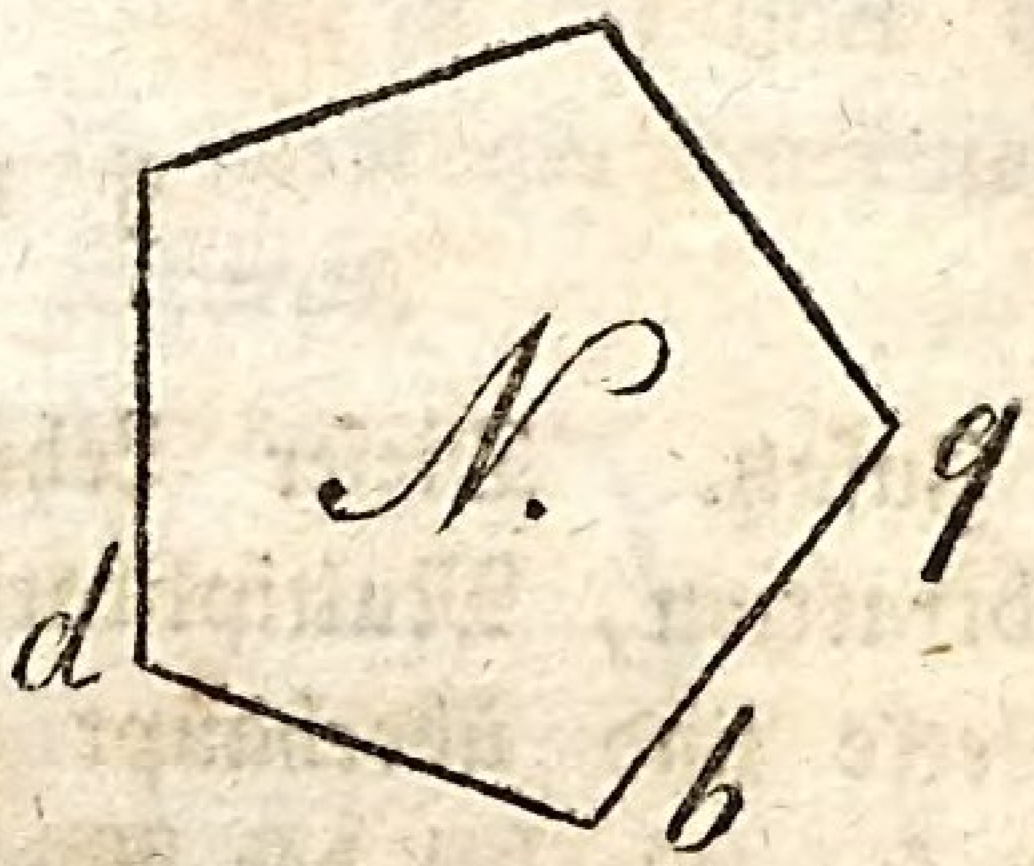
Aufgabe. Zwei reguläre Fünfecke zusammen zu addiren.

Auflösung. Man nimmt von jedem Fünfecke O und N eine Seite, setzt solche rechtwinklig in d an einander, und ziehet die Hypothenuse b c, welche alsdann die Seite eines Fünfecks abgiebt, welches so groß, als die beiden gegebenen O und N zusammen genommen, ist.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

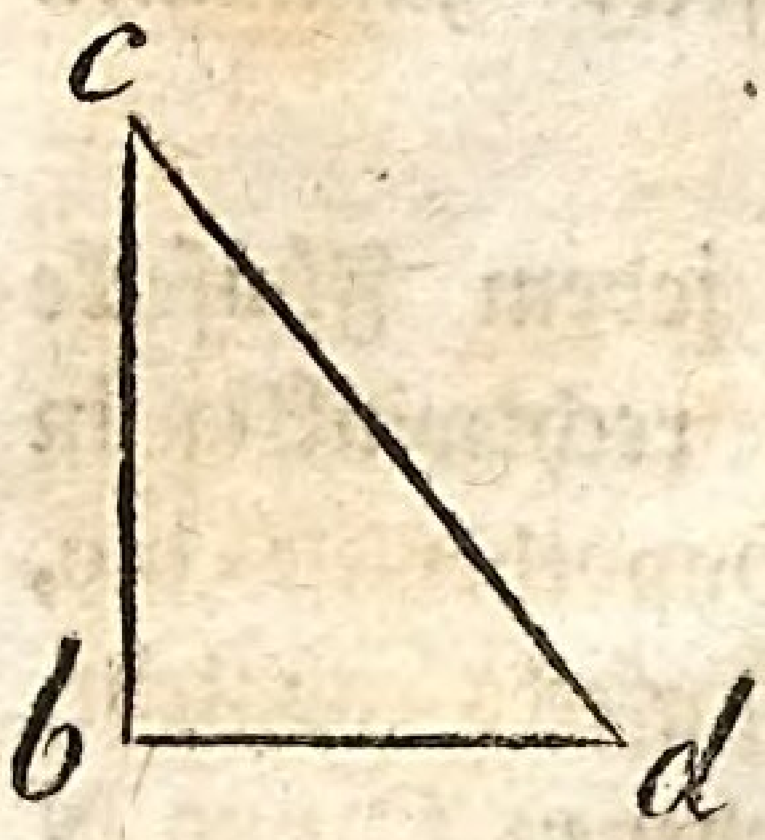






§ 187.

Aufgabe. Von dem großen Fünfecke O im § 186 das kleine Fünfeck N abzuziehen.

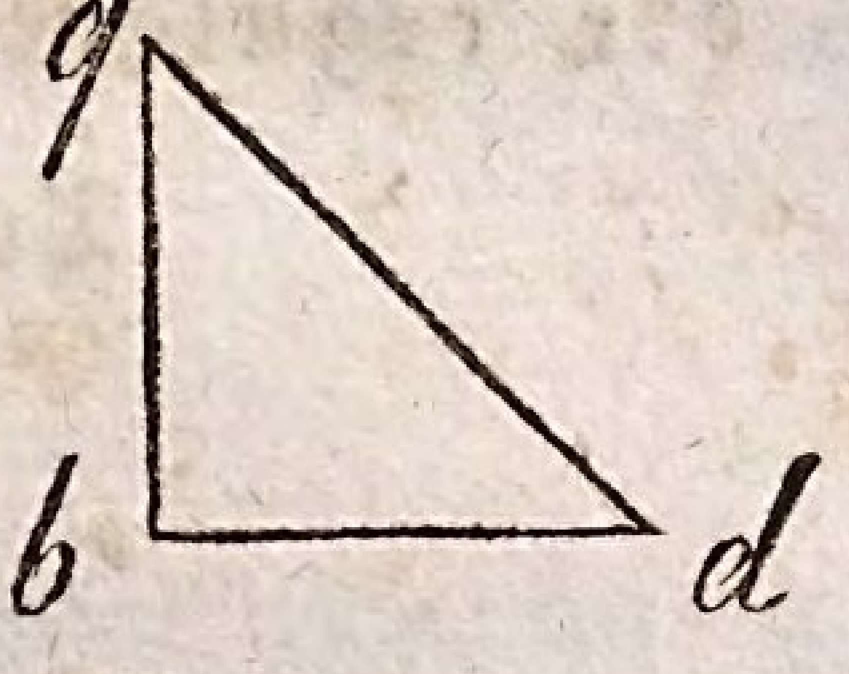


Auflösung. Man nimmt die Seite des kleinen Fünfecks N als Grundlinie an, und setzt daran die Seite c d des großen 5ecks O (nach § 87) als Hypothenuse, so ist die dadurch gefundene Kathete c b die Seite desjenigen Fünfecks, welches den Unterschied zwischen den beiden O und N des vorigen Paragraphen ausmacht.

§ 188.

Aufgabe. Das kleine Fünfeck N im § 186 noch einmal so groß zu machen.

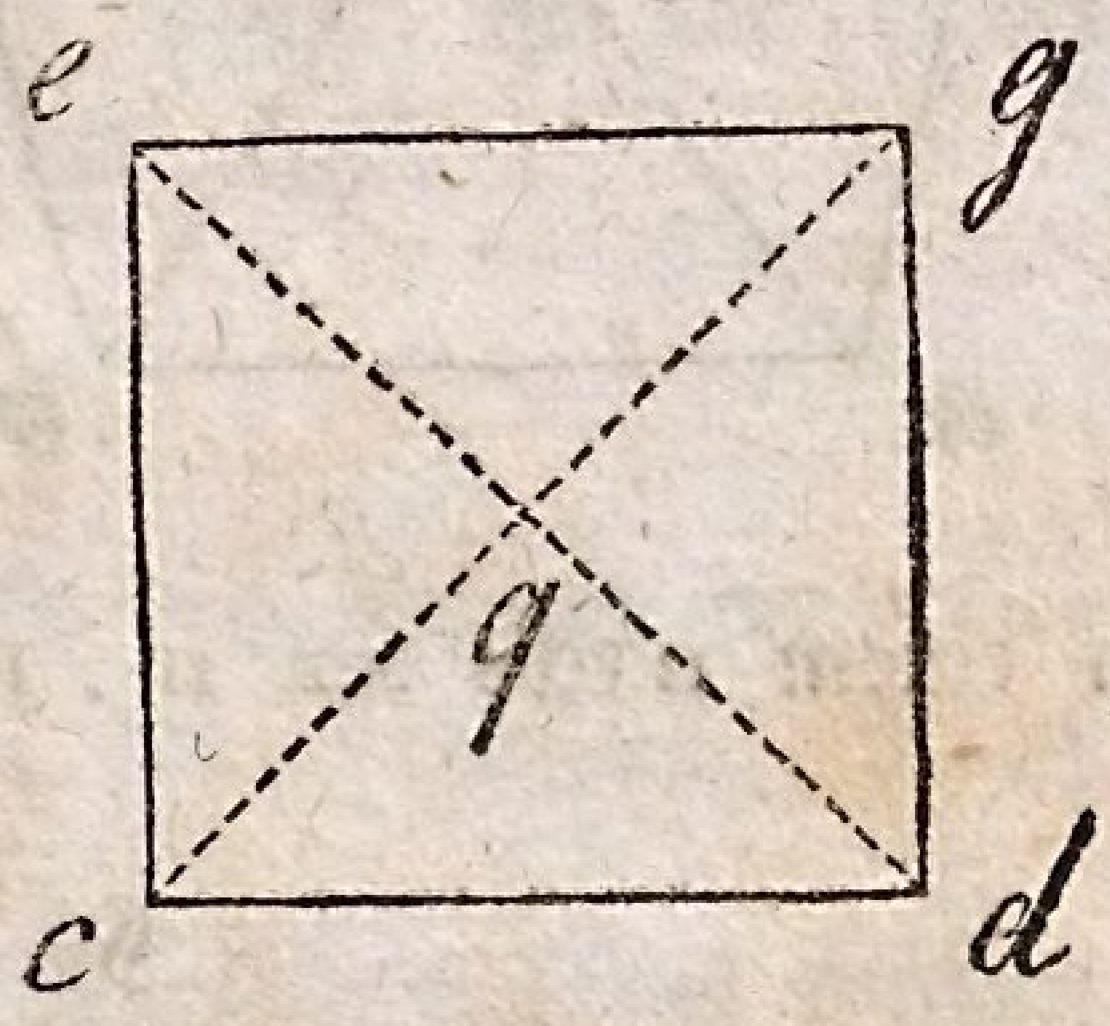
Auflösung. Man nehme zwei Seiten bd und bq von dem Fünfecke N, setze solche rechtwinklig in b an einander, und ziehe die Hypothenuse qd, so ist diese die Seite desjenigen Fünfecks, welches noch einmal so groß als das kleine Fünfeck N ist.



§ 189.

Aufgabe. Das große Fünfeck O im § 186 noch einmal so klein zu machen.

Auflösung. Man nehme die Seite cd des großen Fünfecks O und setze darauf ein Quadrat, so macht die halbe Diagonallinie cq desselben die Seite des zu suchenden Fünfecks aus.



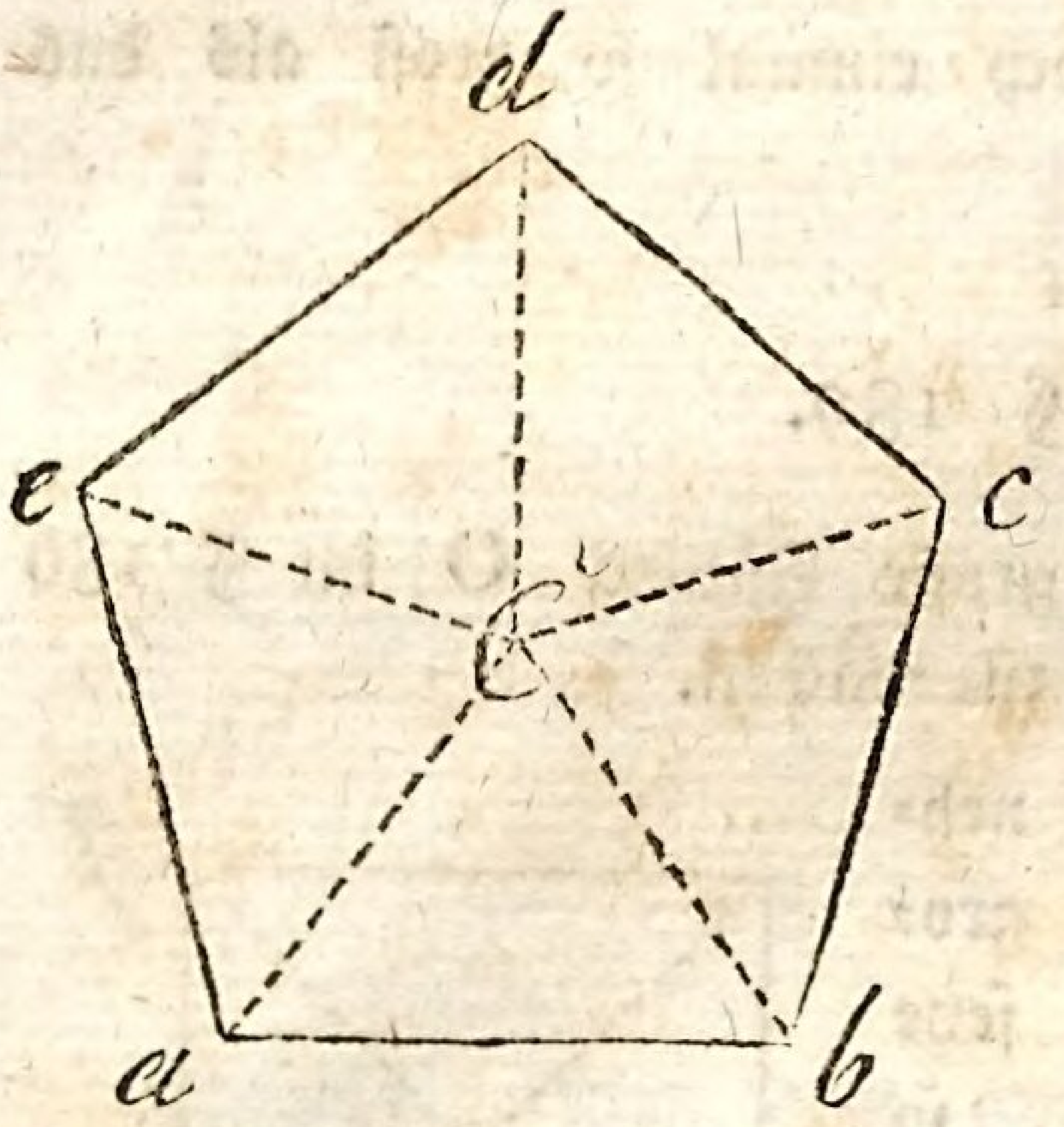
§ 190.

Zusatz. Auf eben diese Weise können alle regulären Vielecke und überhaupt alle regulären Figuren addirt, subtrahirt, multiplicirt und dividirt werden, und auch alle irregulären Dreiecke, Vier-

ecke und Vielecke, nur machen die Aufgaben von diesen letztern weit mehr Schwierigkeiten. *)

b. Von der Aufreißung der regulären Vielecke vermöge des Transporteurs.

§ 191.



Da jedes Vieleck, wenn seine Theilungslinien aus der Mitte nach den Winkeln hingezogen werden, in so viele Dreiecke getheilt werden kann, als es Seiten hat, so muß die Summe aller Winkel in einem Fünfecke = 5 . 180° = 900°, in einem n ecke = n . 180° sein.

§ 192.

Zusatz. Wenn man demnach die Summe der Winkel am Umfange einer solchen Figur, die man

*) Die Division oder Eintheilung der Figuren in gleiche Theile, wobei sie aber sich ähnlich bleiben, geschiehet weit leichter nach den §§ 160—166 als nach dem § 189.

Polygonwinkel nennt, wissen will, so braucht man nur von der ganzen Summe der Winkel des Vielecks die Summe der Winkel, welche im Mittelpunkte desselben liegen und 360° ausmachen, abzuziehen; z. B. die Summe der Winkel des Fünfecks ist 900°, daher $900 - 360^\circ = 540^\circ =$ der Summe der Polygon-Winkel.

§ 193.

Zusatz. Da bei den regulären Vielecken die Dreiecke, worin solche aus dem Mittelpunkte können getheilt werden, sich gleich und gewöhnlich gleichschenklig sind, so kann man den Polygonwinkel einer solchen Figur dadurch finden, daß man die Summe aller Polygonwinkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks dividirt. So macht z. B. die Summe aller Polygonwinkel eines Fünfecks $= 900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$ aus; daher ist der Polygonwinkel desselben $= \frac{540}{5} = 108^\circ$.

§ 194.

Zusatz. Wird nun z. B. die Anzahl der Seiten eines regulären Vielecks $= n$ gesetzt, so ist $\frac{360^\circ}{n} =$ dem Winkel an der Spitze eines solchen Dreiecks, worin das Vieleck getheilt worden ist, oder gleich dem Mittelpunkts-Winkel, und $180 . n$ $=$ der Summe aller Winkel eines solchen Vielecks; $180 . n - 360^\circ =$ der Summe aller Polygonwinkel, und $\frac{180 . n - 360}{n} = \frac{(2n - 4)}{n} 90 =$

der Größe eines Polygonwinkels. Diesen Polygonwinkel kann man auch dadurch finden, daß man von der Summe der Winkel im Dreiecke den Mittelpunktswinkel abziehet, wo er alsdann $= 180 - \frac{360°}{n}$

oder $= \frac{180 \,.\, n - 360}{n.}$

oder $= \frac{(n-2) \,.\, 180}{n}$ ist.

§ 195.

Zusatz. Soll man demnach ein reguläres Vieleck einem Kreise einschreiben *), so muß man 360° durch die Anzahl der Seiten des Vielecks dividiren; und soll man auf eine gegebene Linie ein reguläres Vieleck errichten, so muß man dessen Polygonwinkel suchen und denselben an die Endpunkte der Linie hinsetzen, wie folgende Aufgaben lehren werden.

§ 196.

Aufgabe. Ein reguläres Achteck einem Kreise einzuschreiben.

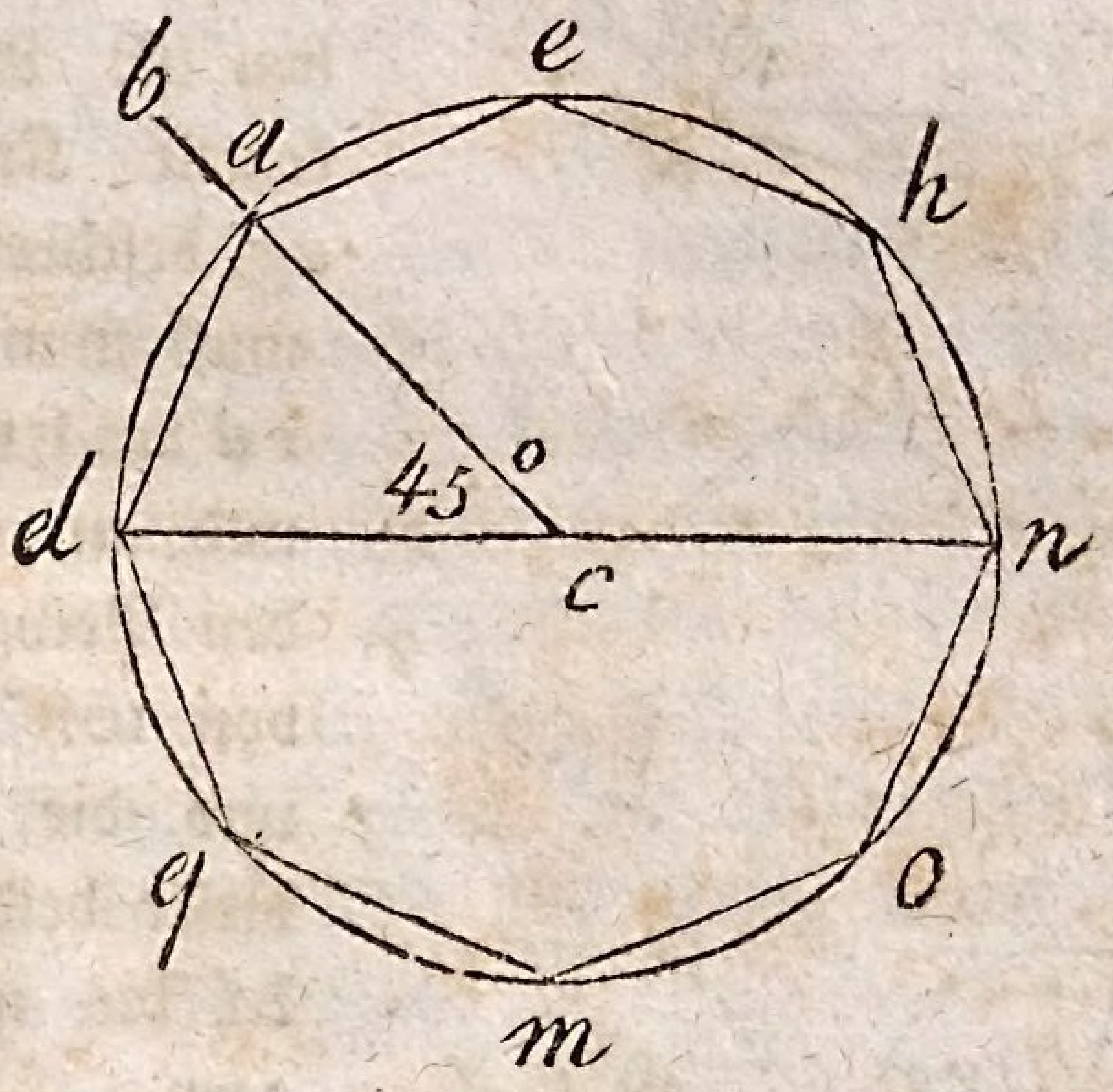
(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man suche 1. den Mittelpunktswinkel, welcher $= \frac{360}{8} = 45°$ ist. 2. Man setze diesen an den Mittelpunkt des Kreises an c und verlängere den Schenkel desselben cb so lange, bis dieser den Umkreis durchschneidet, wie solches

---

*) Ein Vieleck ist einem Kreise eingeschrieben, wenn die Seiten desselben die Sehnen des Kreises ausmachen.

hier in a geschiehet. 3. Man fasse hierauf mit dem Zirkel den Bogen oder vielmehr die Sehne ad und trage solche in dem Kreise umher, so findet man, daß sich diese 8 mal genau darin umher tragen läßt; und ziehe 4. die Punkte durch gerade Linien zusammen, so entstehet das verlangte reguläre Achteck.

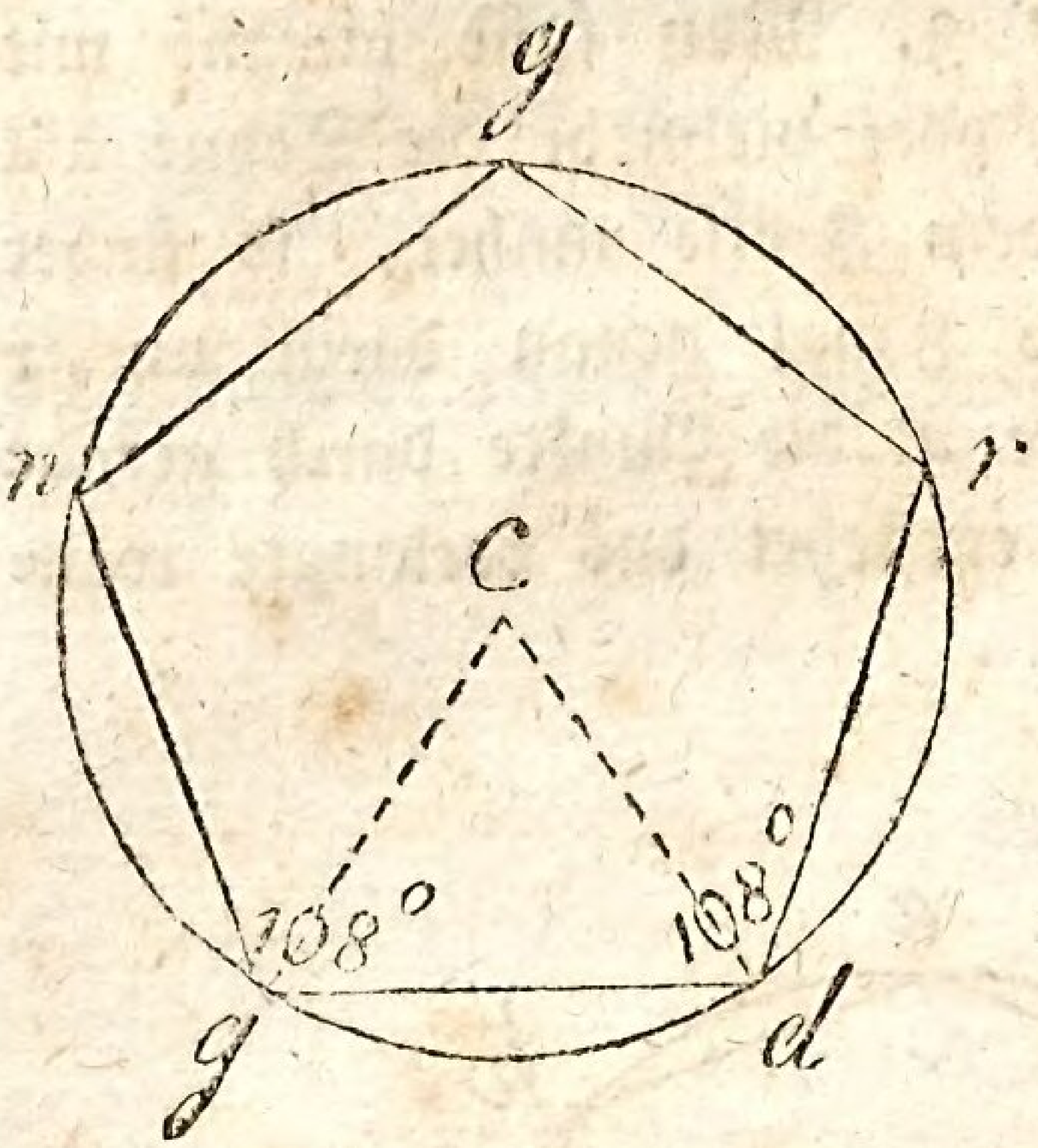


§ 197.

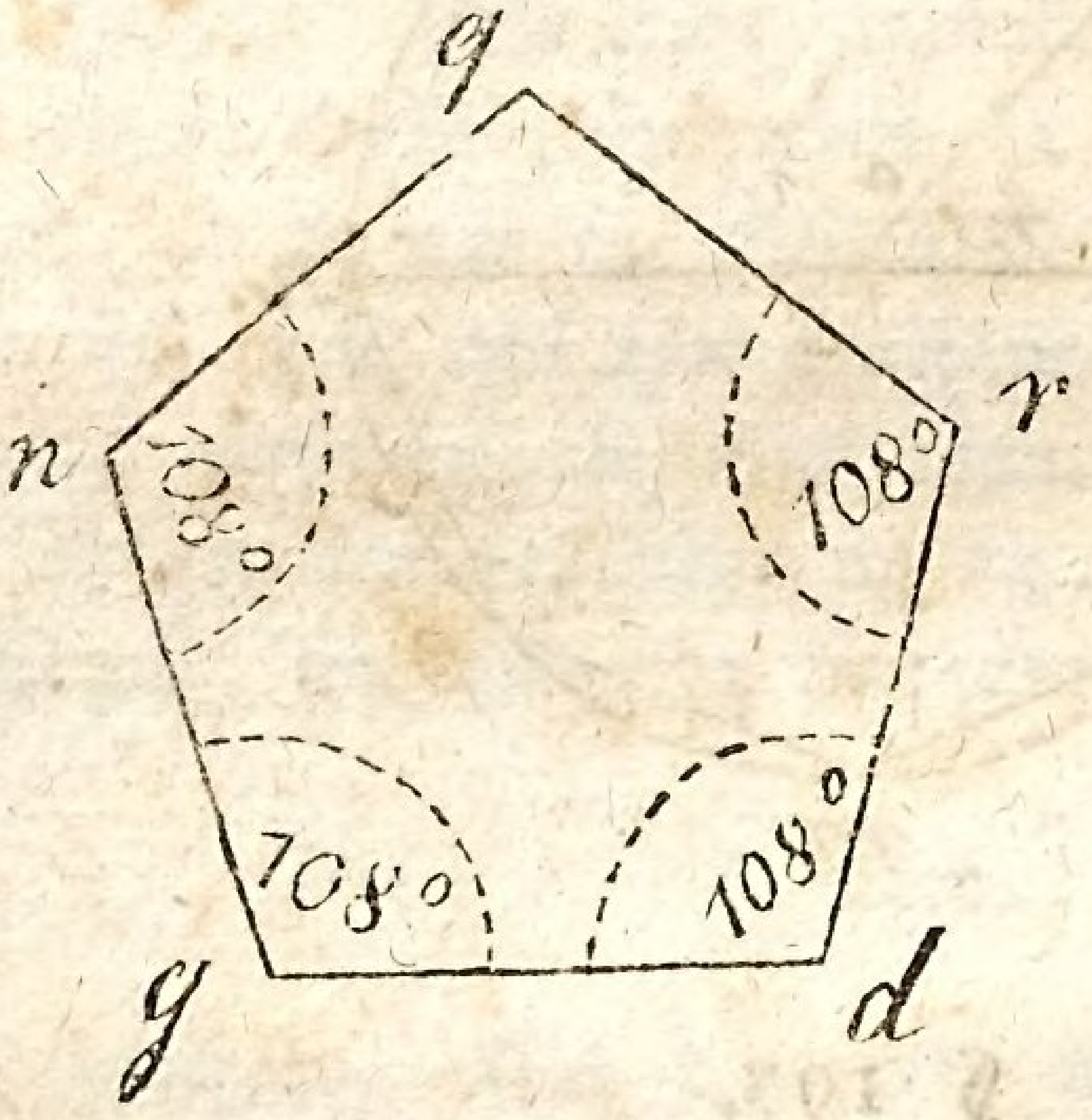
Aufgabe. Zu einer gegebenen geraden Linie das dazu gehörige reguläre Fünfeck zu finden.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man suche 1. den Polygonwinkel des Fünfecks, welcher $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72^\circ$ $= 108^\circ$ ist, und setze 2. diesen an die Endpunkte der Linie gd. Hierauf halbire man 3. diese Winkel g und d und verlängere die Schenkel derselben bis c, so entstehet dadurch das gleich=



schenklige △ gcd. Hierauf ziehe man endlich mit dem Schenkel cd einen Kreis, so läßt sich die Linie gd fünfmal in demselben umhertragen, wie solches hier geschehen ist. Will man keinen Kreis mit cg beschreiben, so muß man ng und rd = gd machen und an n und r den Polygonwinkel von 108° ansetzen, und die Schenkel dieser beiden Winkel bis q verlängern.

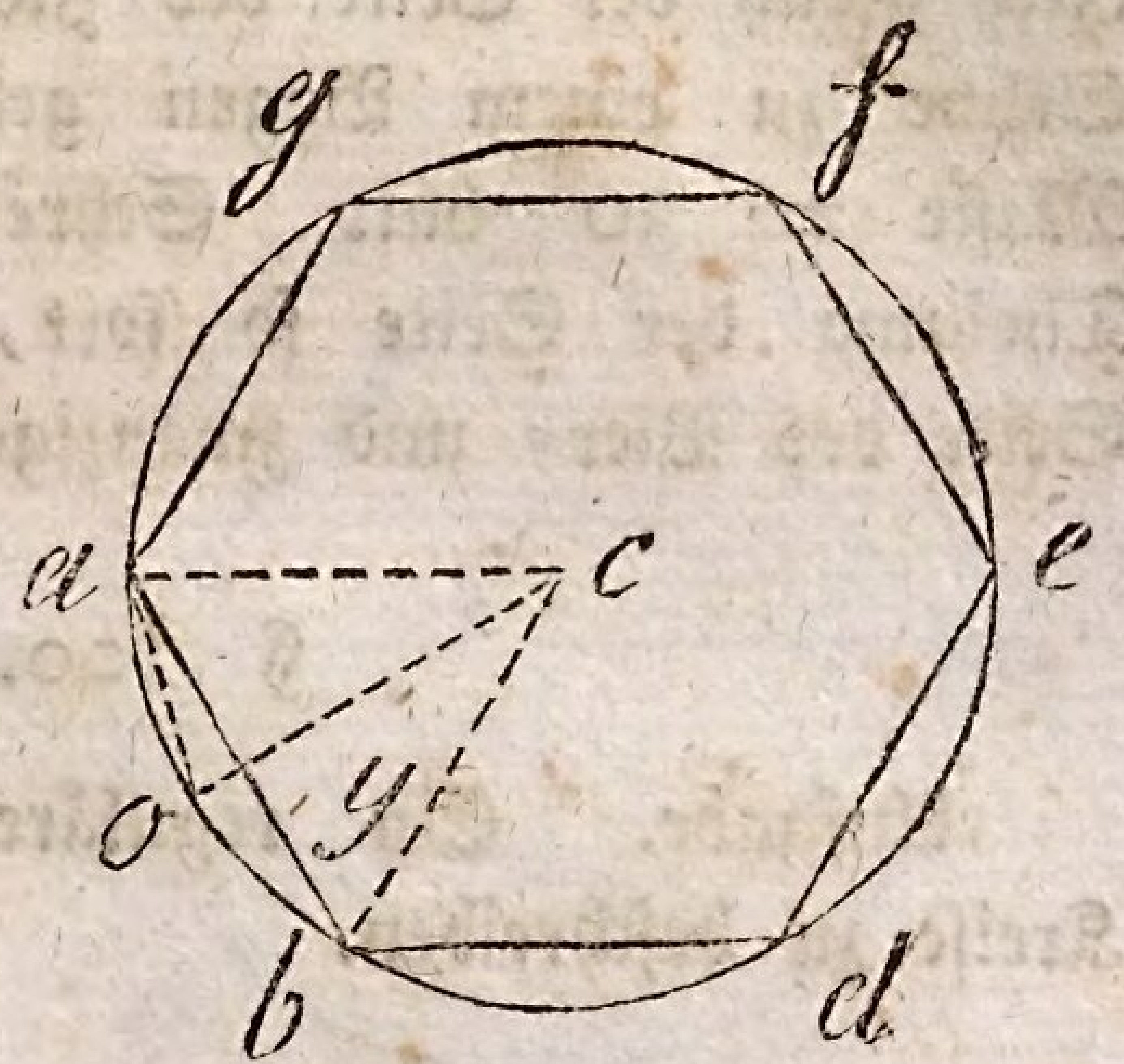


Von der Aufreißung der Vielecke ohne Transporteur.

§ 198.

Aufgabe. Ein reguläres Sechseck in einem gegebenen Kreise zu beschreiben.

Auflösung. Man trage den Halbmesser des gegebenen Kreises cb in dem Umfange desselben umher und verbinde die Theilungspunkte a, b, d, e, f und g durch gerade Linien, so wird das reguläre Sechseck gehörig gebildet sein.



Beweis. In einem regulären Sechsecke ist sowol der Mittelpunktswinkel c, wie auch der halbe Polygonwinkel $y = 60°$; daher macht jedes Dreieck in dem regulären Sechsecke ein gleichseitiges Dreieck aus. Und da alle Seiten bei diesem Dreiecke sich gleich sind, so muß auch jede Seite des regulären Sechsecks gleich dem Halbmesser des Kreises sein, daher läßt sich dieser 6mal genau in demselben umhertragen.

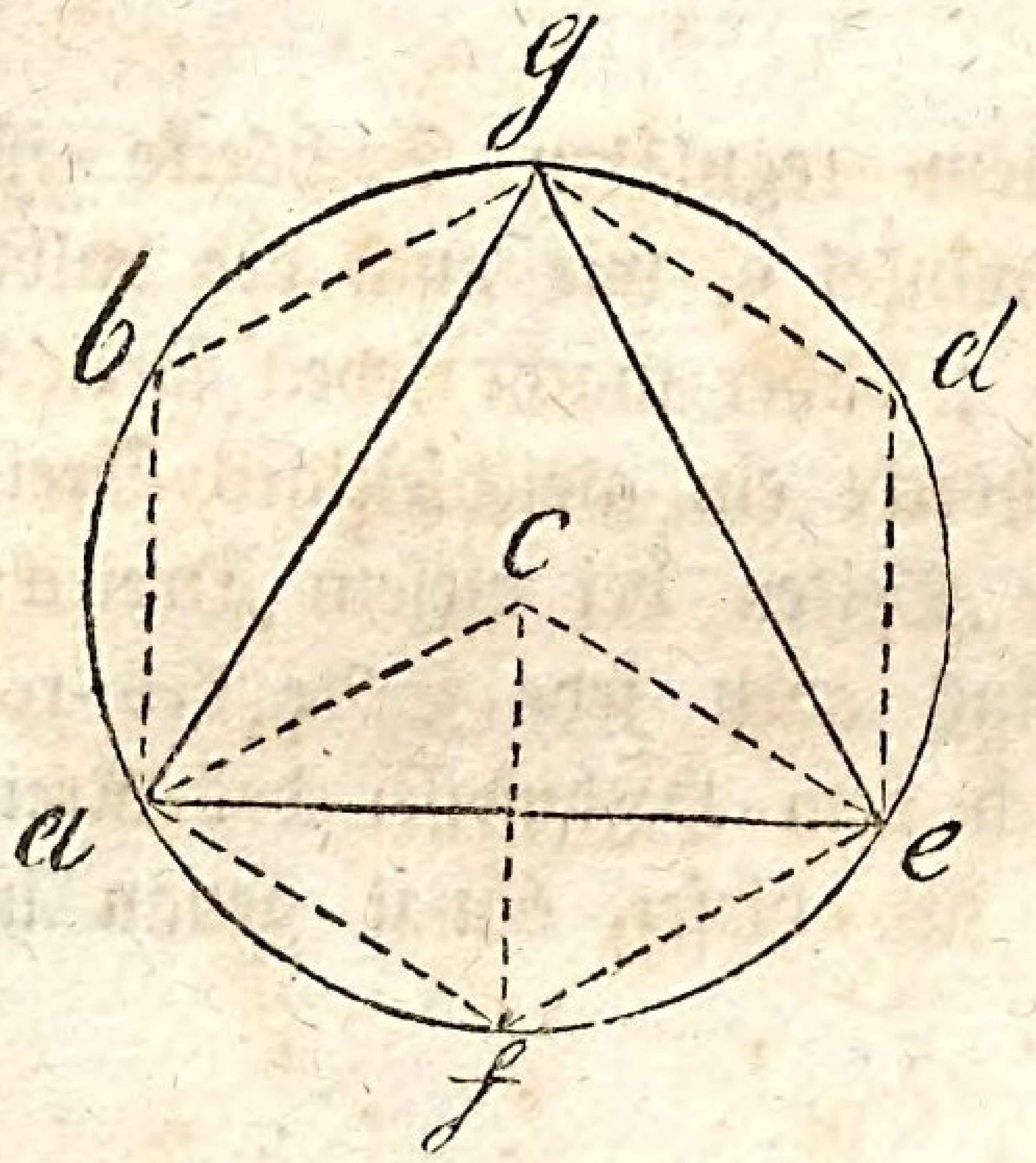
§ 199.

Zusatz. Wird die Sehne eines Kreises durch eine senkrechte Linie in zwei gleiche Theile getheilt, so theilt sie auch den dazu gehörigen Bogen in 2 gleiche Theile. Wird demnach die Seite ab des Sechsecks, welche gleich der Sehne des Kreises ist, worin solches aufgerichtet steht, in 2 gleiche Theile getheilt, so wird auch der dazu gehörige Kreisbogen in 2 gleiche Theile getheilt; und wird hierauf eine Sehne von a nach o gezogen, so ist

diese gleich der Seite des Zwölfecks, weil sie als Sehne zu einem Bogen gehört, der zu seinem Maße = 30° hat. Schreitet man mit dieser Theilung der Seite so fort, so erhält man die Seite des Vier- und zwanzigecks u. s. w.

§ 200.

Aufgabe. Ein reguläres Dreieck in einem Kreise zu beschreiben.



Auflösung. Man mache zuerst ein Sechseck und ziehe alsdann von a nach e, von e nach g und von g nach a gerade Linien, so ist aeg das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Mittelpunktswinkel c dieser Figur ist = $\frac{360}{3}$ = 120°. Denn der Winkel ace ist = ∠ acf + ∠ fce = 60° + 60° = 120°.

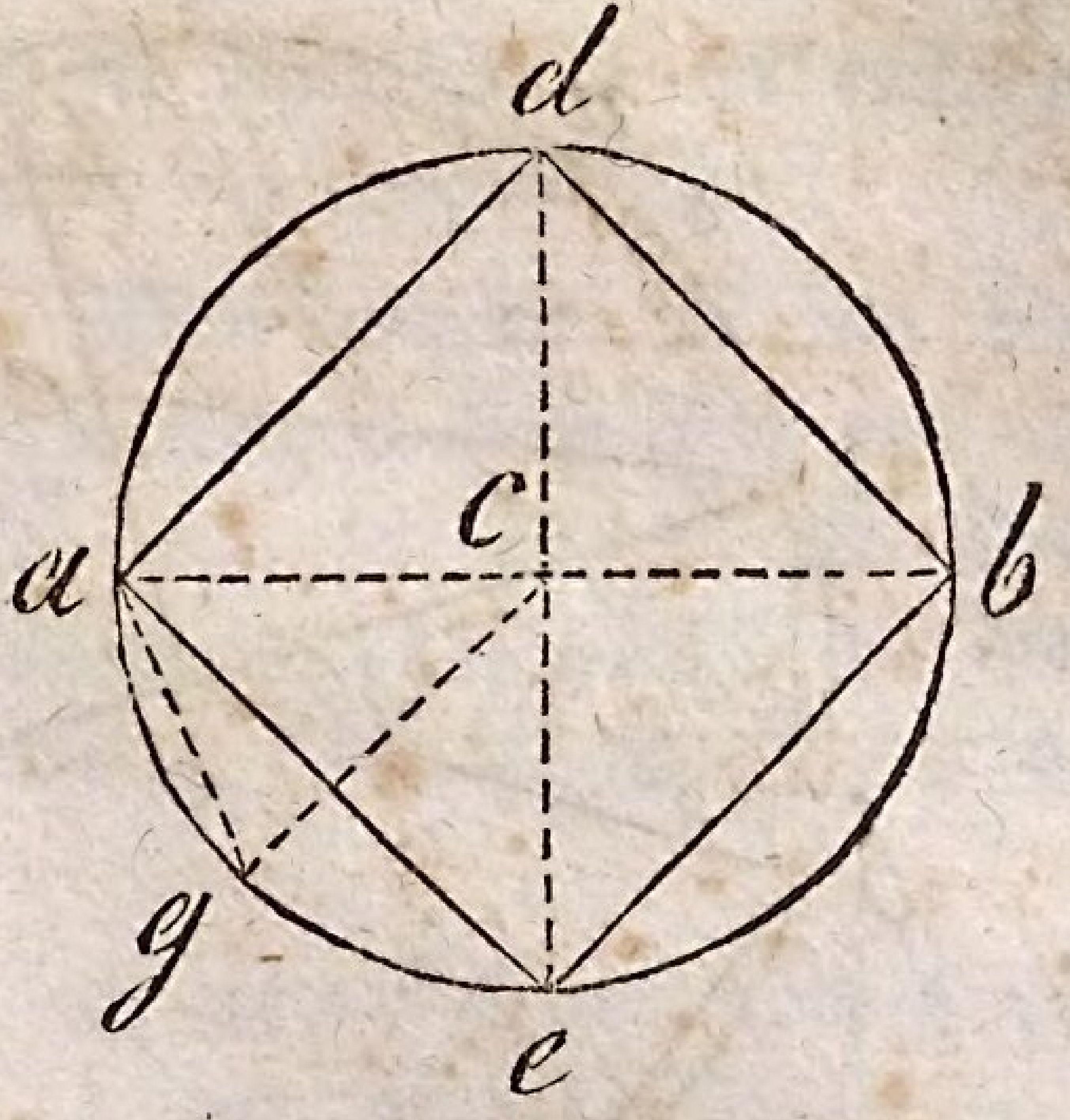
§ 201.

Aufgabe. Ein Quadrar in einem Kreise zu beschreiben.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man ziehe in dem Kreise zwei Durchmesser ab und de, welche sich senkrecht durch-

schneiden, und verbinde hierauf die Endpunkte der Durchmesser durch gerade Linien, so ist a d b e das verlangte Quadrat.



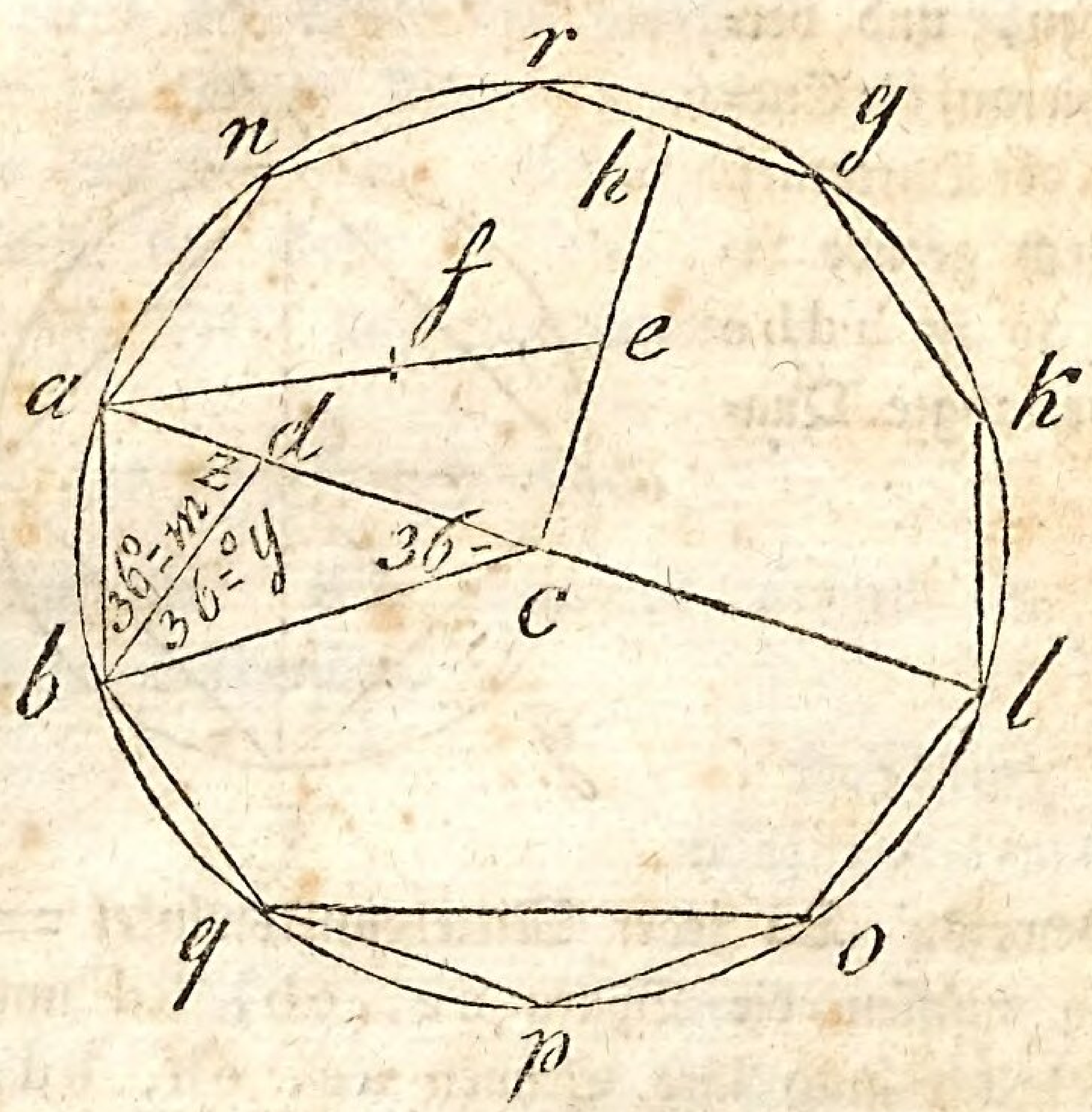
Beweis. Da jeder Mittelpunktswinkel = 45° ist, so müssen die Bogen a e, e b, b d und d a und folglich auch ihre Sehnen a e, e b, b d, d a sich gleich sein. Und da ferner jeder Polygonwinkel dieser Figur einen Peripheriewinkel ausmacht, dessen Schenkel die Endpunkte des Durchmessers berühren, so hat jeder von ihnen 90°, also ist a d b e ein Quadrat.

§ 202.

Zusatz. So wie die Theilung der Seite des Sechsecks die Seite des Zwölfecks gibt, so gibt auch die Theilung der Seite des Quadrats nach nach eben denselben Gründen, die Seite des Achtecks, und es muß sich daher a g achtmal in dem Kreise umher tragen lassen.

§ 203.

Aufgabe. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Zehneck zu beschreiben.



Auflösung. Es sei c = dem Mittelpunkte des Kreises, ac = a = dem Halbmesser desselben und ab = x = der zu suchenden Seite, so ist

$$\angle acb = \frac{360°}{10} = 36°,\ \angle cab = \angle b = 72°,$$

weil $\triangle$ abc ein gleichschenkliges ist. Halbirt man hierauf den Winkel b, so ist m = y = 36° und z = 72°.

Da nun $\angle c = \angle m$
$\angle cab = \angle cab$
$\angle abc = \angle adb.$

So $\triangle abc \sim \triangle abd.$

Folglich verhält sich ac : ab = ab : ad.

Nun ist aber cd = ab = x

und ad = ac — cd = a — x

daher verhält sich auch ac : cd = cd : ac — cd.

oder a : x = x : a — x.

Nun ist zu zeigen, wie die Seite ab = dc gefunden ist, und daß sie auch gleich der mittlern Proportionallinie zwischen ac und ad sei.

Auflösung dazu. Man errichte 1. aus dem Mittelpunkte c eine senkrechte Linie ce auf al. 2. Man mache diese Linie = $\frac{1}{2}$ ac. 3. Man ziehe ae, und mache ef = ec. Und 4. man trage die Weite af aus a nach b, so ist ab die verlangte Linie.

Beweis. Es ist $ae^2 = ac^2 + ec^2$ nach § 83.

$$= a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

daher $ae = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$

Da nun $ab = af = ae - ef = ae - ec$ ist, so ist ab oder $x = \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{4}a^2)} - \tfrac{1}{2}a$

also $x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{a^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$.

Werden beide Seiten zum Quadrat erhoben, so ist

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

also $x^2 = a^2 - ax = (a - x)a$.

Folglich verhält sich $a : x = x : a - x$

oder

$$ac : ab = ab : ac - dc$$

oder

$$ac : cd = cd : ac - cd.$$

Also ist ab oder cd die mittlere Proportionallinie zwischen ac und ad, und da die Linie ab einem Winkel von 36° gegenüber liegt, so muß sie sich 10mal in dem Umfange des Kreises umhertragen lassen.

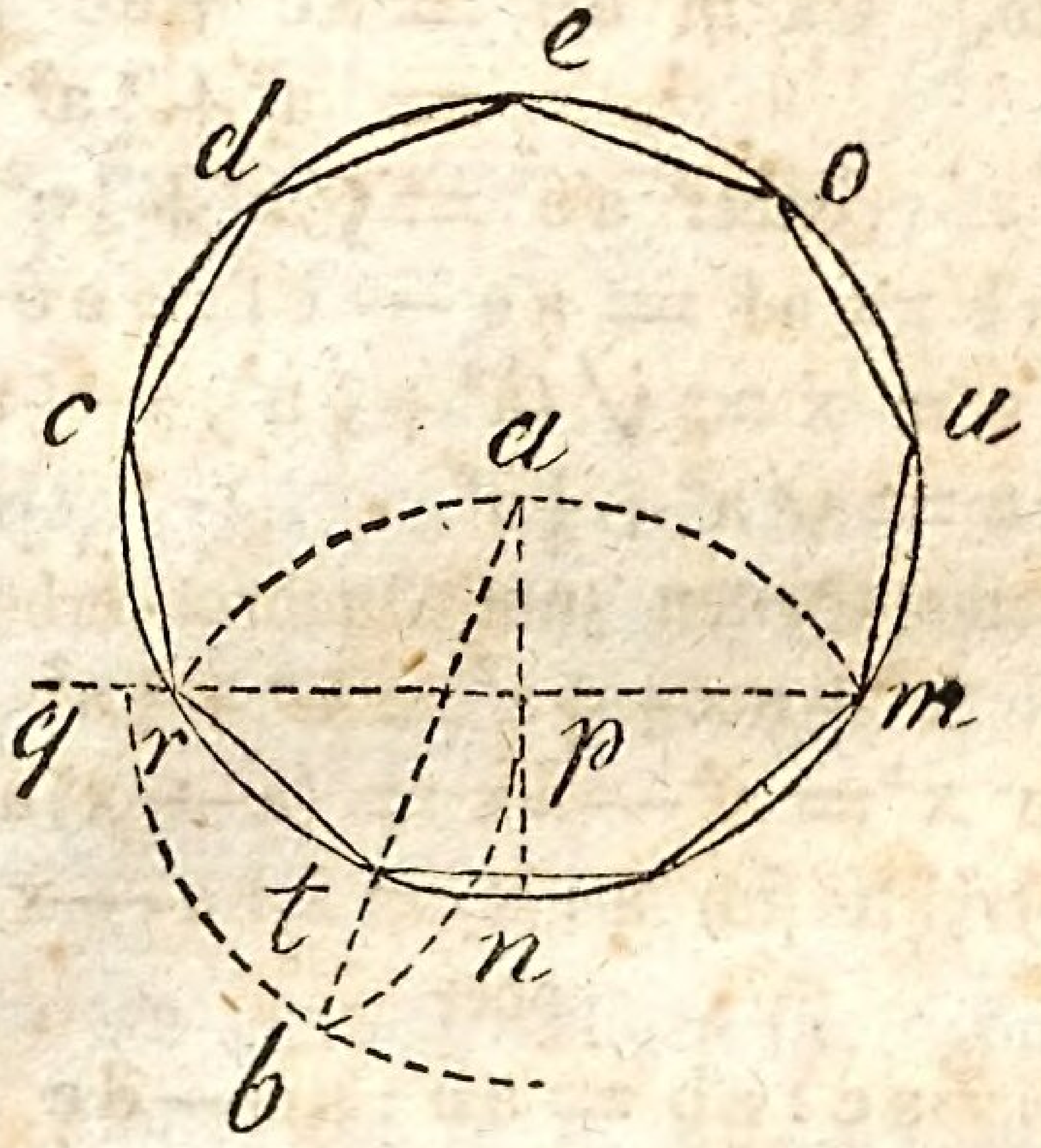
§ 204.

Zusatz. Werden in diesem Zehnecke q und o

durch eine gerade Linie verbunden, so entstehet dadurch die Seite des regulären Fünfecks = q o welche sich demnach fünfmal in dem Kreise umhertragen läßt.

§ 205.

Aufgabe. Ein reguläres Neuneck in einem Kreise zu beschreiben.



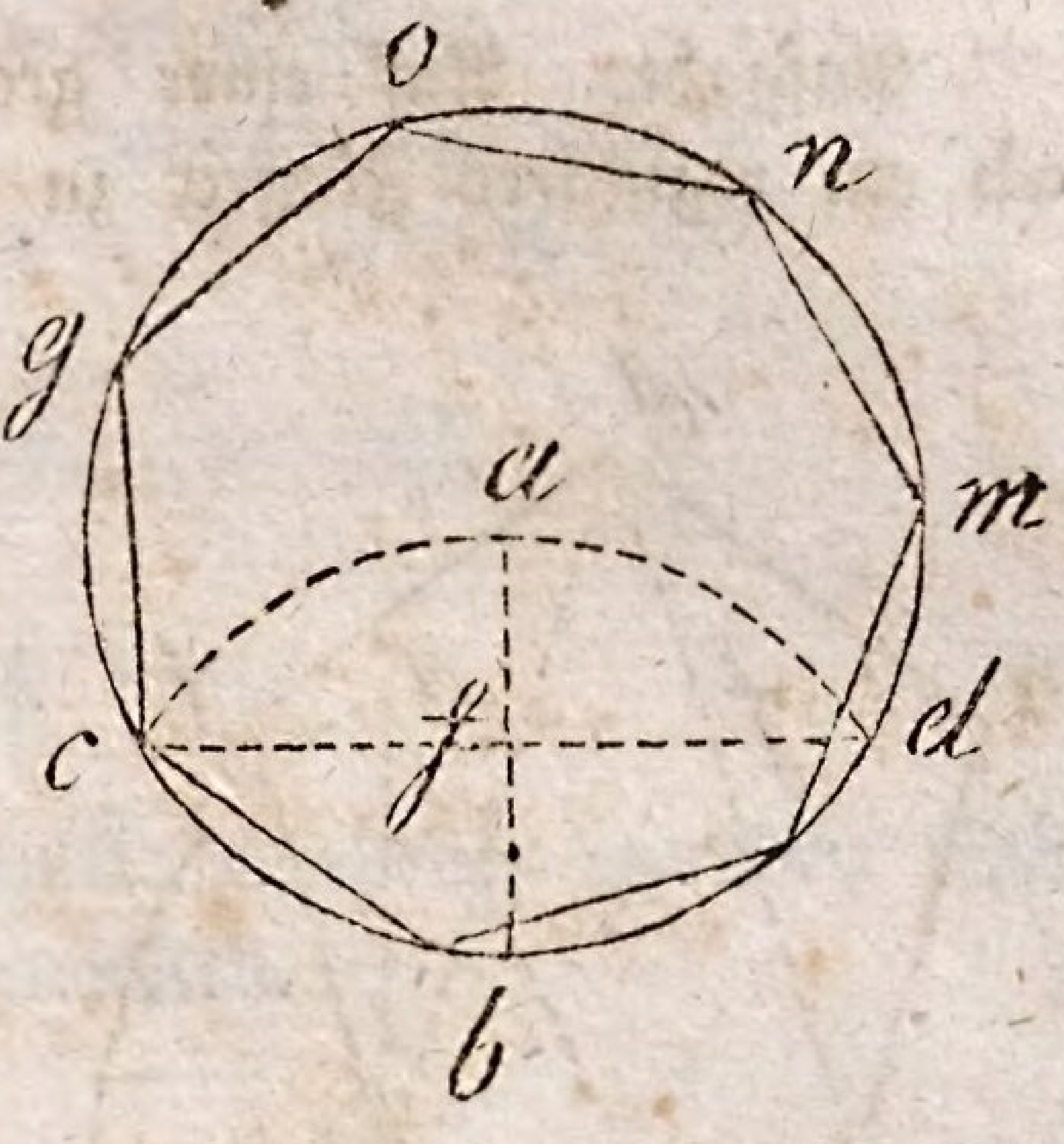
Auflösung. 1. Man beschreibe aus einem beliebigen Punkte n im Umfange des Kreises mit dem Halbmesser desselben den Kreisbogen r a m. 2. Man ziehe die Sehne r m und die senkrecht darauf stehende Linie a n. 3. Man setze hierauf den Zirkel in p, und mache aus diesem Punkte mit dem Halbmesser des Kreises den Kreisbogen q b und aus dem Punkte q den Kreisbogen p b. 4. Ziehe man vom Mittelpunkte a bis nach dem Durchschnittspunkte der Kreisbogen b die gerade

Linie ab, welche den Umfang des Kreises in t durchschneidet. Und hierauf ziehe man 5. von r nach t die Sehne rt, welche sich neunmal in dem Kreise umhertragen lassen wird.

§ 206.

Aufgabe. Ein reguläres Siebeneck in einem Kreise zu beschreiben.

Auflösung. Aus einem beliebigen Punkte b in dem Umfange des Kreises beschreibe man mit dem Halbmesser desselben den Kreisbogen cad, ziehe hierauf die Linien cd u. ab; so ist fd = cf = der Seite des Siebenecks, und muß sich daher siebenmal in dem Kreise umhertragen lassen.



§ 207.

Zusatz. Ueber diese beiden letztern Aufgaben, welche das 7eck und 9eck betreffen, sind bis jetzt noch keine mathematische Beweise vorhanden, und werden daher nur mechanisch aufgelöset.

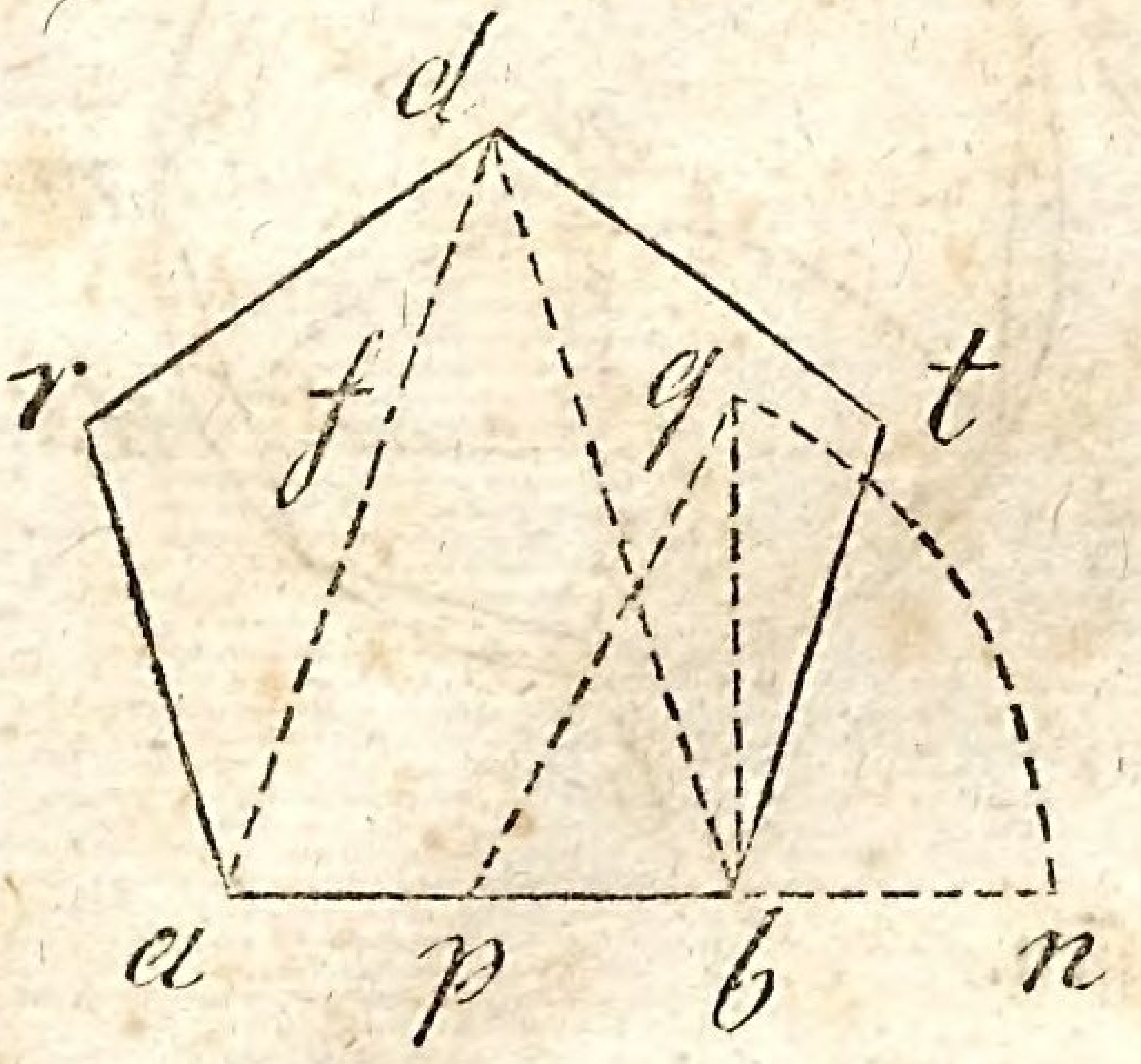
§ 208.

Um ein gegebenes reguläres Dreieck und Viereck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man setze in den Mittelpunkt dieser beiden Figuren den Zirkel und öffne ihn bis zu einer beliebigen Spitze dieser Figuren, und reisse mit dieser Weite einen Kreis um sie, so wird solcher dieselben in sich einschließen, wie es mit diesen Figuren in den §§ 200 und 201 der Fall ist.

§ 209.

Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ab ein reguläres Fünfeck zu errichten.



Auflösung. Aus dem Endpunkte b dieser gegebenen Linie errichte man eine senkrechte Linie bq, welche = ab ist. 2. Aus der Mitte p der Linie ab beschreibe man mit der Weite pq einen Kreisbogen qn, und verlängere darauf die Linie ab, bis solche den Kreisbogen qn durchschneidet. Hierauf fasse man man 3. mit dem Zirkel die Weite an, und mache mit derselben aus a und b Kreisbogen, die sich in d durchschneiden. Und endlich 4. mache man mit der Weite ab Kreisbogen aus a und d bei r, und aus b und d bei t, und ziehe solche durch gerade Linien zusammen, so entstehet dadurch das verlangte Fünfeck, worin ab = af = der mittleren Proportionallinie zwischen ad und df ist.

Beweis. Es sei $af = bq = ab = a =$ der gegebenen Seite. $ap = bp = \frac{1}{2}a$; und $ad = an = x$, so ist $df = x - a$.

Nach der Konstruktion ist daher

$$pq = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$$

$$\text{und } an = ad = x = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a;$$

$$\text{folglich ist } x - a = df = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a - a$$

$$= \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)} - \frac{1}{2}a.$$

$$\text{also } x + \frac{1}{2}a = \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$$

$$\text{daher } x^2 - ax + \frac{1}{4}a = a^2 + \frac{1}{4}a^2$$

$$\text{folglich } x^2 - ax = (x - a)x = a^2.$$

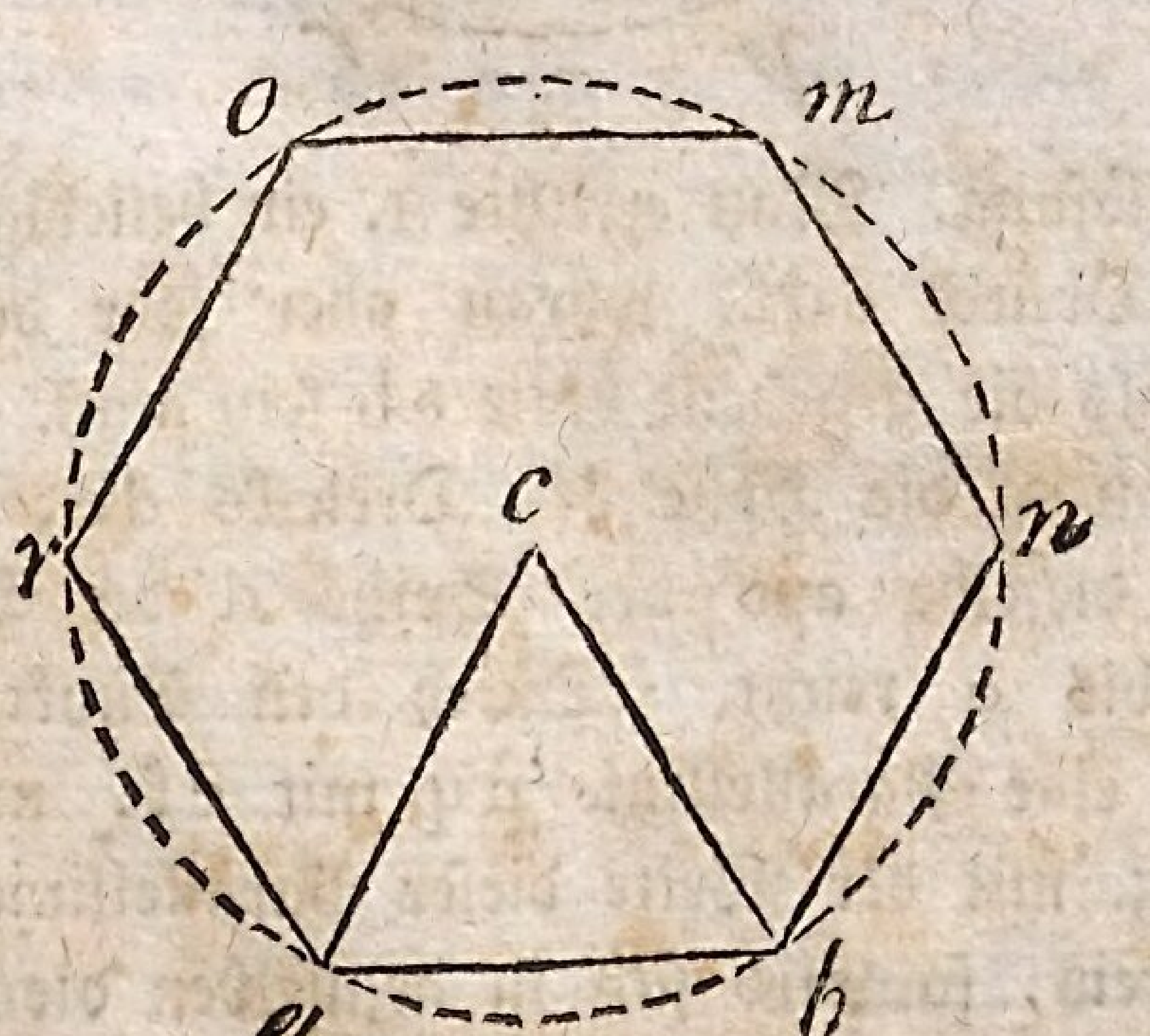
Daher verhält sich $x : a = a : x - a$

d. h.

$$ad : af = af : df.$$

§ 210.

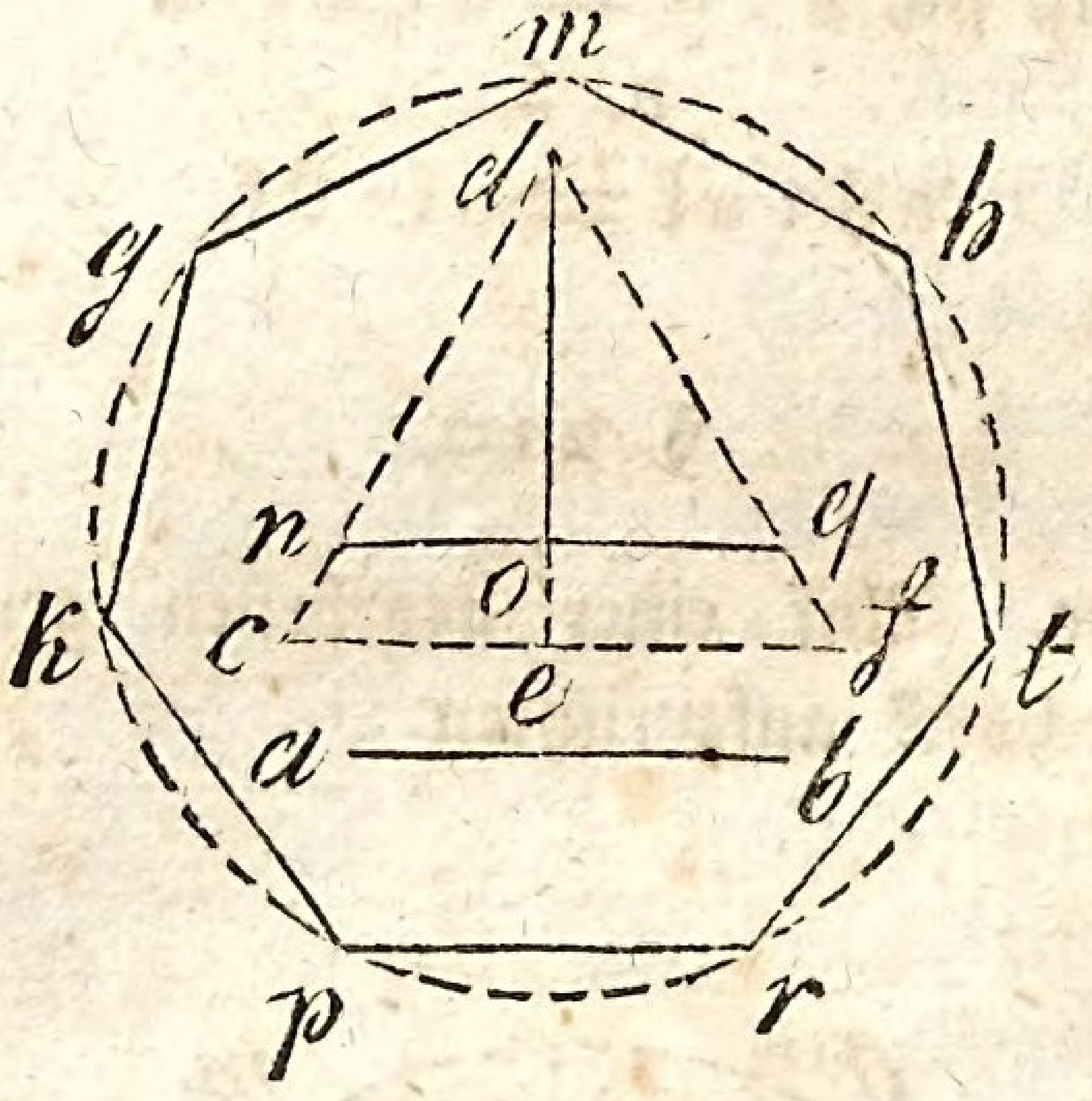
Aufgabe. Auf einer gegebenen geraden Linie ab ein Sechseck aufzurichten.



Auflösung. Man mache mit der gegebenen gegebenen geraden Linie ba ein gleichseitiges Dreieck, setze hierauf den Zirkel in die Spitze c desselben und beschreibe mit der Weite cb = ab einen Kreis, so wird sich die Linie ab sechsmal in demselben umhertragen lassen.

§ 211.

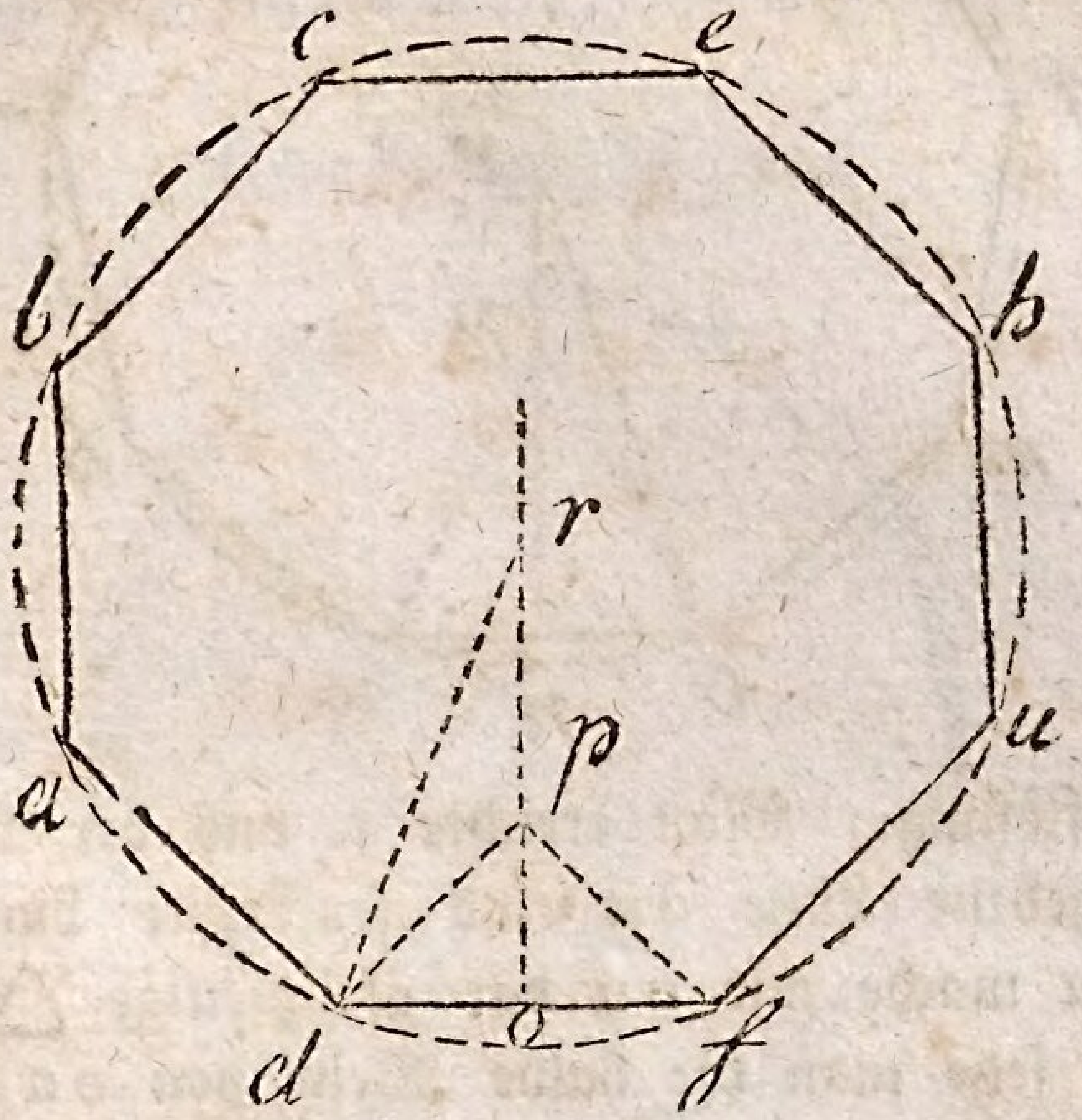
Aufgabe. Ein reguläres Siebeneck auf einer gegebenen geraden Linie ab zu errichten.



Auflösung. Man errichte 1. ein beliebiges gleichseitiges Dreieck cdf, woran aber jede der Seiten größer als die gegebene Linie ab sein muß. Hierauf ziehe man 2. die Höhe des Dreiecks de, und setze 3. auf dieselbe aus der Spitze d die Linie ab, welche bis o reicht. Durch den Punkt o ziehe man 4. eine Parallellinie nq mit cf, und mache endlich 5. mit der Weite dieser Parallellinie mit nq einen Kreis, so wird sich in demselben die Linie ab siebenmal umhertragen lassen.

§ 212.

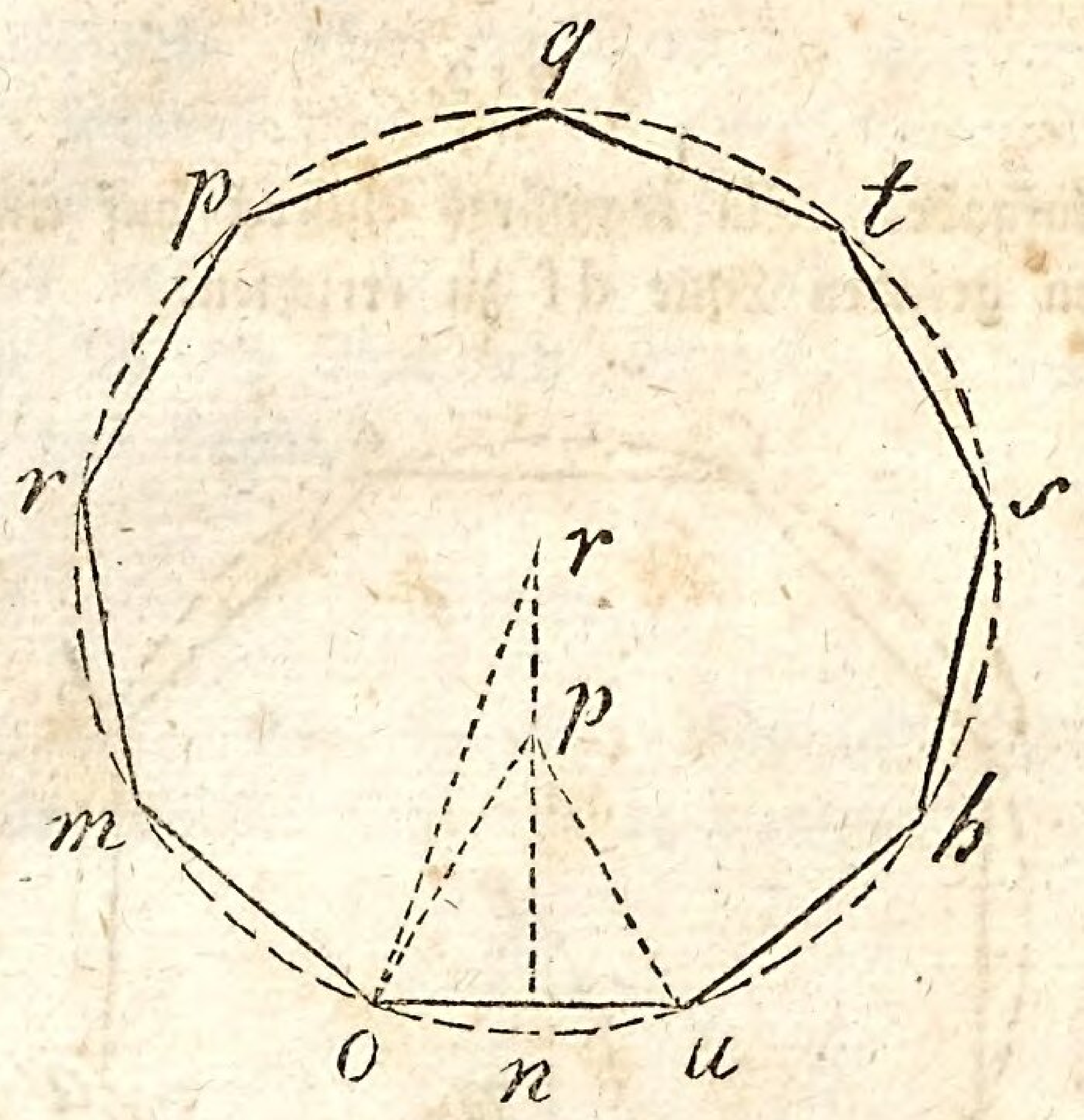
Aufgabe. Ein reguläres Achteck auf einer gegebenen geraden Linie df zu errichten.



Auflösung. Man errichte 1. aus der Mitte o der gegebenen Linie df eine beliebige senkrechte Linie. Hierauf trage man 2. die Hälfte von df = do von o nach p und die Weite pd aus p nach r, so giebt die Weite rd einen Halbmesser zu einem Kreise, worin sich df 8mal umhertragen läßt. Es ist demnach op = do, und pr = pd, daher ist or = od + pd.

§ 213.

Aufgabe. Ein reguläres Neuneck auf einer gegebenen geraden Linie ou zu errichten.



Auflösung. Man errichte 1. aus der Mitte n der gegebene Linie ou eine senkrechte Linie np. 2. Man mache mit ou das gleichseitige △ opu. Und 3. setze man die halbe Weite von ou = on von p nach r, so ist or der Halbmesser eines Kreises, in welchem ou neunmal umhergetragen werden kann. Es ist demnach up = ou und pr = on.

§ 214.

Aufgabe. a. Ein Zehneck auf einer gegebenen geraden Linie ab zu errichten.

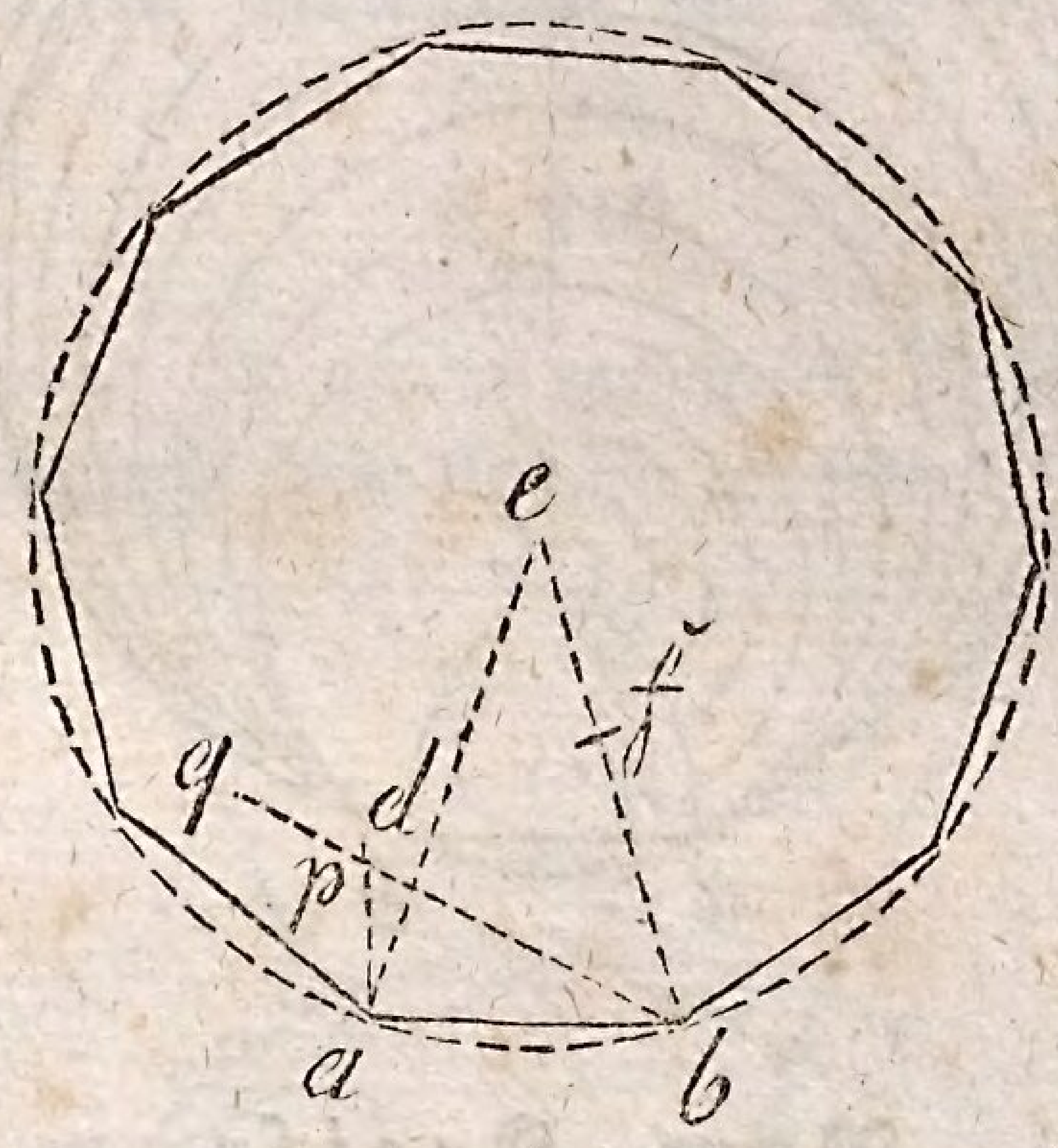
(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man setze 1. an den einen Endpunkt der geraden Linie ab, z. B. an a, eine senkrechte Linie ap, welche = ½ ab ist. 2. Ziehe man die Linie pq, verlängere solche bis nach q

und mache pq = ap, so ist qb gleich dem Halbmesser des Kreises, in welchem sich ab zehnmal umhertragen läßt. Man mache demnach das gleichschenklige △aeb, in welchem be = bq und bf = ab = bd ist, so muß demnach bewiesen werden, daß sich bq : bd = bd : dq

oder

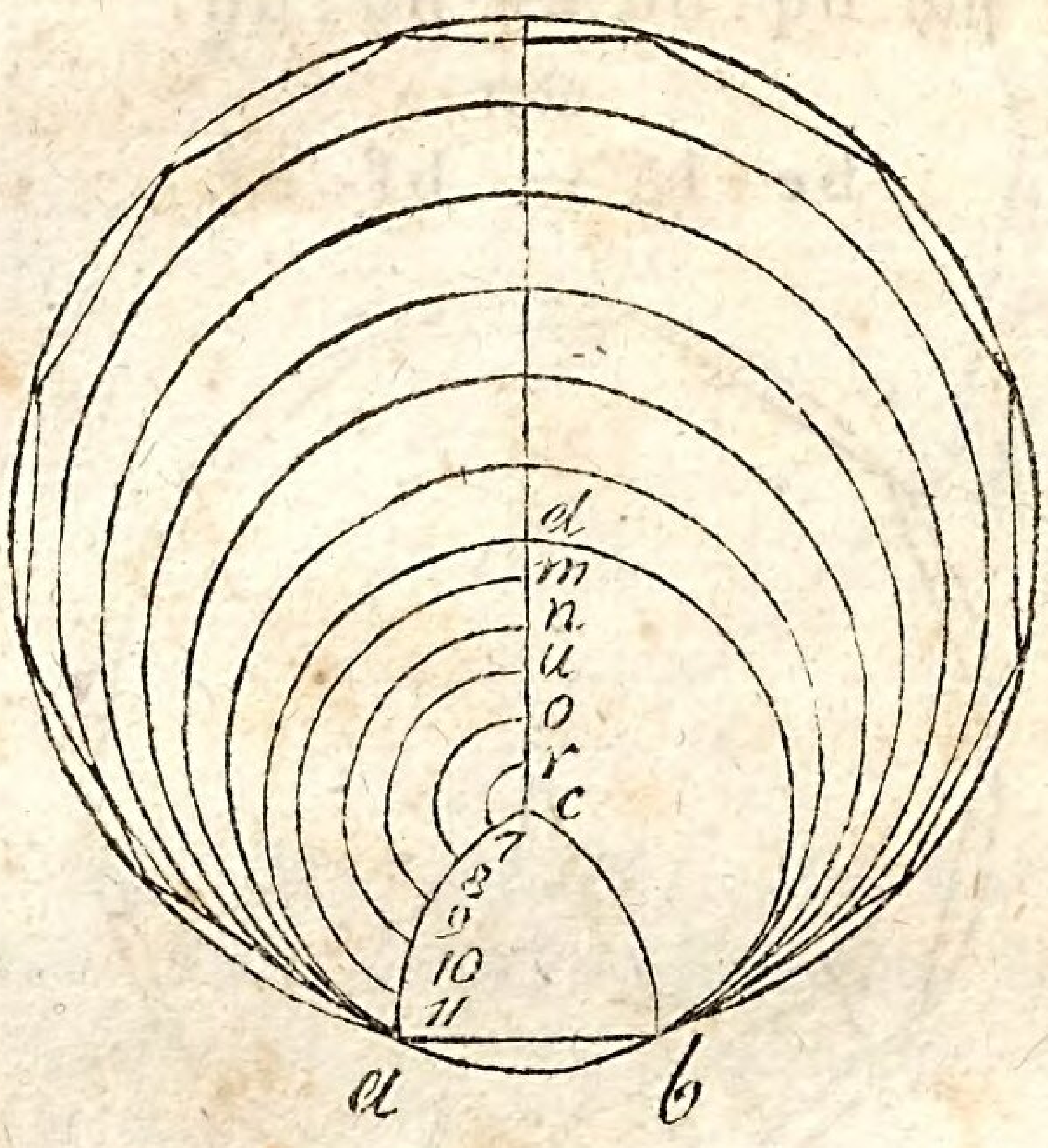
be : bf = bf : ef.



Der Beweis darüber ist eben so wie im § 209.

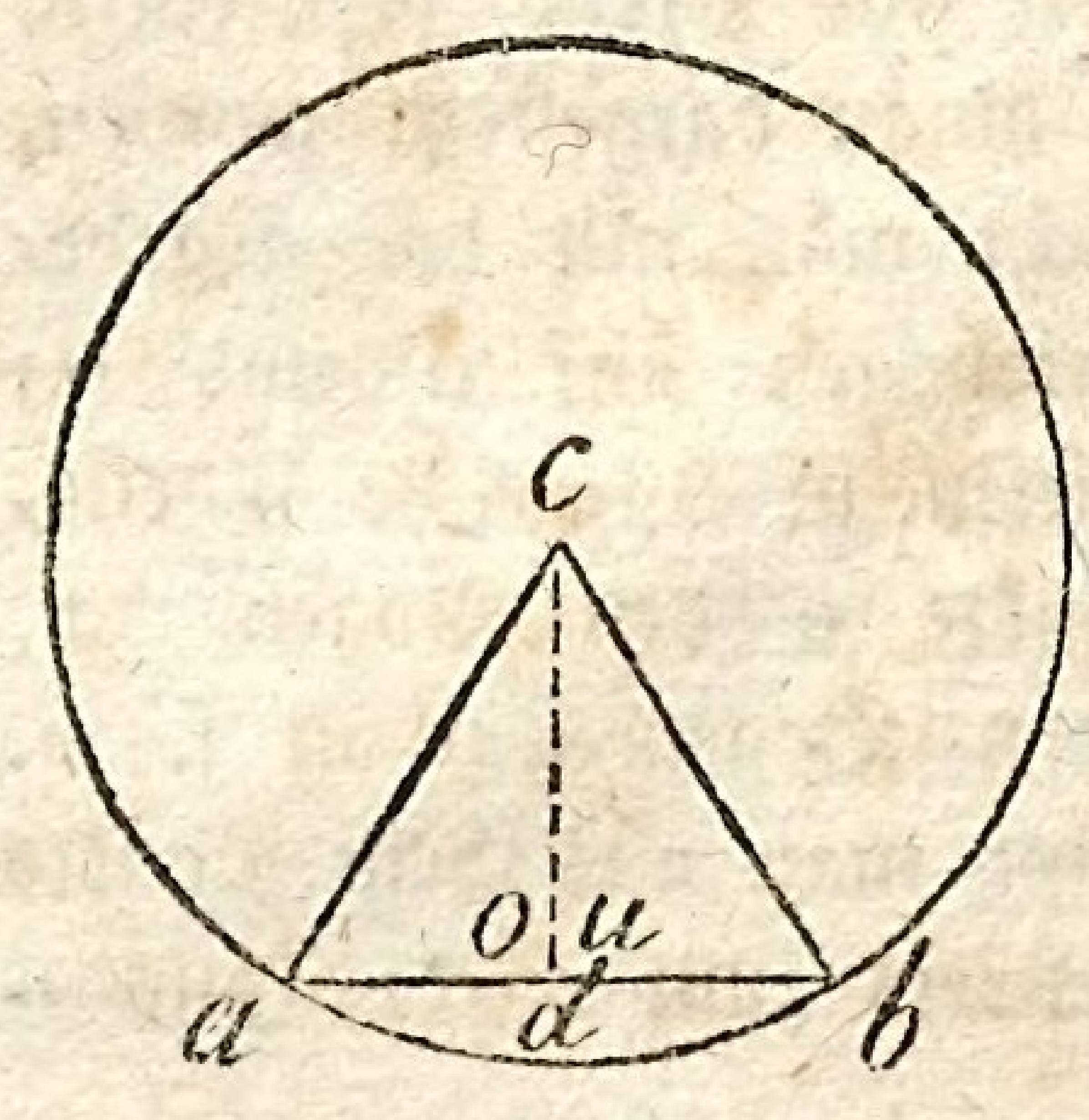
b. Anmerkung. In der Figur auf folgender Seite sind zu der Linie ab alle Kreise von einem 6ecke bis zu einem 12ecke hinan dargestellt worden. Um solche zu reißen, macht man mit der gegebenen Linie ab einen Kreisbogen auf a und b; theilt hierauf einen von diesen in 6 gleiche Theile, und ziehet aus dem Punkte c den Bogen 7r, ferner den Bogen 8o, den Bogen 9u u. s. w. Ist dieses geschehen, so reißt man aus dem Punkte r mit der Weite ra den Kreis zum 7ecke, aus o

mit oa den Kreis zum 8ecke, aus u mit ua den Kreis zum 9ecke u. s. w. und in jedem von diesen Kreisen muß sich die Linie ab verlangter Maßen umhertragen lassen.



Vom Kreise.

§ 215.



Lehrsatz. Jede gerade Linie, welche aus dem Mittelpunkte des Kreises senkrecht nach der Sehne hingezogen wird, theilt dieselbe in zwei gleiche Theile.

Beweis. $ac = cb$ weil es die Halbmesser des Kreises sind.

$cd = cd$

$\angle o = \angle u$ weil cd senkrecht stehet.

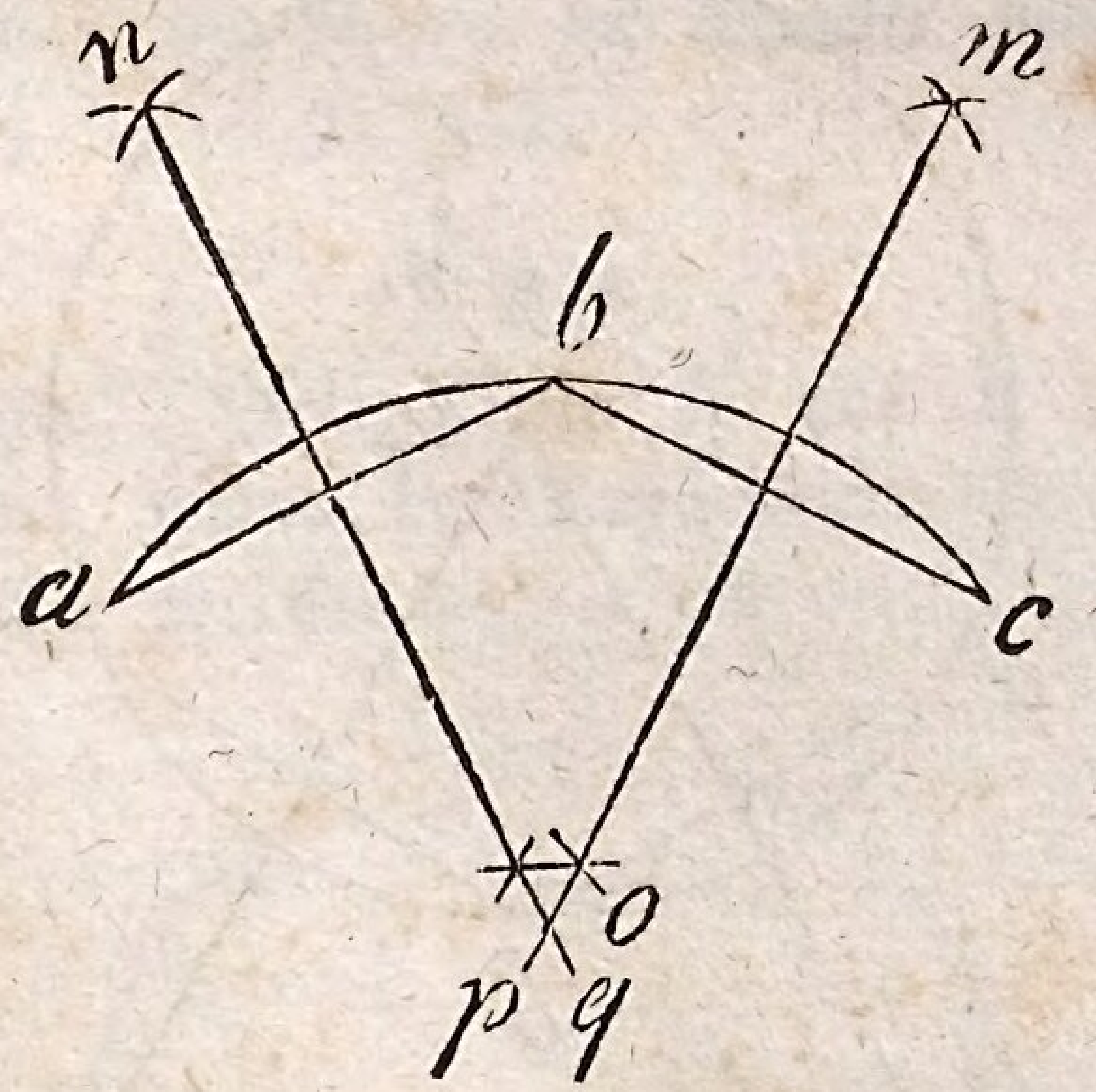
$\triangle acd \cong \triangle cdb$

daher ist $ad = db$.

Wenn daher eine Sehne durch eine senkrechte Linie in zwei gleiche Theile getheilt wird, so geht solches durch den Mittelpunkt des Kreises.

§ 216.

Aufgabe. Zu einem gegebenen Kreisbogen ab den Mittelpunkt des Kreises zu finden.

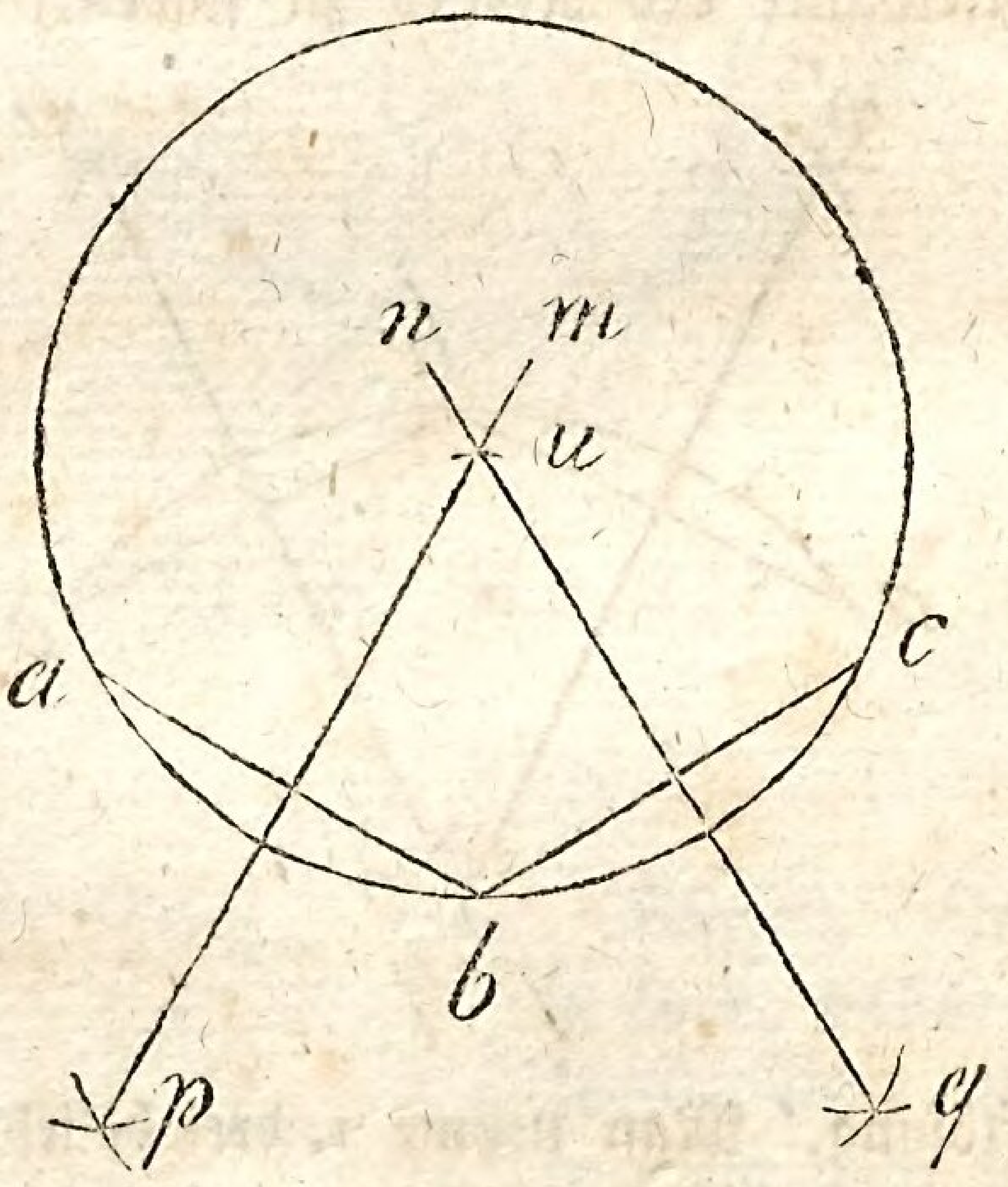


Auflösung. Man nehme 1. drei beliebige Punkte a, b und c, bestmöglichst von einander entfernt, in demselben an, und verbinde solche durch gerade Linien ab und bc mit einander. 2. Theile man jede von diesen Linien ab und bc, welche Sehnen desjenigen Kreises sind, wozu der Bogen gehört,

durch die senkrechten Linien qn und pm nach § 34 in 2 gleiche Theile. Da nun jede von diesen durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so muß da, wo sie sich in o durchschneiden, der Mittelpunkt des Kreises sein. Faßt man hierauf die Weite o c, so läßt sich damit ein Kreis machen, in welchem der Kreisbogen a b c liegt.

§ 217.

Aufgabe. Zu einem Umkreise den Mittelpunkt desselben zu finden.



Auflösung. Man nehme drei beliebige Punkte a, b und c in demselben an, verbinde solche durch gerade Linien ab und bc mit einander, und verfahre eben so wie vorhin.

§ 218.

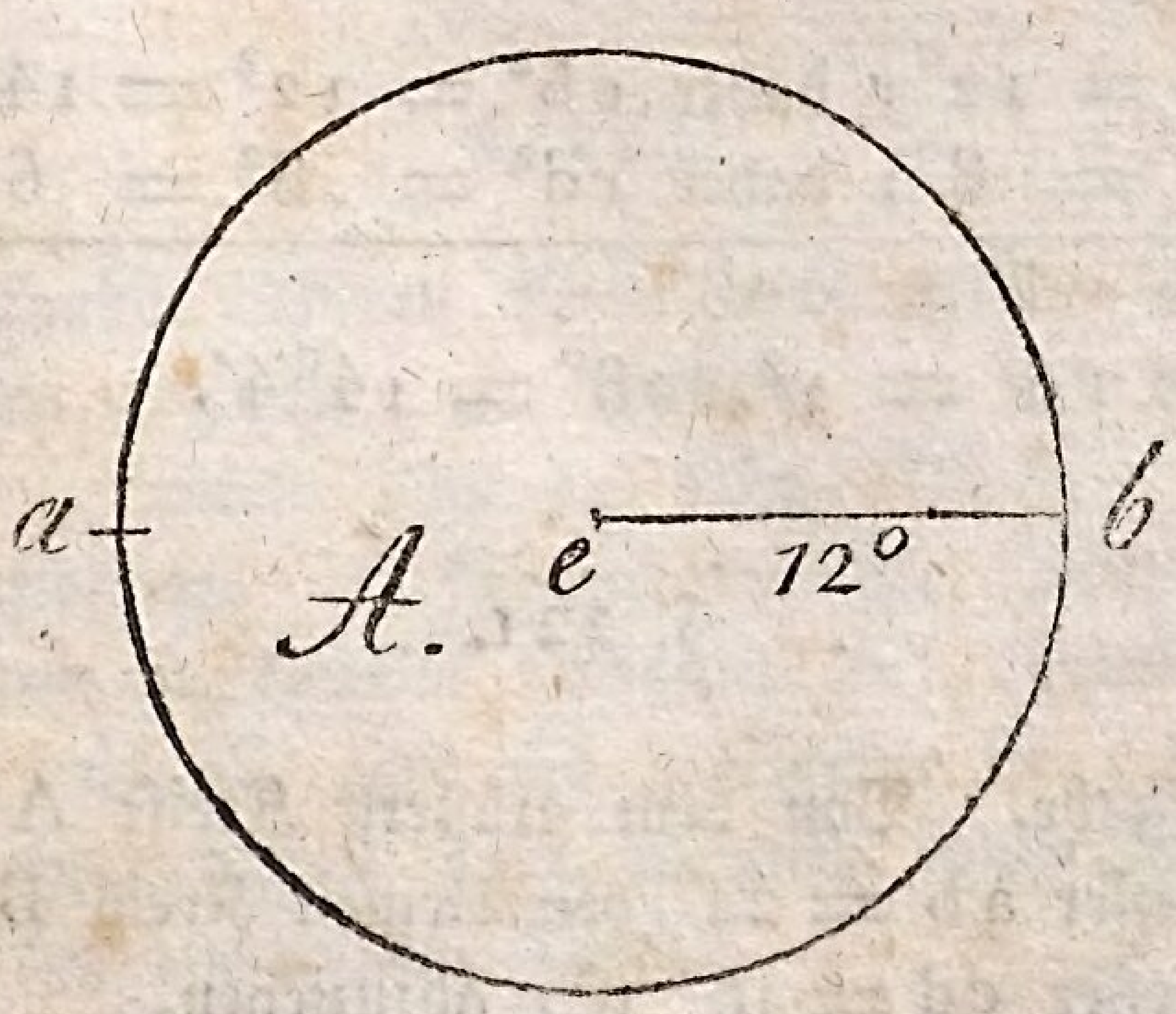
Zusatz. Man kann daher durch jede 3 gegebenen Punkte, die aber nicht in einer geraden Linie liegen dürfen, und um jedes Dreieck einen Kreis ziehen, in welchen sowol die Spitzen des Dreiecks, wie auch jene Punkte zu liegen kommen.

§ 219.

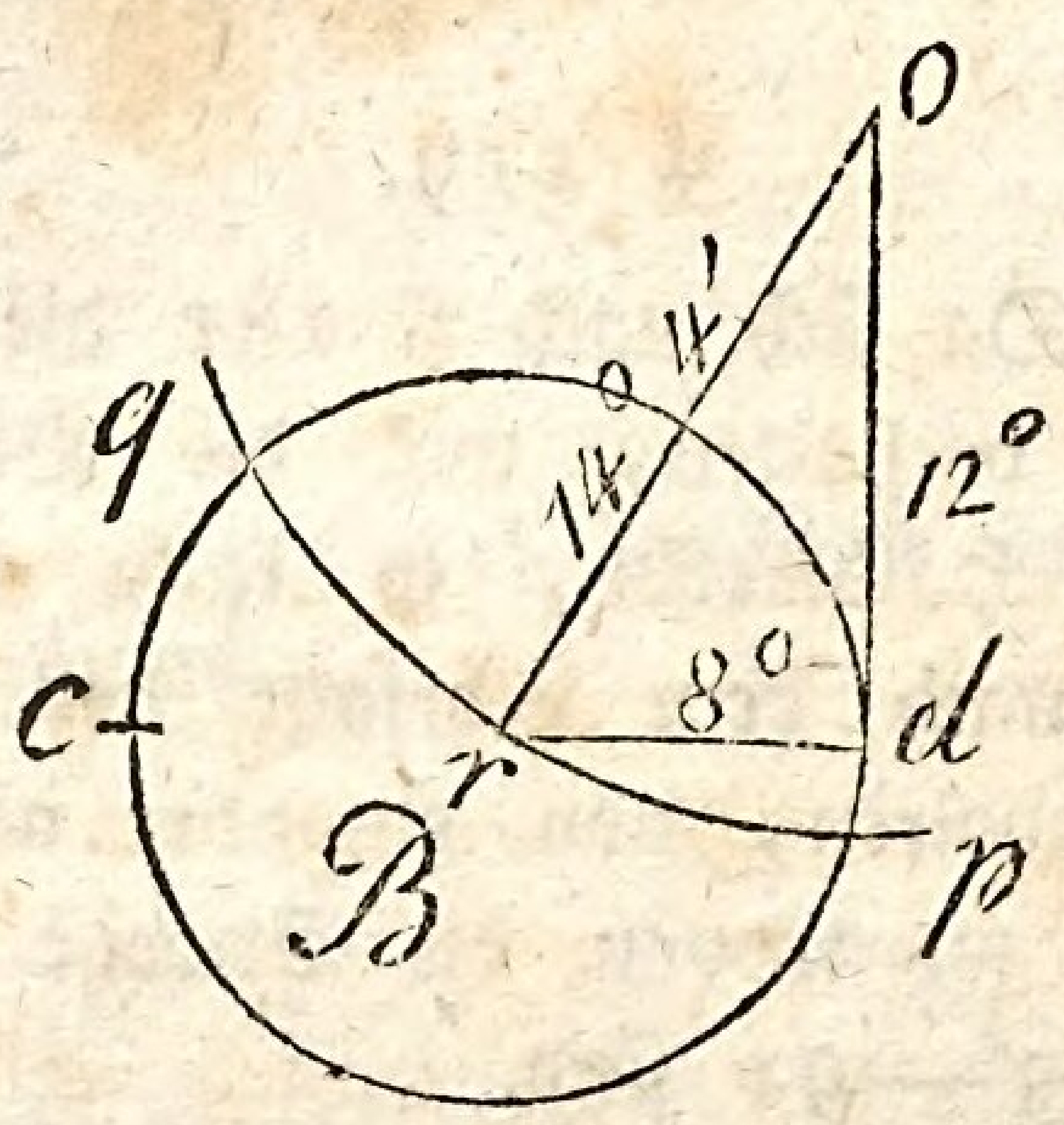
Zusatz. Da sich nach § 181 die Kreisflächen zu einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durch- und Halbmesser, so kann man dadurch sehr leicht, nach dem Lehrsatze des Pythagoras, Kreisflächen addiren, von einander abziehen, verdoppeln u. s. w. wovon die Beweise eben so wie in den §§ 85—91 sind.

§ 220.

Aufgabe. Zwei Kreise A und B zusammen zu addiren, wovon der Durchmesser ab des einen $= 24°$ und der des andern $=$ cd $= 16°$ sei.



Auflösung. a) Geometrisch. Man setze 1. die Halbmesser eb und rd der beiden gegebenen Kreise A und B senkrecht an einander, und ziehe 2. die Hypothenuse ro, so ist diese der Halbmesser des verlangten Kreises der am Raume gleich den beiden gegebenen A und B ist.



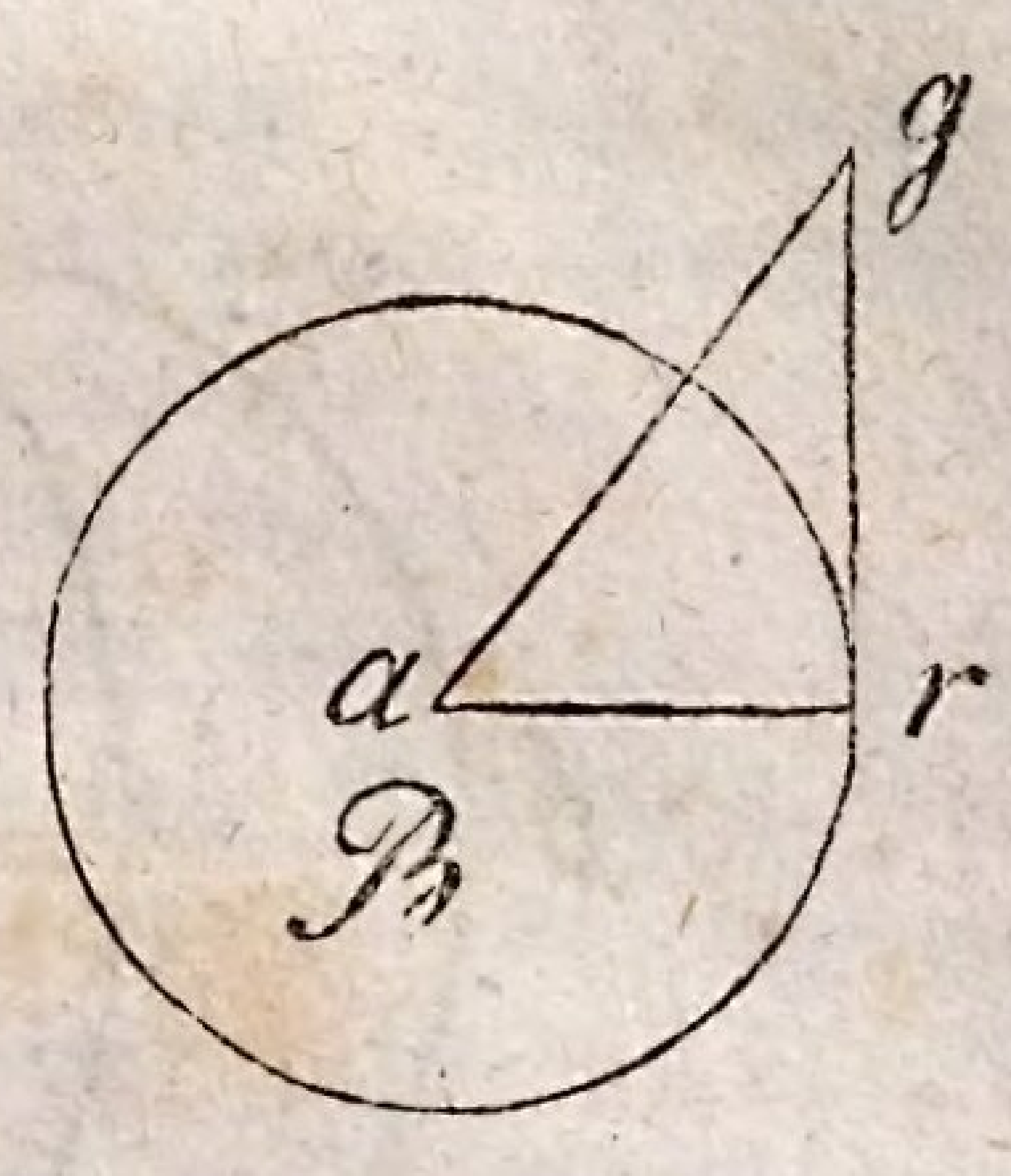
b) Arithmetisch. Man erhebe jeden Halbmesser der beiden Kreise zum Quadrat, addire solche zusammen, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, welche gleich dem Halbmesser ro ist. Denn es ist:

$$eb = 12^\circ;\ \text{daher}\ eb^2 = 12^2 = 144^\circ$$
$$rd = 8^\circ;\ \text{daher}\ rd^2 = 8^2 = 64^\circ$$

$$\text{also}\ rd^2 = 208^\circ$$
$$\text{daher}\ rd = \sqrt{208^\circ} = 14^\circ 4'.$$

§ 221.

Aufgabe. Von dem größern Kreise A, dessen Durchmesser ab = 24° den kleinen Kreis B, dessen Durchmesser cd = 16° ist, abzuziehen.



Auflösung. a) Geometrisch. Man setze 1. an den Endpunkt des Halbmessers des kleinen Kreises B eine beliebige senkrechte Linie gr und setze hierauf 2. den Halbmesser eb des großen Kreises als Hypothenuse aus dem Mittelpunkt a daran, so ist 3. die Linie gr der Halbmesser zu einem Kreise, welcher den Unterschied zwischen dem größern und kleinern ausmacht.

b) Arithmetisch. Man erhebe 1. die Halbmesser der gegebenen Kreise zu Quadraten, ziehe hierauf 2. das kleine Quadrat von dem größern ab; Und ziehe 3. aus der Differenz die Quadratwurzel, so ist solche gleich dem Halbmesser des verlangten Kreises. Es ist

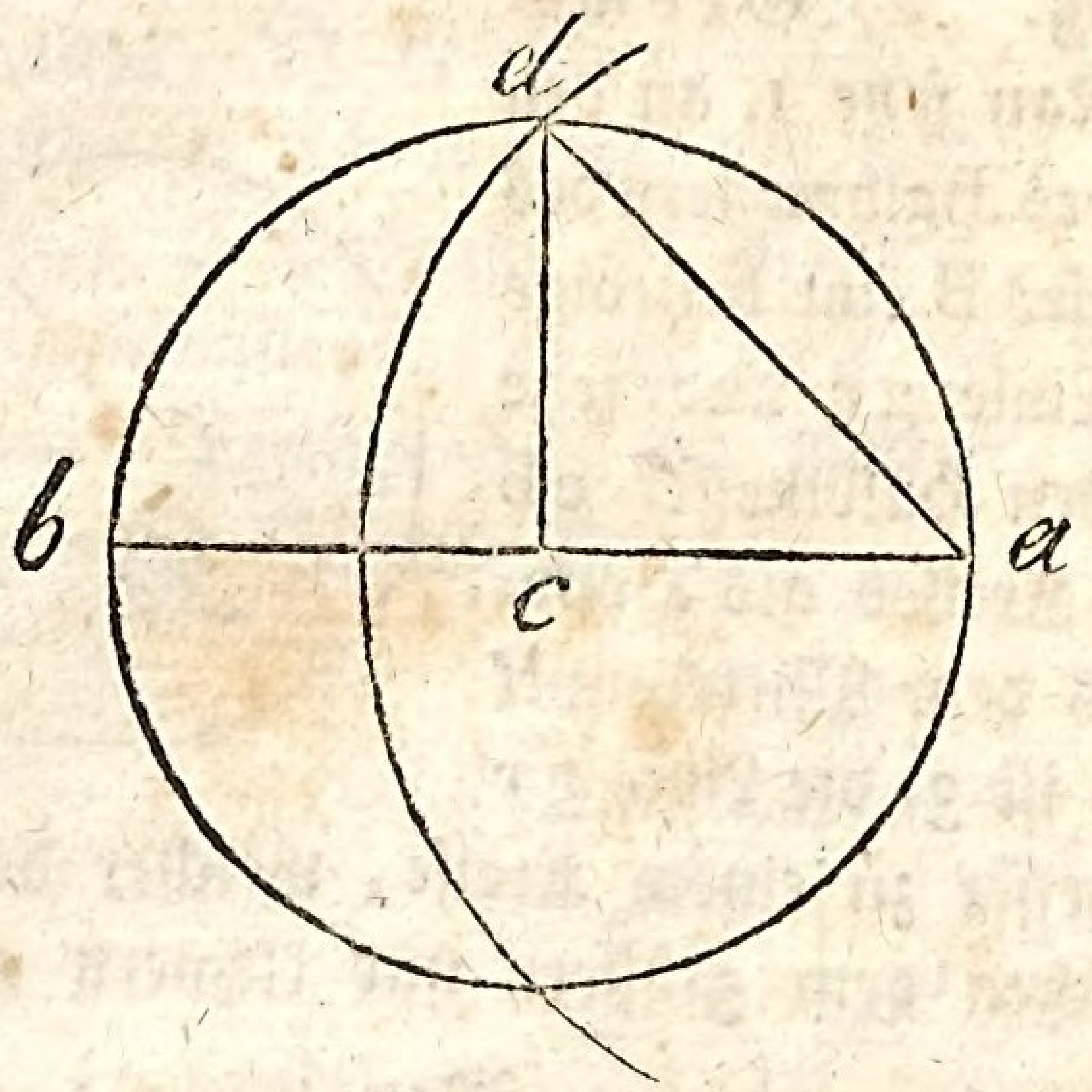
$$eb = 12^\circ;\ \text{daher}\ eb^2 = 12^2 = 144^\circ$$
$$ag = 8^\circ;\ \text{daher}\ ag^2 = 8^2 = 64^\circ$$
$$gr^2 = 84^2$$
$$gr = \sqrt{84} = 9^\circ 2'.$$

§ 222.

Aufgabe. Einen Kreis noch einmal so groß als einen gegebenen zu machen.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

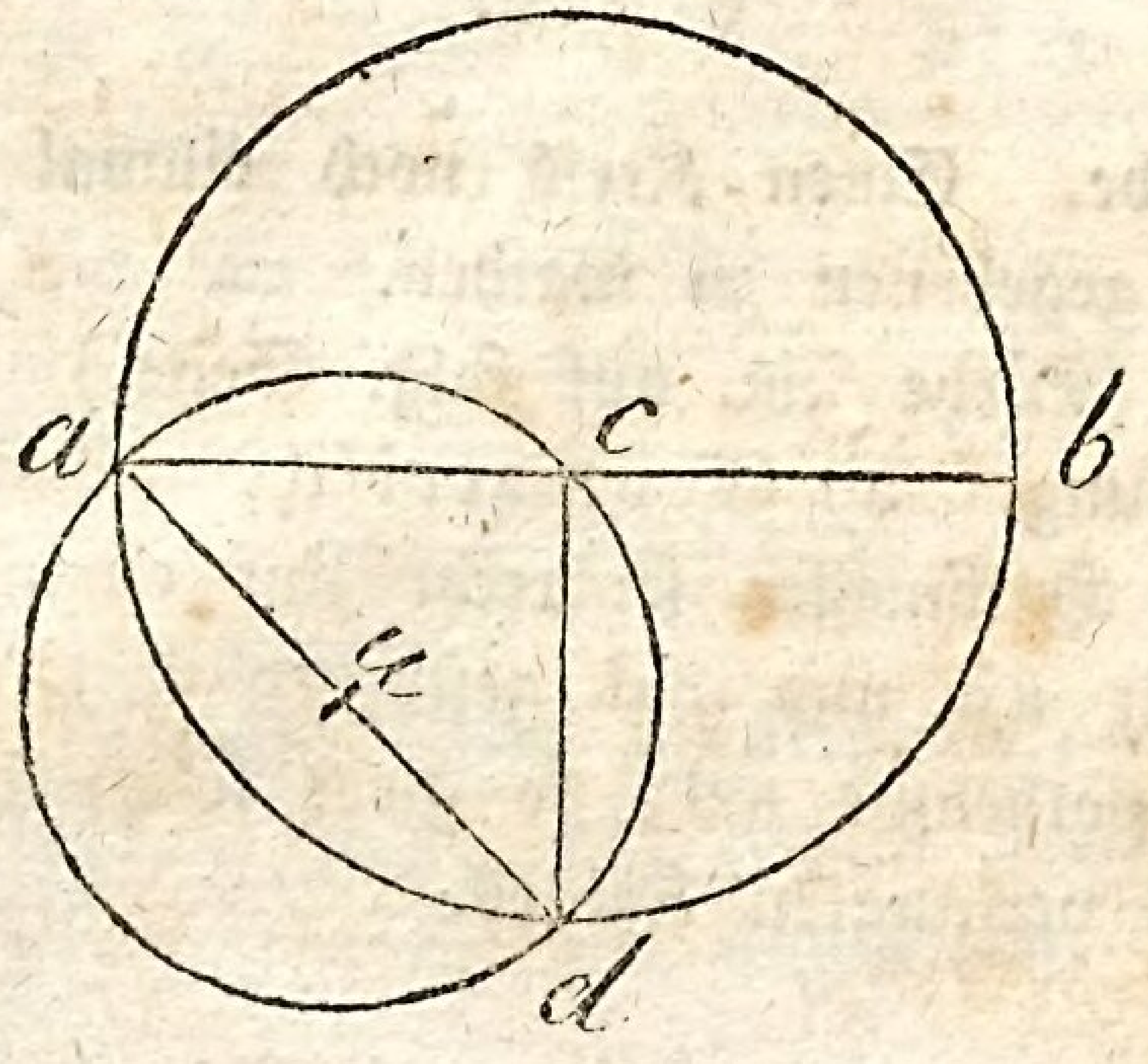
Auflösung. a) Geometrisch. Man setze 1. die beiden Halbmesser senkrecht auf einander, wie solches mit ac und cd geschehen ist, und ziehe 2. die Hypothenuse ad, so giebt solche den Halbmesser des verlangten Kreises.



b) Arihmetisch. Man erhebe den Halbmesser zum Quadrat, nehme hierauf solches doppelt, und ziehe daraus die Quadratwurzel, so ist solche = dem Halbmesser ad. Es sei
$ab = 24^{\circ}$, also $ac = 12^{\circ}$; $ac^2 = 12^2 = 144^{\circ}$; daher $2 . 144 = 288^{\circ} = ad^2$; $ad = \sqrt{288^{\circ}} = 17^{\circ}$.

§ 223.

Aufgabe. Einen Kreis noch einmal so klein als einen gegebenen zu machen.



Auflösung. a) Geometrisch. Man verfahre hierbei eben so, wie im § 222, nehme aber anstatt ad nur $\frac{1}{2}$ad, so ist die Hälfte von ad = au = dem Halbmesser des verlangten Kreises.

b) Arithmetisch. Man erhebe den Halbmesser des gegebenen Kreises zum Quadrat, theile solches durch 2 und ziehe daraus die Quadratwurzel. So ist z. B. im § 222 $ac^2 = 144°$, also $\frac{1}{2}ac^2 = 72°$; daher $\frac{1}{2}ad = \sqrt{72°} = 8° 5' = au$.

§ 224.

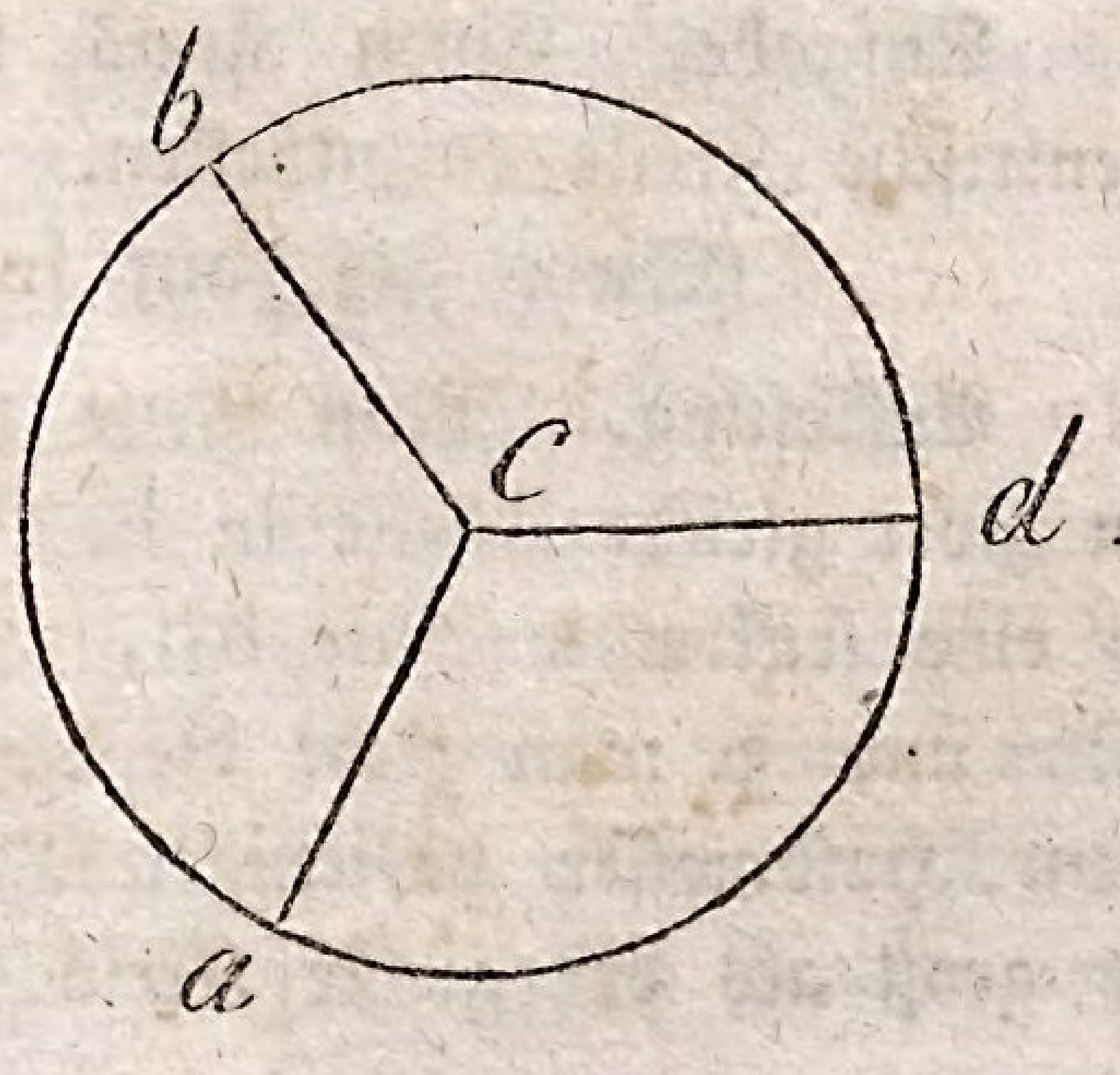
Zusatz. Wenn demnach der Durchmesser des einen Kreises = 4° und der des andern = 8° ist, so ist dieser Kreis 4 mal größer als jener, weil sich $4^2 : 8^2 = 16 : 64 = 1 : 4$.

Von der Eintheilung des Kreises in gleiche und ungleiche Theile.

§ 225.

Aufgabe. Einen Kreis in 3 gleiche Theile aus dem Mittelpunkte einzutheilen.

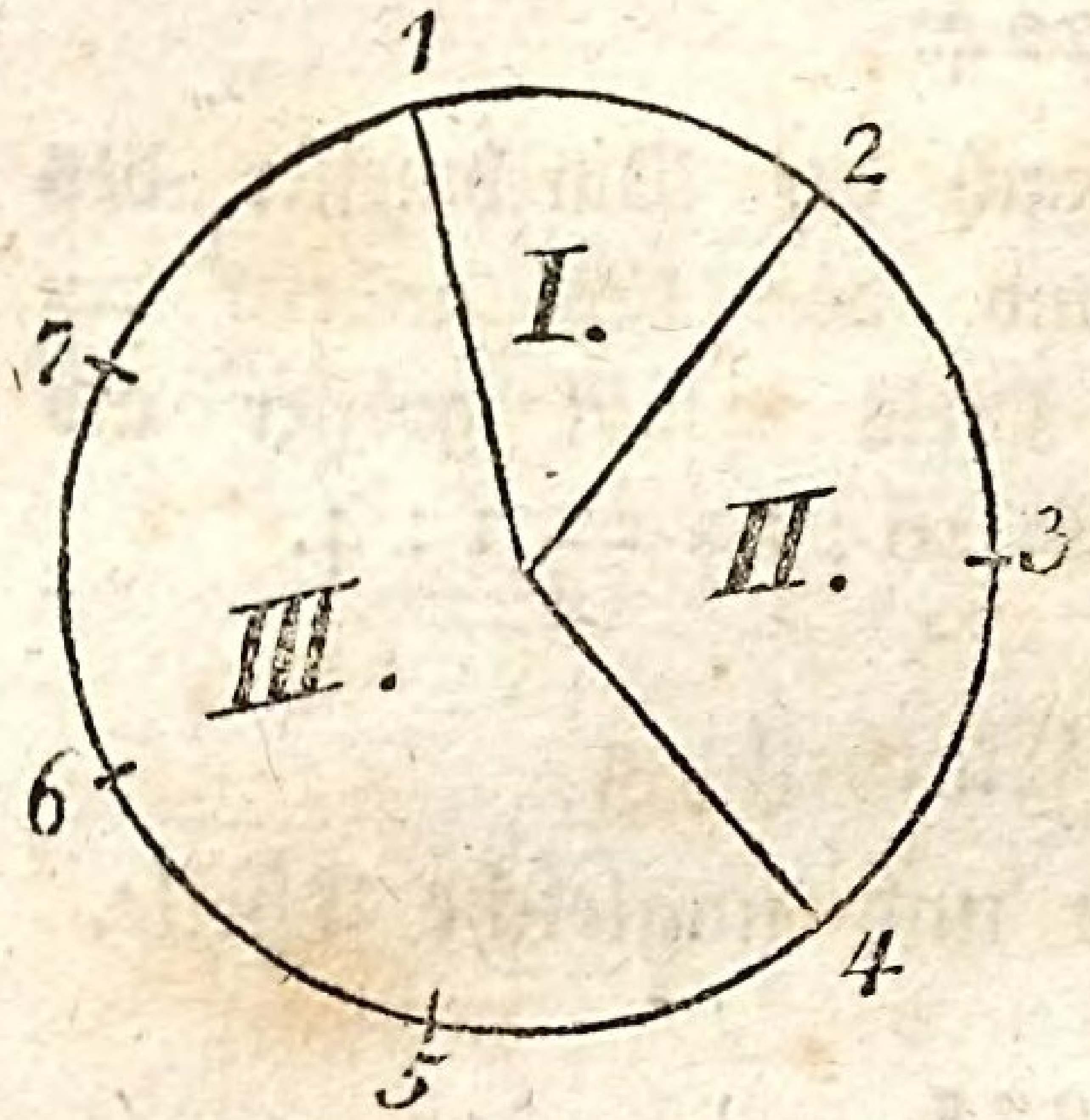
Auflösung. Man theile die Peripherie in 3 gleiche Theile und ziehe von den Theilungspunkten a, b und d gerade Linien nach dem Mittelpunkte c, so ist der Kreis gehörig eingetheilt worden.



Beweis. Weil die Kreisbogen sich gleich sind, so müssen auch die Ausschnitte sich gleich sein.

§ 226.

Aufgabe. Einen Kreis auf eben die Weise so einzutheilen, daß der zweite Theil noch einmal so groß als der erste, und der dritte noch einmal so groß als der zweite sei.



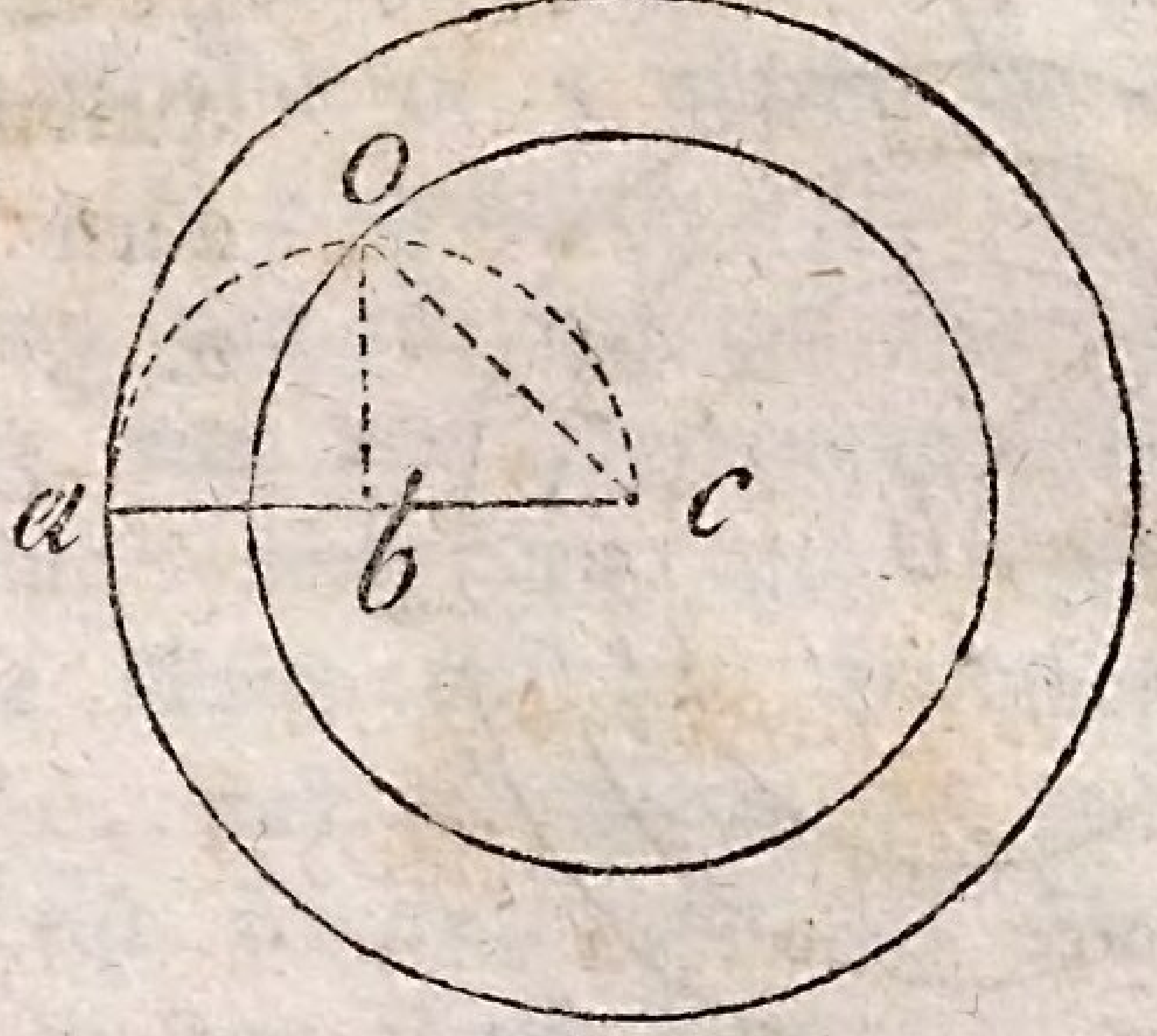
Auflösung. Man theile die Peripherie in sieben gleiche Theile, gebe davon dem 3 ten Theile vier, dem zweiten Theile zwei und dem ersten Theile einen Theil.

§ 227.

Aufgabe. Einen Kreis in zwei gleiche konzentrische Kreise einzutheilen.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man theile 1. den Halbmesser a c in zwei gleiche Theile in b. 2. Man errichte aus b eine senkrechte Linie b o, welche so lang als b c ist, und 3. man ziehe die Linie o c, welche gleich dem Halbmesser desjenigen Kreises ist, der halb so groß als der große Kreis ist.



Beweis. $bc = \frac{1}{2} ac$,
daher $2bc = ac$.

Daher $4bc^2 = ac^2$.
Nun ist aber $2bc^2 = oc^2$
und $4bc^2 = 2oc^2$

Folglich $2oc^2 = ac^2$.

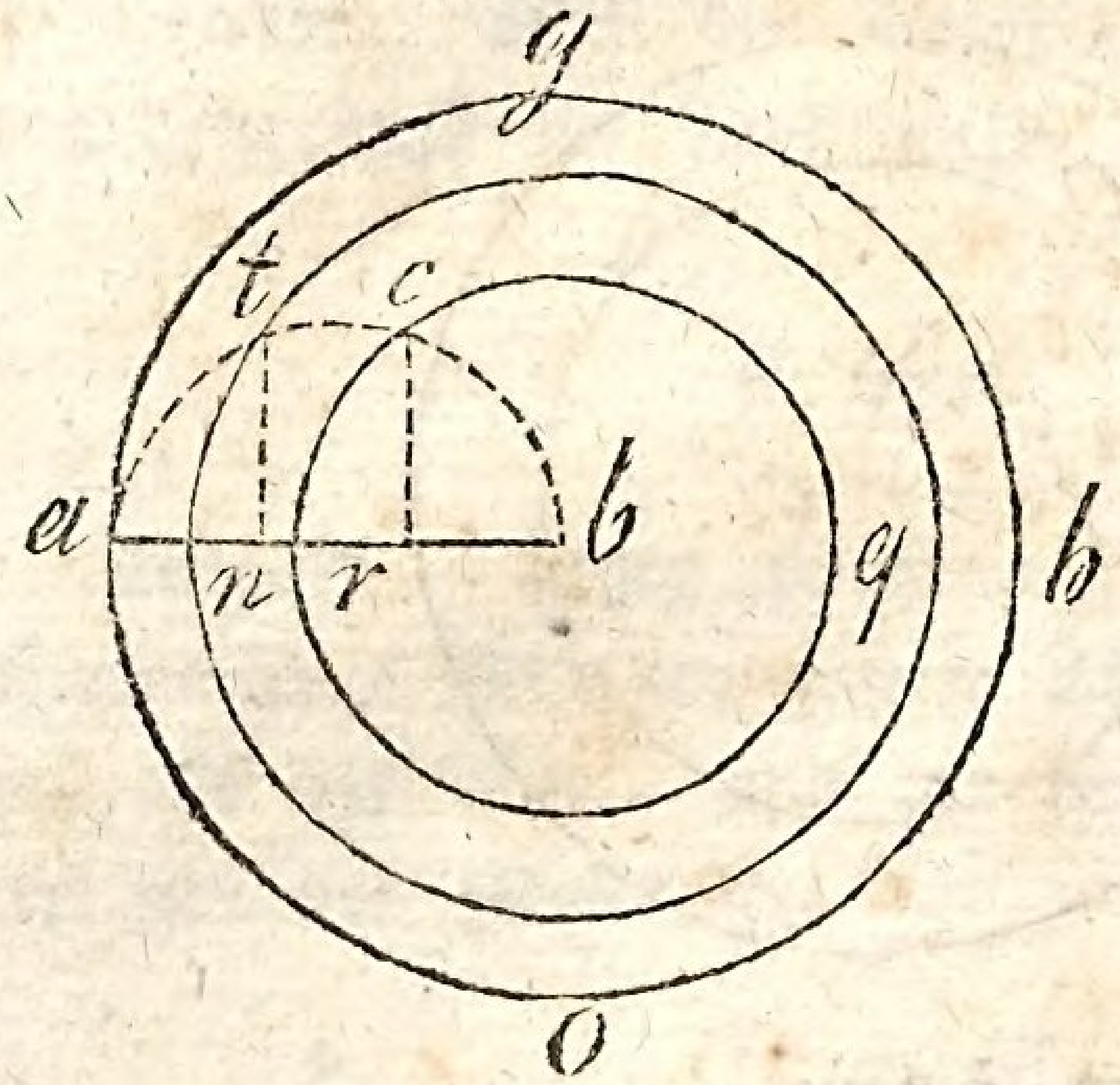
Und da sich die Kreisflächen zu einander verhalten, wie die Quadrate der Halbmesser, so ist die Fläche des großen Kreises noch einmal so groß als die des kleinen.

§ 228.

Aufgabe. Einen Kreis in 3 gleiche konzentrische Kreise einzutheilen.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)

Auflösung. Man theile 1. den Halbmesser ab des gegebenen Kreises in 3 gleiche Theile. 2. Man mache um ab einen halben Kreis und lasse 3. aus den Theilungspunkten senkrechte Linien nach dem halben Kreise hinfallen, so giebt die Weite $be = br$ den Halbmesser zum ersten Kreise und

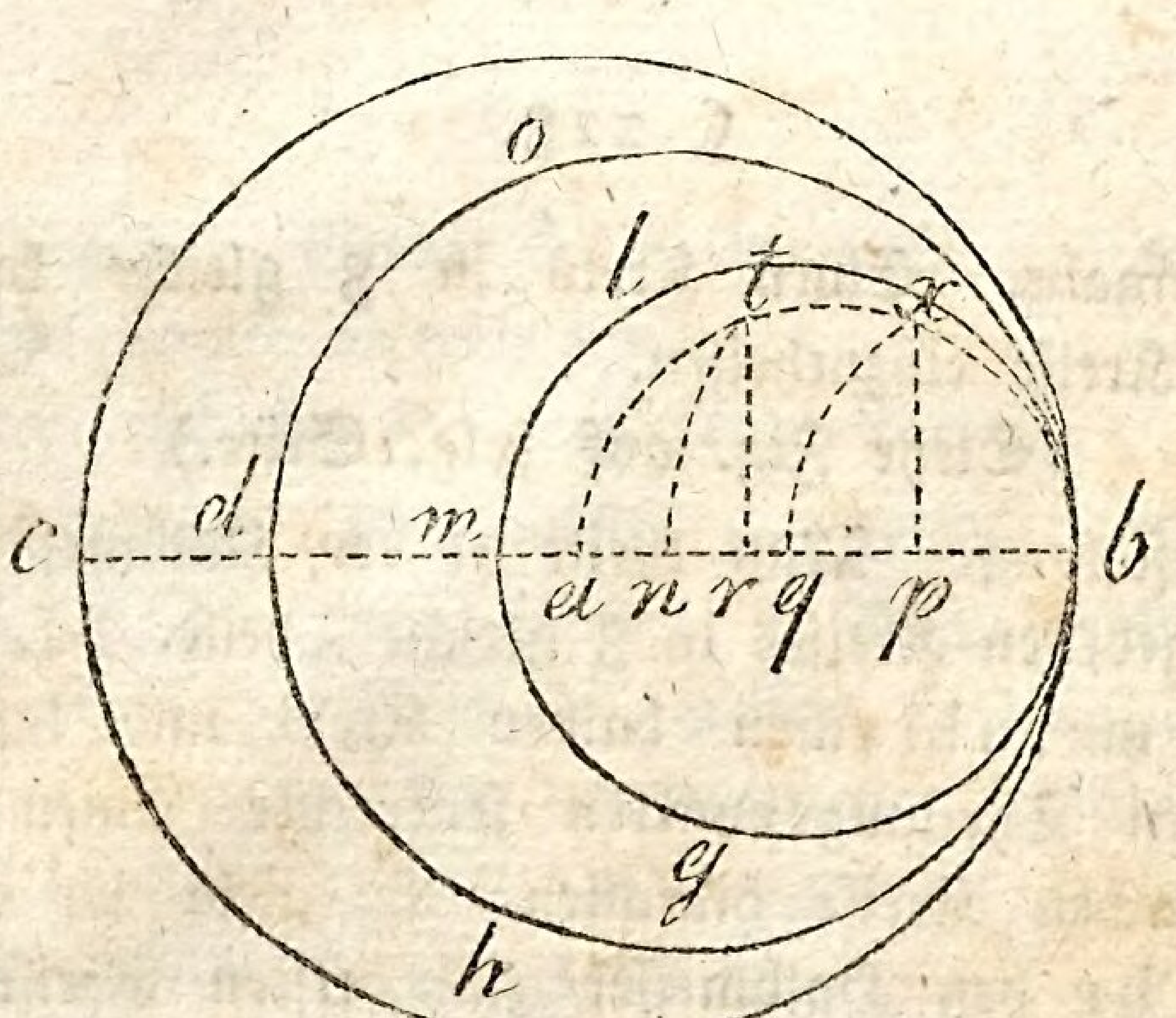


bt = bn den Halbmesser zum 2ten Kreise ab u. s. w.

Beweis. Wenn nach § 140 bei ähnlichen Dreiecken $br^2 = \frac{1}{3} ab^2$ ist, so muß auch dieses bei den Kreisen der Fall sein; daher verhält sich der Kreis req zu dem Kreise agho, wie sich br^2 zu ab^2, d. i. wie 1 zu 3.

§ 229.

Aufgabe. Einen Kreis in 3 gleiche Theile auf eine mondförmige Art einzutheilen.



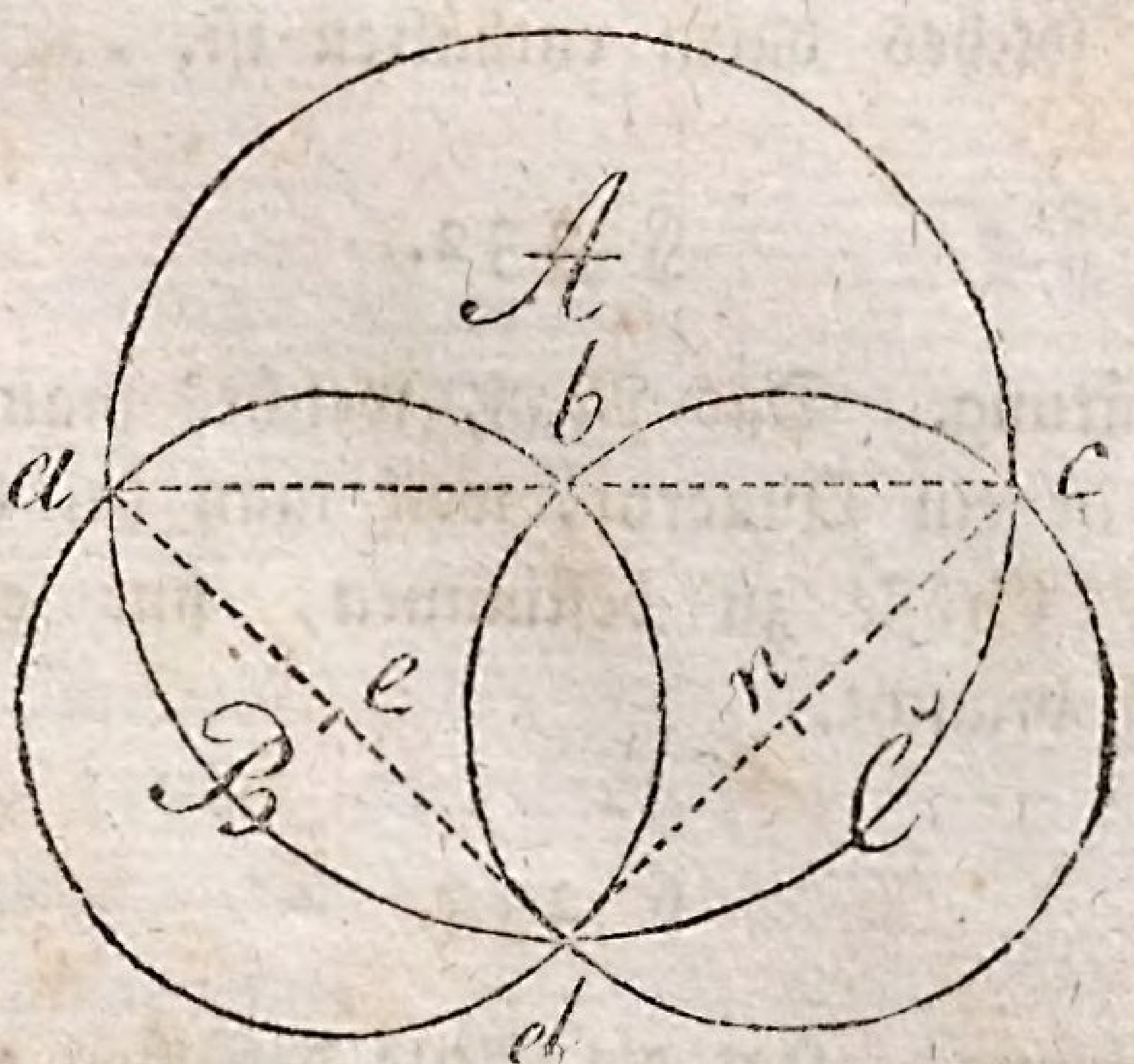
Auflösung. Man theile 1. den Halbmesser ab des größern Kreises in 3 gleiche Theile, wie solches in p und r geschehen ist. 2. Reiße man aus der Mitte von ab um ab einen halben Kreis und lasse 3. aus den Theilungspunkten p und r senkrechte Linien nach dem halben Kreise hinfallen, so giebt die Weite nb den Halbmesser zu dem Kreise bhdo, und die Weite bq den Halbmesser zu dem Kreise bhdo, und die Weite bq den Halbmesser zu dem Kreise bgml.

(Siehe Fig. auf voriger Seite.)

Der Beweis ist dem vorhergehenden gleich.

§ 230.

Aufgabe. Einen Kreis in zwei andere von gleichem Umfange einzutheilen.



Siehe Figur, in welcher A = B + C ist.

III. Abschnitt.

Von der Berechnung der Flächen und Körper:

A. Der Flächen.

Von dem Quadrate.

§ 231.

Erklärung. Eine Fläche berechnen heißt auszumitteln, wie viel mal ein angenommenes Maß in derselben umhergelegt werden kann, oder wie viel mal solches darin enthalten ist.

§ 232.

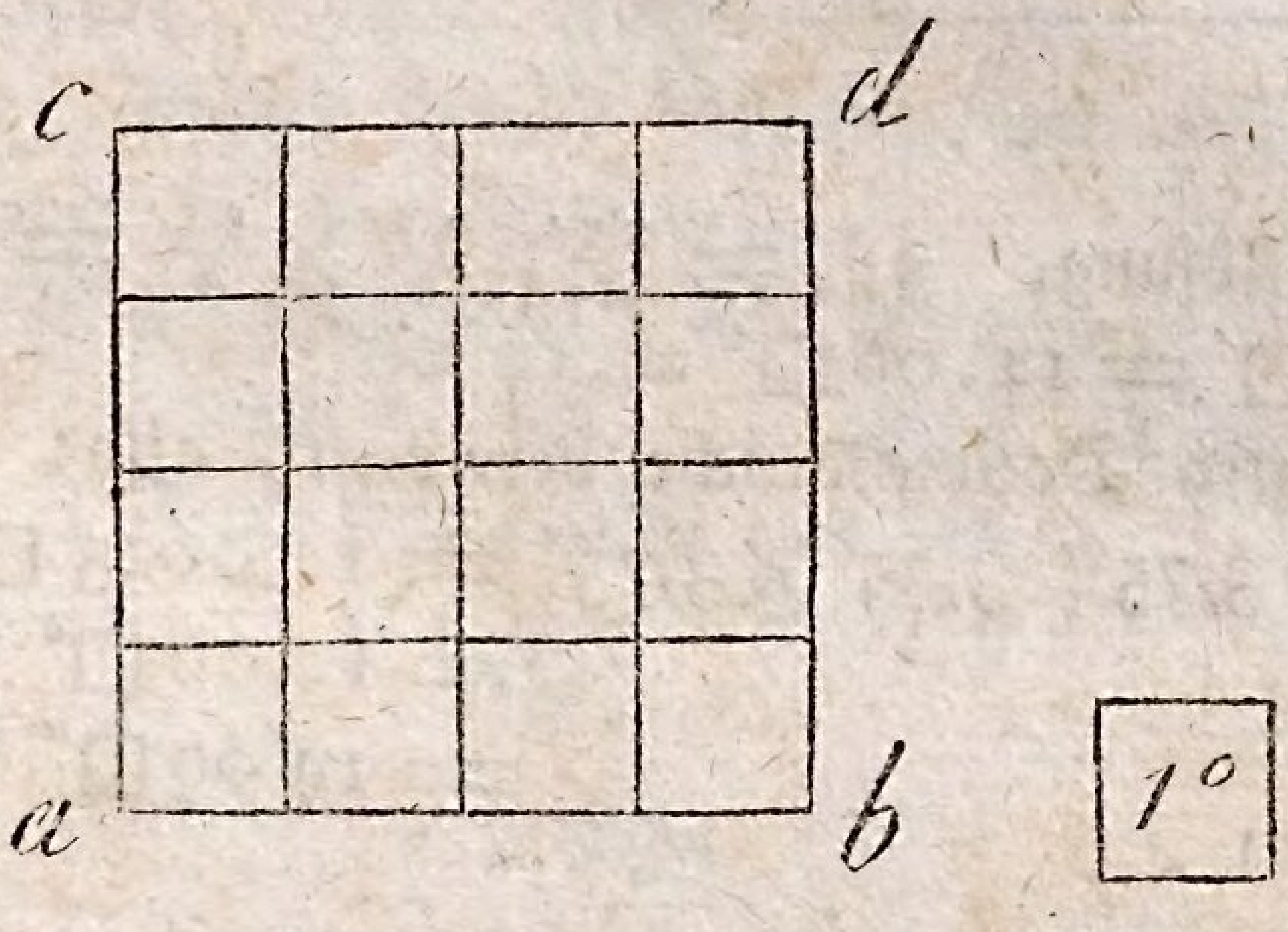
Erklärung. Das Maß, welches man sich dazu bedient, ist ein Quadrat, weil man bei demselben, um seine Größe zu bestimmen, nur eine Seite zu wissen braucht.

§ 233.

Erklärung. Hat die Seite desselben eine Länge von einer Ruthe, so hat die andere Seite auch eine Ruthe, und daher ist der ganze Raum eine Quadratruthe groß.

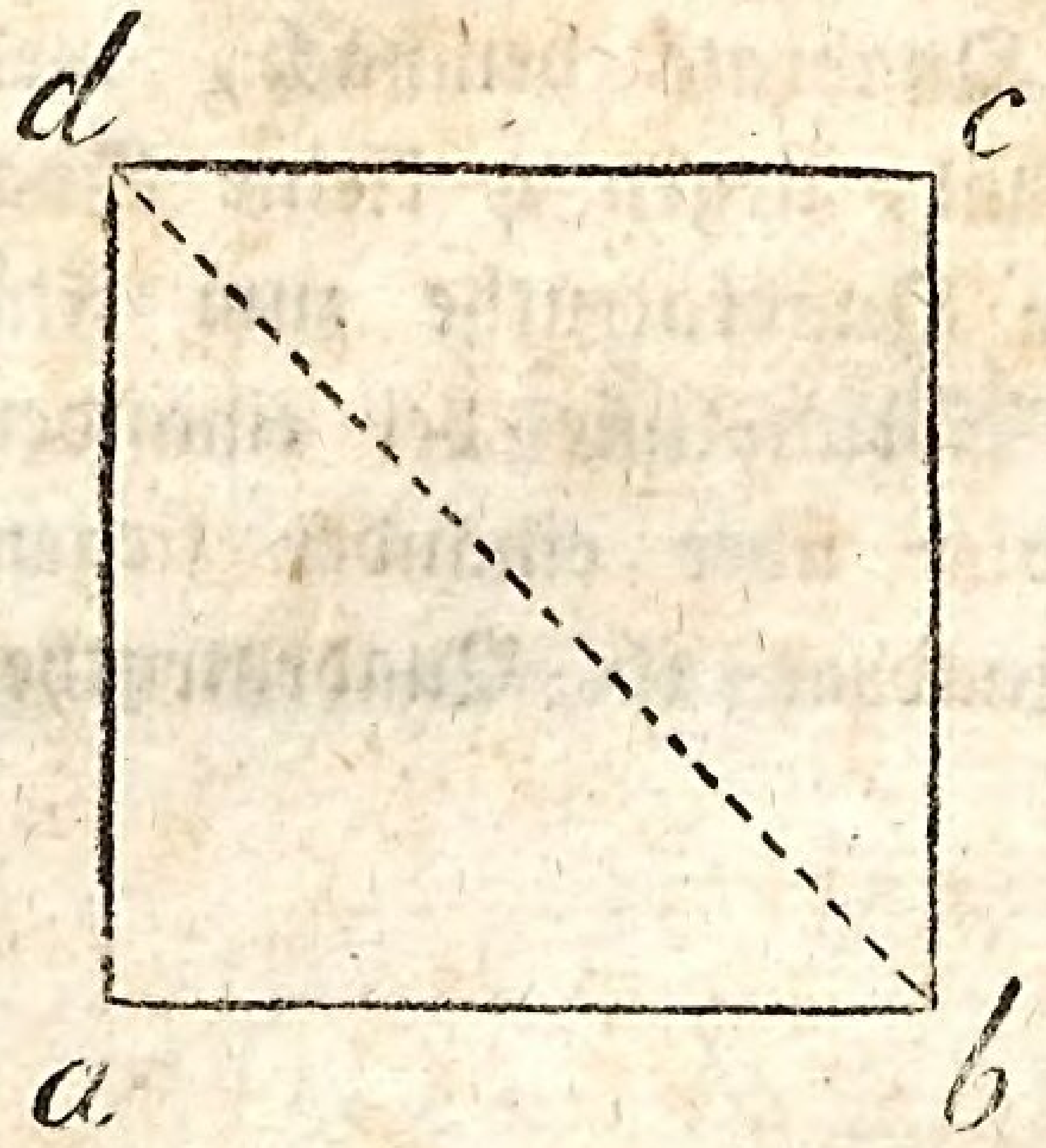
§ 234.

Zusatz. Bei einem Quadrate demnach, welches zur Grundlinie 4° hat, liegen 4 kleine Quadrate, wovon jedes eine Quadratruthe zum Flächenraume hat, auf der Grundlinie bei einander, und da solcher Reihen vier über einander liegen, so enthält das ganze Quadrat 16 Quadratruthen $= 16 \,\square^\circ$.



Um demnach den Flächenraum eines Quadrats zu finden, braucht man nur die Grundlinie desselben, welche gleich der Höhe ist, durch sich selbst zu multipliziren. Und da nun $1^\circ = 10'$ ist, so muß ein Quadrat, dessen Grundlinie $= 1^\circ = 10'$ lang ist, $100 \,\square'$ zum Inhalte haben. Hieraus folgt demnach, daß $1 \,\square^\circ = 100 \,\square'$ und $1 \,\square' = 100 \,\square''$ ausmachen. Nimmt man aber $12'$ zur Ruthe an, so hat $1 \,\square^\circ = 144 \,\square'$ und $1 \,\square' = 144 \,\square''$. Dieß letzte Maß nennt man das Duodezimal- und das erste das Dezimal-Maß, welches hier stets gebraucht wird.

§ 235.



Aufgabe. Wie groß ist der Flächenraum eines Quadrats, wenn dessen Grundlinie ab = $3\frac{3}{4}'$ ist?

Auflösung. $3\frac{3}{4}' = \frac{15'}{4}$; $\frac{15'}{4} \times \frac{15'}{4} = \frac{225'}{16} = 14\frac{1}{16}\square' = 14.06\square' = 14'06''$.

Durch Dezimalbrüche berechnet, also:

$3\frac{3}{4}' = 3{,}75'$; $3{,}75' \times 3{,}75' = 14{,}0625\square'$
$= 14{,}06\square'$
$= 14'06\square''$ *).

---

*) Soll ein Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt werden, so hängt man dem Zähler eine beliebige Anzahl von Nullen an, und dividirt denselben durch den Nenner.

So ist z. B. $3\frac{3}{4}' = \frac{15'}{4} = \frac{15{,}00'}{4} = 3{,}75'$ oder $= 3'7''5'''$. Hierauf werden bei der Multiplikation dieser Brüche die Dezimalstellen, das sind diejenigen, welche hinter dem Comma oder dem Ganzen stehen, von beiden Faktoren zusammen addirt und von dem Produkte abgetheilt.

So macht z. B. $3{,}75' \times 3{,}75' = 140625$ aus; werden nun von diesem Produkte 4 Stellen abgeschnitten, so erhalten wir $14{,}0625\square'$. Soll hierauf dieser Dezimalbruch gehörig in Schuh, Zoll ꝛc. abgetheilt werden, so gibt man dem Ganzen diejenige Benennung, welche die Ganzen in den Faktoren gehabt haben, und theilt hierauf

§ 236.

Aufgabe. Wie groß ist die Seite ab bei einem Quadrate, dessen Inhalt = 256 □′ ist?

Auflösung. Man ziehe aus 256 die Quadratwurzel, so hat man die verlangte Seite ab = 16′.

§ 237.

Aufgabe. Wie groß ist die Diagonallinie db bei einem Quadrate, dessen Seite ab = 2° 6″ ist?

Auflösung. Man erhebt die Seite ab zum Quadrate, nimmt solches doppelt, und ziehet aus der Summe die Quadratwurzel.

$$ab = 2^\circ 6'' = 2^\circ 0' 6''; \; ab^2 = 206 \times 206''$$
$$= 42436'' \quad = 4^\circ 24' 36'',$$
$$\text{daher } db^2 = 2 \times 42436'' = 84872''$$
$$\text{folglich } db = \sqrt{84872''} = 2^\circ 9' 1''.$$

§ 238.

Aufgabe. Wie groß ist die Diagonallinie bd bei einem Quadrate, dessen Inhalt = 128° ist?

Auflösung. Man nehme den Inhalt des Quadrats doppelt und ziehe daraus die Quadratwurzel, so ist diese gleich der Diagonallinie db. Der Inhalt des Quadrats ist = 128°, daher 2 × 128° = 256°, folglich $\sqrt{256^\circ} = 16^\circ = bd$.

---

beim Flächenmaße 2 Stellen, und beim Längenmaße eine Stelle ab; daher ist jener Dezimalbruch 14,0625 = 14′ 06″ 25‴.

Mehreres hierüber findet man in dem 2ten Theile meiner Anweisung zum gründlichen Rechnen S. 81—90.

§ 239.

Aufgabe. Wie groß ist die Seite ab eines Quadrats, wenn dessen Diagonallinie db = 1° 8″ ist?

Auflösung. Man erhebt die Diagonallinie zum Quadrate, theilt solches durch 2, und ziehet aus dem Quotienten die Quadratwurzel.

db ist $= 1° 8'' = 108''$
daher $db^2 = 108 \times 108'' = 1° 16' 64''$
folglich $\frac{11664''}{2} = ab^2 = 5832''$;
und $ab = \sqrt{5832''} = 7' 6''$.

§ 240.

Aufgabe. Wie groß ist der Inhalt eines Quadrats, wenn dessen Diagonallinie db = 24° ist?

Auflösung. Man erhebe db zum Quadrate und dividire solches durch 2; so giebt der Quotient den Inhalt des verlangten Quadrats.

Es ist $db = 24°$; also $db^2 = 576°$
daher $\frac{576}{2} = 288°$ = Inhalt des Quadrats.

§ 241.

Zusatz. Wenn demnach

Q = dem Inhalte des Quadrats
S = einer Seite, und
D = der Diagonallinie desselben ist,

so ist 1. $Q = S^2$
2. $S = \sqrt{Q}$
3. $D = \sqrt{2 S^2} = S\sqrt{2} = 1.414.. \times S..$

4. $S = \sqrt{\frac{D^2}{2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{D\sqrt{2}}{2} = 0{,}707.. \times D..$

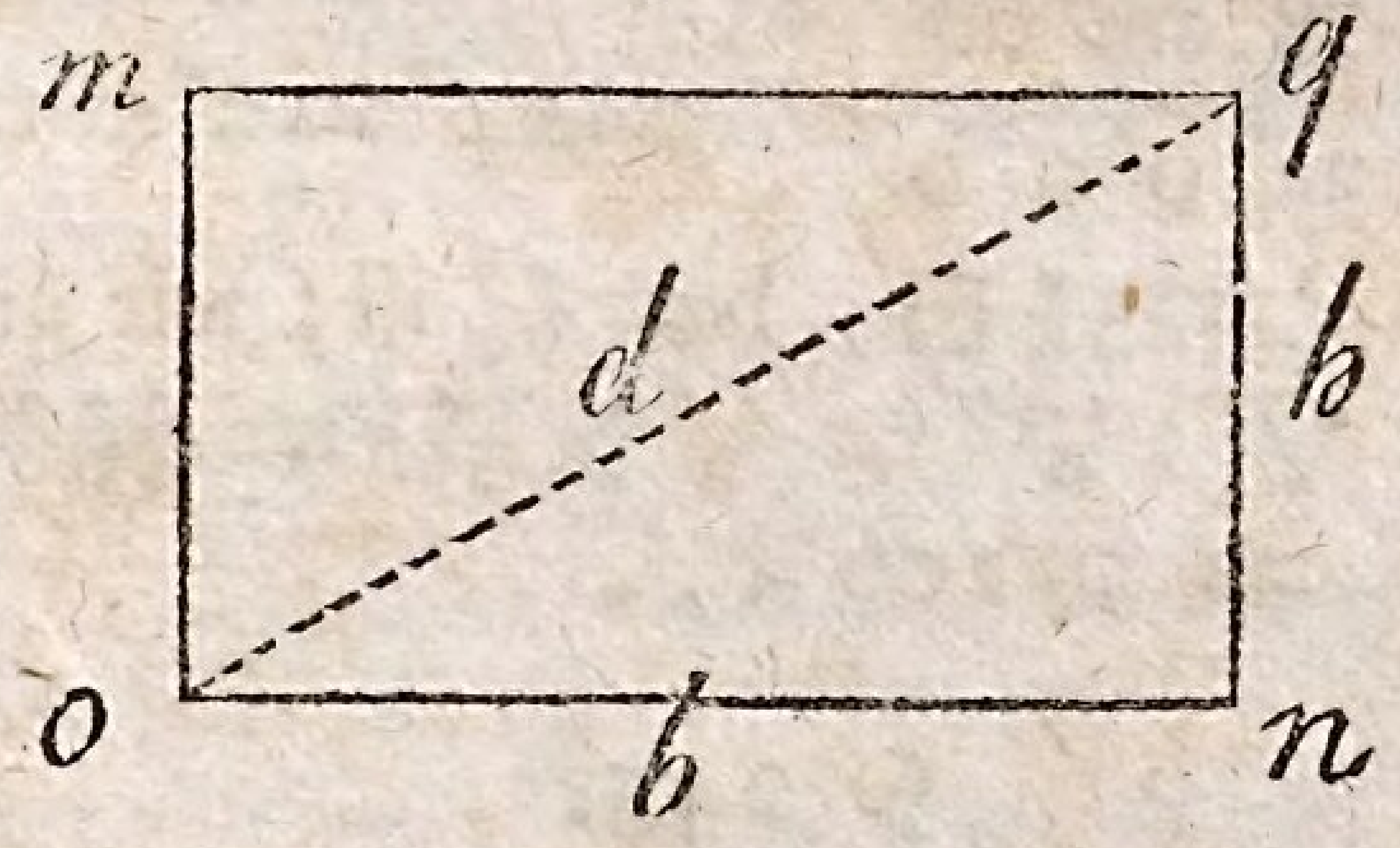
5. $Q = \frac{D^2}{2}$

6. $D = \sqrt{2Q}.$

Vom Rektangel.

§. 242.

Um den Inhalt eines Rektangels durch Berechnung zu finden, so muß man die Grundlinie durch die Höhe desselben multipliziren.



§ 243.

Zusatz. Wenn demnach der Inhalt des Rektangels $= P$, die Grundlinie $= b$ und die Höhe $= h$ ist; so ist 1. $P = b \times h = bh$. 2. $b = \frac{P}{h}$ und 3. $h = \frac{P}{b}$ d. h. die Grundlinie desselben wird gefunden, wenn der Inhalt durch die Höhe, und die Höhe wird gefunden, wenn der Inhalt durch die Grundlinie dividirt wird.

§ 244.

Zusatz. Hierauf gründen sich folgende Aufgaben:

1. Wenn b oder die Grundlinie $= 6^\circ$, und h oder die Höhe $= 5^\circ 4'$, wie groß ist P oder der Inhalt? So ist P oder der Inhalt $= 60' \times 54' = 3240 \square$ $= 32^\circ 40'$.

2. Wenn $b = 5\frac{3}{7}^\circ = 5{,}429^\circ \ldots$
$h = 4\frac{5}{6}' = 0{,}483^\circ$; wie groß ist P?
So ist $P = 2{,}6238 \square^\circ \ldots = 2^\circ 62' 38''$.

3. Wenn $P = 28 \square^\circ$, $h = 9'$; wie groß ist b?

$$\text{So ist } b = \frac{28^\circ 00' 00''}{9' 0''} = 3111'' = 31^\circ 1' 1'' = 31{,}11^\circ \ldots$$

4. Wenn $P = 78 \square'$; $b = 32^\circ$ ist; wie groß ist h?

$$\text{So ist } h = \frac{78' 00'' 00'''\ ^{*)}}{32^\circ 0' 0'' 0'''} = 24''' = 2'' 4''' = 0{,}024^\circ$$

5. Wenn $P = 5\frac{7}{8} \square'$, $b = \frac{5}{9}^\circ$ ist; wie groß ist h?
So ist $h = \frac{47'}{8} : \frac{50'}{9} = \frac{47}{8} \times \frac{9}{50} = \frac{423}{400} = 106'''$ $= 1' 0'' 6''' = 0{,}106^\circ \ldots$

§ 245.

Da jedes Rektangel durch eine Diagonallinie in zwei rechtwinklige Dreiecke eingetheilt wird, so ist das Quadrat der Diagonallinie gleich der Grundlinie und Höhe nach § 83.

Wenn demnach d = der Diagonallinie ist, so ist das Quadrat von d oder $d^2 = b^2 + h^2$; daher ist

*) Es müssen jedes Mal Zähler und Nenner gleiche Benennung haben, daher wenn der Zähler in Zoll verwandelt ist, so muß auch solches mit dem Nenner geschehen.

1. $d = \sqrt{(b^2 + h^2)}$

2. $b = \sqrt{(d^2 - h^2)}$ weil $b^2 = d^2 - h^2$ ist, und

3. $h = \sqrt{(d^2 - b^2)}$; denn h^2 ist $= d^2 - b^2$.

Da ferner $P = bh$ nach § 243, und $h = \sqrt{(d^2 - b^2)}$ und $b = \sqrt{(d^2 - h^2)}$ ist; so ist

4. $P = b\sqrt{(d^2 - b^2)}$ und auch $= h\sqrt{(d^2 - h^2)}$.

Auf eben diese Weise kann auch h und b aus P und d, und d aus P und b oder aus P und h, vermöge der Algebra, hergeleitet werden.

§ 246.

Einige Beispiele zur Erläuterung:

1. Wenn demnach die Grundlinie $b = 25^\circ$ und die Höhe $h = 18^\circ$ ist, wie groß ist alsdann die Diagonallinie d?

Da $b = 25^\circ$; so ist $b^2 = 625^\circ$
und $h = 18^\circ$; — — $h^2 = 324^\circ$.

Folglich $b^2 + h^2 = 949^\circ = d^2$
also $d = \sqrt{(b^2 + h^2)} = \sqrt{949} = 30^\circ 8'$.

2. Wenn die Diagonallinie $d = 48^\circ$ und die Höhe $h = 36^\circ$ ist, wie groß ist die Grundlinie b?

Da $d = 48^\circ$; so ist $d^2 = 2304^\circ$
und $h = 36^\circ$; — — $h^2 = 1296^\circ$.

Folglich $d^2 - h^2 = 1008^\circ = b^2$
also $b = \sqrt{(d^2 - h^2)} = \sqrt{1008} = 31^\circ 7'$.

3. Wenn die Diagonallinie $d = 36^\circ$ und die Grundlinie $b = 24^\circ$ ist, wie groß ist alsdann die Höhe h?

Da $d = 36^\circ$; so ist $d^2 = 1296^\circ$
und $b = 24^\circ$; — = $b^2 = 576^\circ$

Folglich $d^2 - b^2 = 720^\circ$
also $h = \sqrt{(d^2 - b^2)} = \sqrt{720^\circ} = 26^\circ 8' 3''$.

4. Wenn die Diagonallinie $d = 36^\circ$; und die Grundlinie $b = 20^\circ$ ist, wie groß ist alsdann der Inhalt des Rektangels P?

Da $d = 36^\circ$ ist, so ist $d^2 = 1296^\circ$
und $b = 20^\circ$ ist, — = $b^2 = 400^\circ$.

Folglich $d^2 - b^2 = 896^\circ$
also $\sqrt{(d^2 - b^2)} = \sqrt{896^\circ} = 29^\circ = h$ nach No. 3.

Da nun nach No. 4. $P = b\sqrt{(d^2 - b^2)}$ und $b = 20^\circ$ ist, so ist $P = 20\sqrt{896^\circ} = 20 \times 29^\circ = 580\,\square^\circ$.

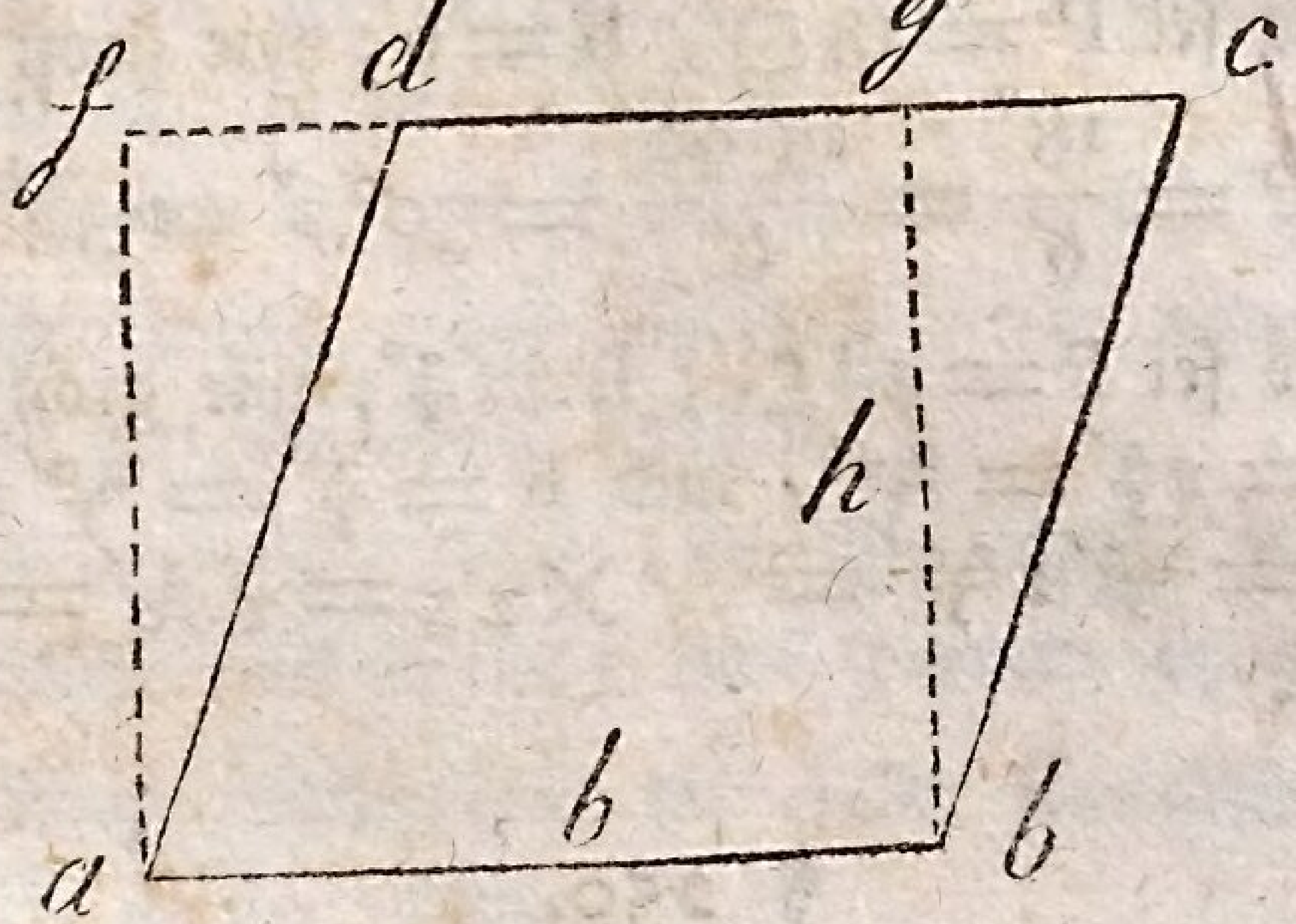
Wenn die Diagonallinie d und die Höhe h gegeben sind, um daraus P zu finden, so wird in jene Formel h anstatt b gesetzt, weil nach No. 4. auch $P = h\sqrt{(d^2 - h^2)}$ ist, und hierauf wird P auf eben diese Weise, wie vorhin berechnet.

Vom Rhombus und Rhomboides.

§ 247.

Da der Rhombus abcd = dem Rektangel afgb ist, indem die Grundlinie ab und die Höhe bg in den beiden Figuren sich gleich sind, so muß auch der Inhalt des Rhombus eben so wie der des Rektangels dadurch gefunden werden, daß man die Grundlinie ab durch die Höhe bg multiplizirt.

Und eben so ist auch ein Rhomboides einem Rektangel, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat, am Raume gleich; daher muß auch ein Rhomboides eben so, wie ein Rektangel, berechnet werden.



§ 248.

Zusatz. Ist demnach der Inhalt des Rhombus oder Rhomboides $= P$, die Grundlinie derselben $= b$ und ihre Höhe $= h$, so ist nach § 243

1. $P = bh$; 2. $b = \frac{P}{h}$; und 3. $h = \frac{P}{b}$.

§ 249.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Es sei die Grundlinie eines Rhombus oder oder Rhomboides $b = 8^{\circ}$ und die Höhe $h = 3^{\circ}4'$, wie groß ist der Inhalt P?
So ist $P = 304'' \times 800'' = 243200'' = 24^{\circ}\, 32 \,\square'$.

2. Es sei $b = 2\frac{2}{3}^{\circ}$, und $h = 3\frac{3}{5}'$; wie groß ist P?
Da $b = 2\frac{2}{3}^{\circ} = \frac{8}{3}^{\circ} = 2{,}666^{\circ}\,..$
und $h = 3\frac{3}{5}' = \frac{18}{5}' = 3{,}6' = 0{,}36^{\circ}$,
so ist $P = 2{,}666^{\circ} \times 0{,}36^{\circ} = 0{,}95976\,\square^{\circ}\,..$
$= 95'\,97''\,60'''$.

3. Es sei $P = 18\,\square^{\circ}$, $b = 6'$; wie groß ist h?

So ist $P = \frac{18^{\circ}}{6'} = \frac{18^{\circ}00'}{6'} = 30^{\circ}0' = 30^{\circ}$.

4. Es sei $P = 4\frac{4}{5}\,\square'$; $h = \frac{2}{3}^{\circ}$; wie groß ist b?
Da $P = 4\frac{4}{5}' = \frac{24}{5}'$, und $h = \frac{2}{3}^{\circ} = \frac{20}{3}'$;
so ist $b = \frac{24}{5}' : \frac{20}{3}' = \frac{24}{5} \times \frac{3}{20} = \frac{72}{100}' = \frac{720}{100}''$
$= 7'\,2''$.

§ 250.

Da sich ein Rhombus und Rhomboides nicht durch eine Diagonallinie in rechtwinklige Dreiecke eintheilen lassen, so lassen sich auch jene Berechnungsfälle im § 245 hier nicht anwenden.

Vom Dreiecke.

§ 251.

Erklärung. Da jedes Dreieck die Hälfte von einem Parallelogramm ist, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundlinie hat, und der Inhalt desselben nach den §§ 242 und 247 dadurch gefunden wird, daß man die Grundlinie durch die Höhe multiplizirt, so muß auch der Inhalt eines Dreiecks dadurch gefunden werden, daß man die Grund-

linie desselben durch die Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

§ 252.

Wenn demnach T = dem Inhalte des Dreiecks, b = der Grundlinie und h = der Höhe desselben ist, so ist:

$$T = bh = \tfrac{1}{2}\, b \times h = \tfrac{1}{2}\, h \times b.$$

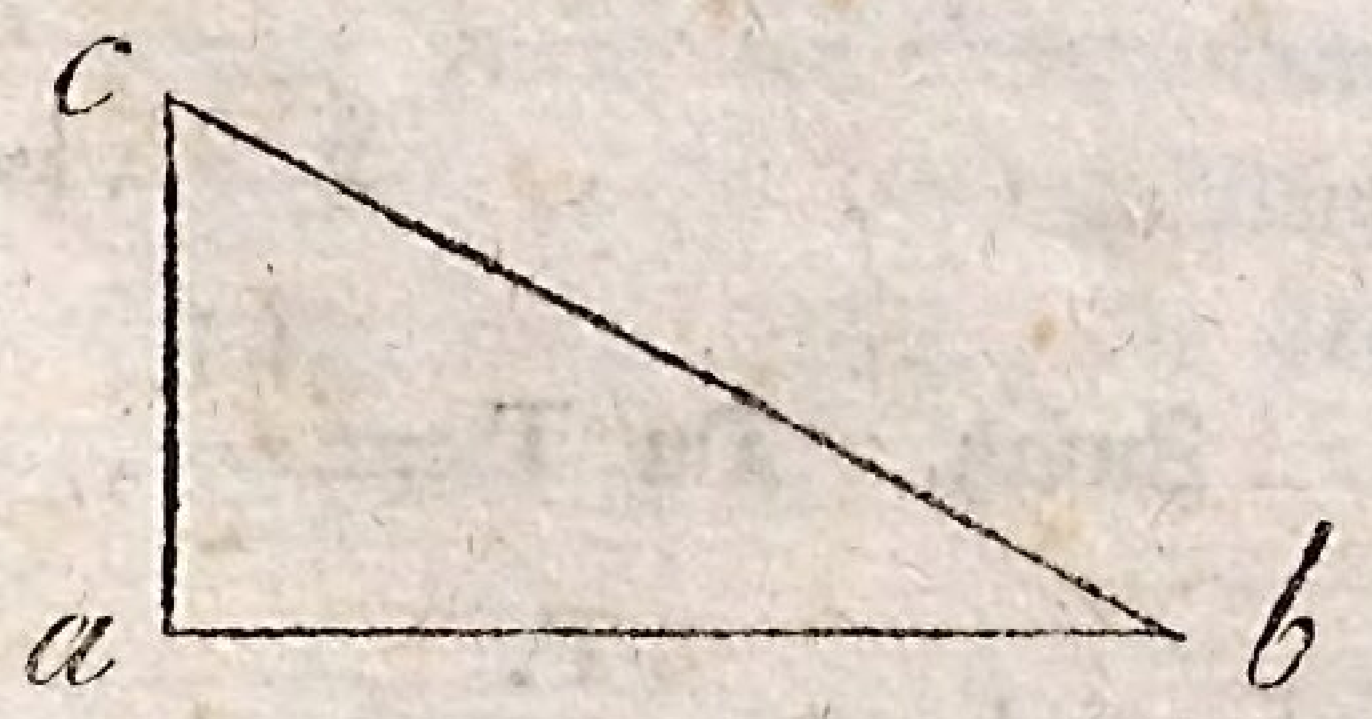
Der Inhalt eines Dreiecks kann demnach auf dreierlei Art berechnet werden:

1. Man multiplizirt die Grundlinie durch die Höhe und dividirt das Produkt durch 2.
2. Man multiplizirt die halbe Grundlinie durch die Höhe. Und
3. Man multiplizirt die halbe Höhe mit der Grundlinie.

§ 253.

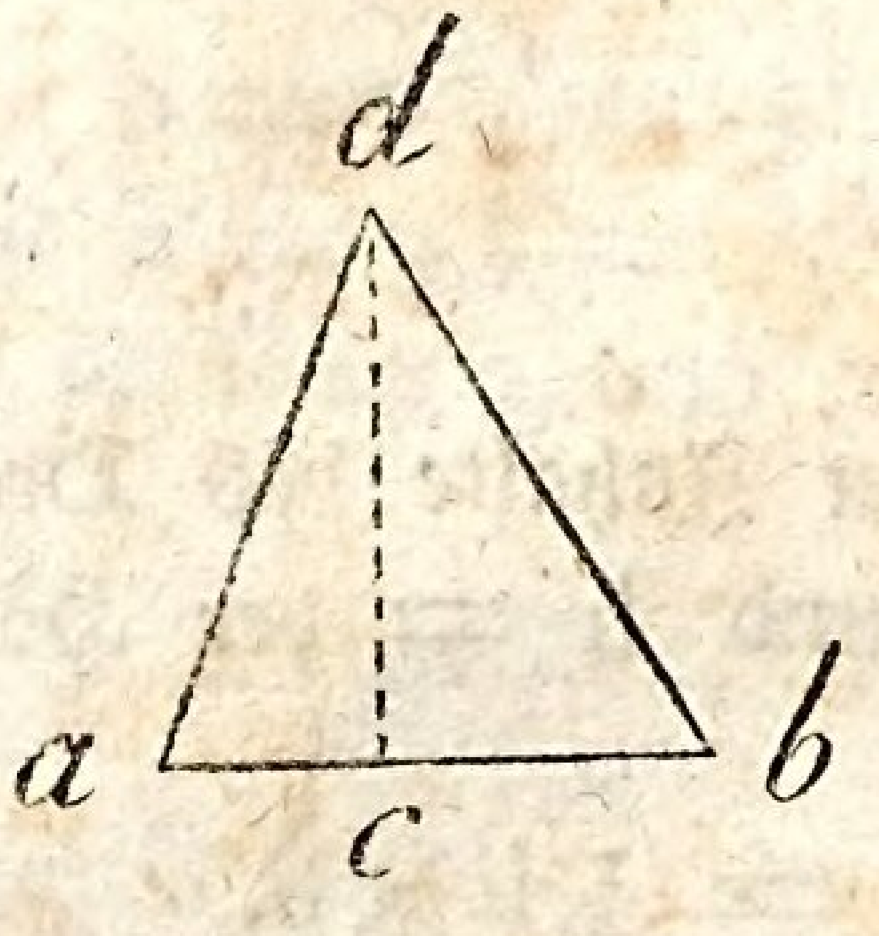
Beispiele zur Erläuterung:

1. Bei dem rechtwinkligen Dreiecke abc sei die Grundlinie $ab = 2^{\circ}4''$ und die Höhe $ac = 1^{\circ}8'$ wie groß ist der Inhalt T?



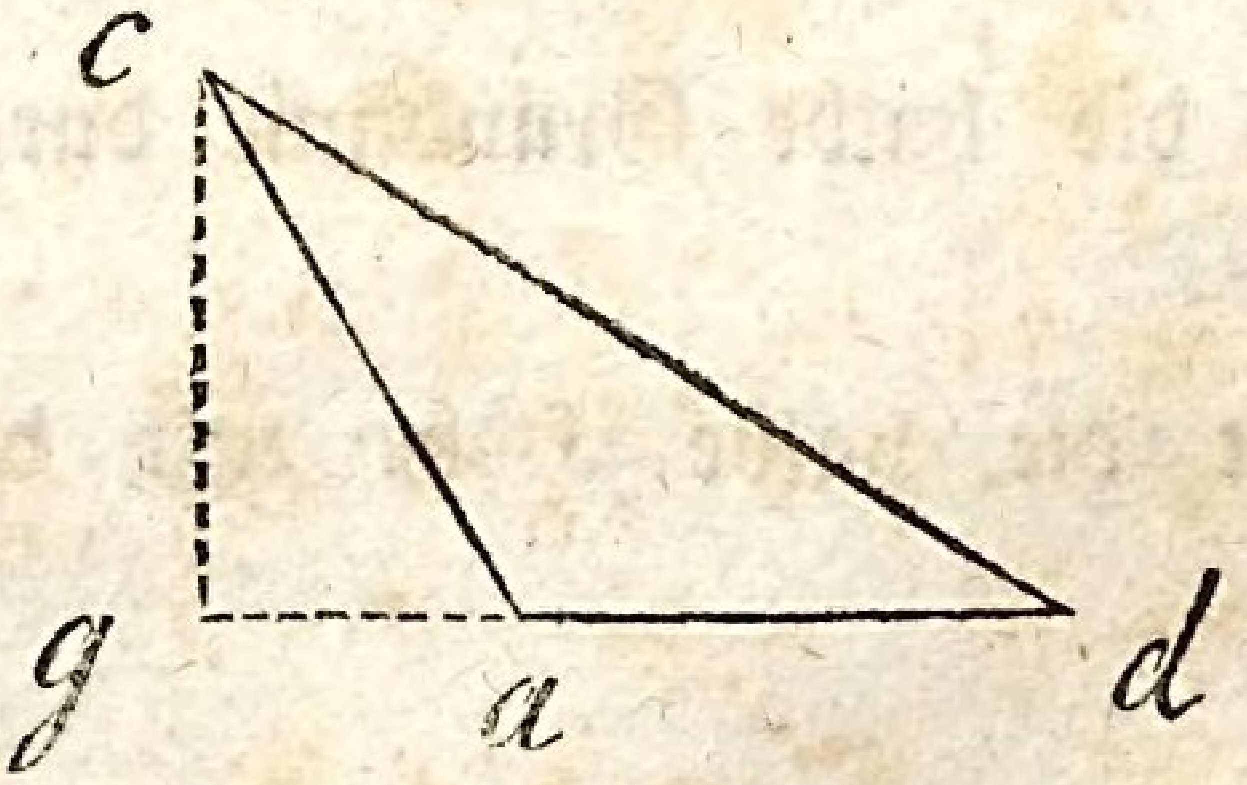
So ist $T = 204'' \times \frac{180''}{2} = 204'' \times 90'' = 1^{\circ}83'60 \,\square''$

nach No. 3. § 252.



2. Bei dem spitzwinkligen Dreiecke abd sei die Grundlinie ab = 1° 7′ und die Höhe cd = 1° 9′ 6″; wie groß ist T oder der Inhalt?

So ist $T = \frac{170'' \times 196''}{2} = 1°\ 66'\ 60\ \square''$ nach No. 1. § 252.



3. Bei dem stumpfwinkligen Dreieck acd sei die Grundlinie ad = 164″, und die Höhe gc = 178″, wie groß ist T oder der Inhalt?

So ist $T = 178 \times \frac{164}{2} = 178 \times 82 = 1°\ 45'\ 96''$ nach No. 2. § 252.

§ 254.

Zusatz. Da $T = \frac{bh}{2}$, so ist 1. $b = \frac{2T}{h}$, und 2. $h = \frac{2T.}{b}$

Man findet demnach die Grundlinie eines Dreiecks, wenn der Inhalt desselben und die Höhe gegeben sind, dadurch, daß man den Inhalt doppelt nimmt

und durch die Höhe dividirt, oder kürzer den Inhalt durch die halbe Höhe dividirt. Und soll die Höhe eines Dreiecks gefunden werden, wenn der Inhalt und die Grundlinie bekannt sind, so wird der Inhalt durch die halbe Grundlinie dividirt.

§ 255.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Es sei $T = 9\square''$ und $h = 7''$, wie groß ist die Grundlinie b?

Da $T = 9''$; $2T = 18''$ und durch $h = 7''$ dividirt $= \frac{18}{7}''$ ist, so ist $b = 2''5'''$.

2. Es sei $T = \frac{7}{9}\square'$ und $b = \frac{3}{8}°$, wie groß ist die Höhe h?

$$\text{Da } T = \tfrac{7}{9}' = \frac{7'00''}{9} \text{ und } b = \tfrac{3}{8}° = \frac{3°0'0''}{8}$$

$$\text{ist; so ist } h = \tfrac{700}{9}'' : \tfrac{300}{8}'' = \frac{700 \cdot 8}{9 \cdot 300} = \tfrac{56}{27}'' = 2''.$$

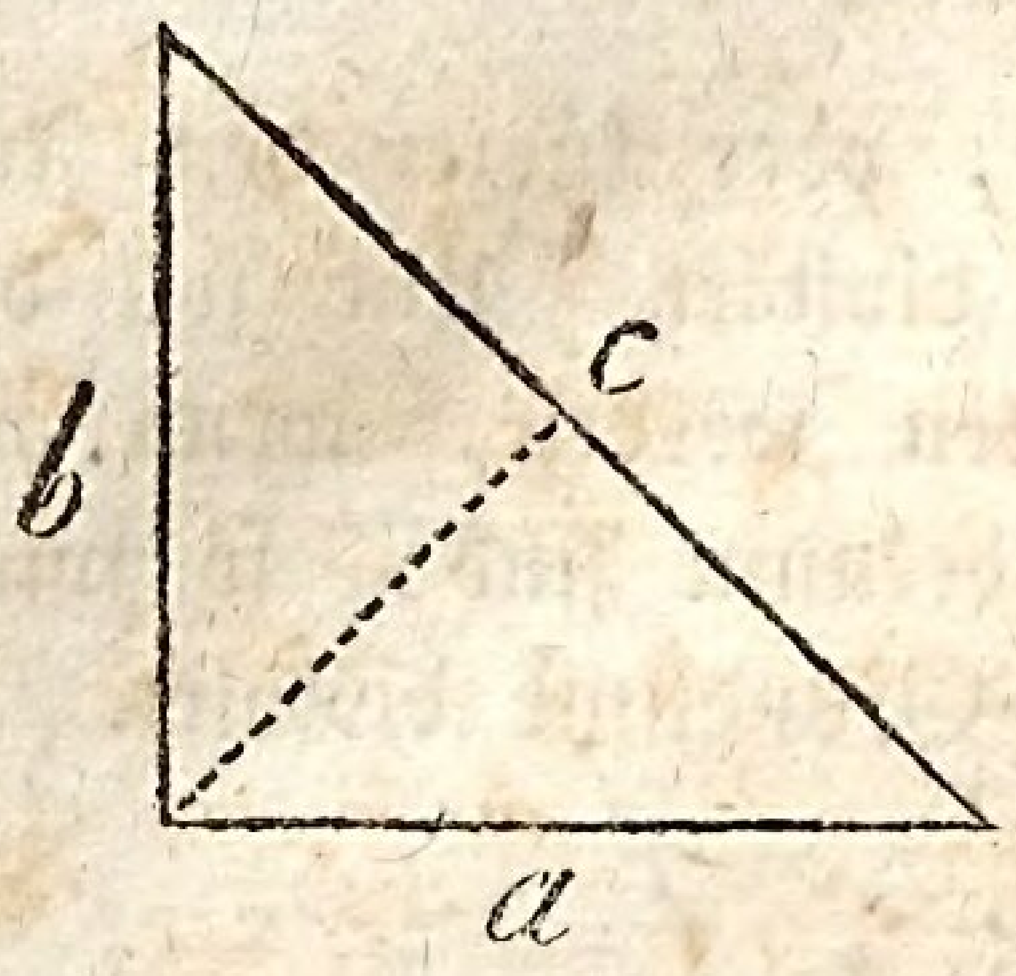
§ 256.

Bei dem rechtwinkligen gleichseitigen und gleichschenkligen Dreiecke kommen durch die Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras noch mannigfaltige Vortheile in der Berechnung vor, welche bei dem ungleichseitigen nicht anzuwenden sind.

A. Von dem rechtwinkligen Dreiecke.

§ 257.

Wenn a und b die Catheten dieses Dreiecks,



c die Hypothenuse,
T der Flächeninhalt desselben sind, so ist, da nach § 83 $c^2 = a^2 + b^2$ ist,

1. $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$
2. $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$
3. $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$;

Und da ferner die Catheten zugleich die Grundlinien und Höhen bei dem rechtwinkligen Dreiecke ausmachen, und

4. $T = \frac{a\,b}{2}$ nach §§ 252 und 254,

5. $a = \frac{2\,T}{b}$ und

6. $b = \frac{2\,T}{a}$ ist, so ist

7. $T = \frac{a\sqrt{(c^2 - a^2)}}{2}$ nach No. 2.

8. $T = \frac{b\sqrt{(c^2 - b^2)}}{2}$ nach No. 3. und

9. $c = \frac{\sqrt{(4T^2 + a^4)}}{a}$ *).

*) Nach No. 7 ist $2T = a\sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{(c^2 - a^2)\,a^2}$;
daher $4\,T^2 = (c^2 - a^2)\,a^2 = c^2\,a^2 - a^4$
also $4\,T^2 + a^4 = c^2\,a^2$; $c^2 = \frac{4\,T^2 + a^4}{a^2}$
folglich $c = \frac{\sqrt{(4T^2 + a^4)}}{a}$.

§ 258.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn dessen Hypothenuse $c = 30'$ und dessen eine Cathete $a = 18'$ ist?

Da nach No. 7 $T = a\sqrt{(c^2 - a^2)}$ ist

und $c = 30'$, so ist $c^2 = 900'$

$a = 18'$, — : $a^2 = 324'$

folglich $c^2 - a^2 = 576'$ und

$\sqrt{(c^2 - a^2)} = \sqrt{576'} = 24'$ ist;

so ist $\frac{a\sqrt{(c^2 - a^2)}}{2} = \frac{18' . 24'}{2} = 216 \square'$

daher $T = 2° 16 \square'$.

2. Wie groß ist die Hypothenuse c eines solchen Dreiecks, wenn der Inhalt $T = 2° 16 \square'$ und die eine Cathete $a = 18'$ ist?

Da nach No. 9 $c = \frac{\sqrt{(4T^2 + a^4)}}{a}$

und $T = 216'$ ist, so ist $4T^2 = 186624'$

$a = 18'$ — : — : $a^4 = 104976'$

Folglich $4T^2 + a^4 = 291600'$

und $\sqrt{(4T^2 + a^4)} = \sqrt{291600'} = 540'$.

so ist $\frac{\sqrt{(4T^2 + a^4)}}{a} = \frac{540'}{18'} = 30'$

daher ist c, wie in No. 1 $= 30'$.

§ 259.

Zusatz. So wie c aus T und a gefunden werden kann, so kann auch a oder b auf eine nur

etwas mühsamere Weise aus T und c gefunden werden, indem b gleich der Quadratwurzel aus dem Binomium $= \frac{c^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c^4}{4} - 4T^2\right)}$ ist.

Wird dieses aufgelöset, so ist

$$b = \sqrt{\left(\frac{c^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c^4}{4} - 4T^2\right)}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(c^2+4T)} \mp \sqrt{(c^2-4T)}}{2}$$

Nach dem vorhergehenden Beispiele war T = 216′ und c = 30′, also ist nach der Formel

$$b = \frac{\sqrt{(30^2+4.216)}}{2} \mp \frac{\sqrt{(30^2-4.216)}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(900+864)}}{2} \mp \frac{\sqrt{(900-864)}}{2}$$

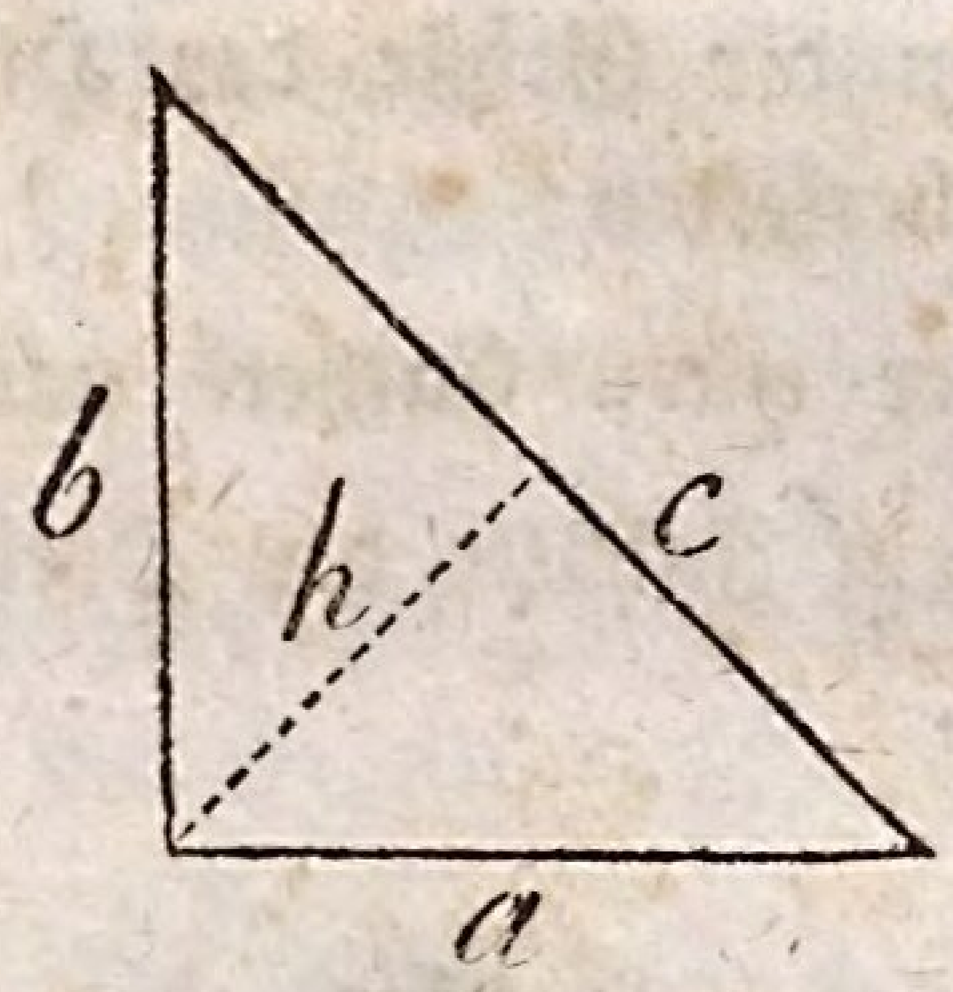
$$= \frac{\sqrt{1764}}{2} \mp \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{42}{2} \mp \frac{6}{2} = 21 \mp 3.$$

Ist demnach b = 21 + 3 = 24′; so ist a = 21′ — 3 = 18′, welches mit dem Werthe von b im § 258 vollkommen übereinstimmt.

B. Von dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke.

§ 260.

Ist der Flächenraum des Dreiecks (S. Fig. auf folg. Seite) = T, die Hypothenuse = c, die eine Cathete = b und = der andern a; so ist, da $c^2 = b^2 + a^2 = 2b^2$ ist,



1. $c = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2} = 1.414 \ldots b.$

2. $b = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 \ldots c.$

Ferner da $T = \frac{ba}{2}$, und $a = b$ ist, so ist

3. $T = \frac{bb}{2} = \frac{b^2}{2}.$

4. $b = \sqrt{2T} = 1.414 \ldots \sqrt{T}.$

5. $c = 2\sqrt{T}$, weil $c^2 = 2b^2$ ist, und

6. $T = \frac{c^2}{4}.$

§ 261.

Zusatz. Man kann also:

I. Den Flächen-Inhalt dieses Dreiecks berechnen:
   a. Aus einer Cathete nach No. 3.
   b. Aus der Hypothenuse nach No. 6.

II. Man kann den Werth von jeder Cathete von a oder b finden:
   a. Aus dem Inhalte des Dreiecks selbst, nach No. 5.
   b. Aus der Hypothenuse nach No. 2.

III. Man kann die Größe der Hypothenuse durch Berechnung herleiten:

a. Aus der einen Cathete nach No. 1.

b. Aus dem Inhalte des Dreiecks selbst, nach No. 5.

§ 262.

Anmerkung. Von diesen Sätzen sind diejenigen, bei welchen die Quadratwurzeln ausgerechnet stehen, in der Berechnung die bequemsten, indem man die dabei stehende Größe nur durch diese ausgerechnete Zahl zu multiplizieren braucht, um das verlangte Resultat zu erhalten.

§ 263.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Es sei die Grundlinie b eines solchen Dreiecks $= 345''$, wie groß ist die Hypothenuse c desselben?

Auflösung. Da nach No. 1 $c = b\sqrt{2} = 1{,}414.. \times b$, so multiplizirt man diese Zahl 1,414 durch $345''$, wodurch $c = 4{,}87830^{\circ}$ *) $= 4^{\circ}8'8''$ groß gefunden wird.

2. Es sei der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks $= 576^{\circ}$, wie groß ist die dazu gehörige Grundlinie b?

---

*) S. Anmerkung zum § 235.

Auflösung. Da nach No. 4 $b = \sqrt{2T} = 1,414.. \times \sqrt{T}$, so multiplizirt man die Zahl 1,414.. durch die $\sqrt{576°}$ d. i. durch 24°, welches zur Grundlinie $33,936° .. = 33° 9' 3'' 6'''$ giebt.

3. Wie groß ist aber die Grundlinie eines solchen Dreiecks, wenn die Hypothenuse $c = 36° 3'$ ist?

Auflösung. Da nach No. 2 $b = \frac{c\sqrt{2}}{2} = 0,707.. \times c$, so multiplizirt man diese Zahl 0,707 durch 36° 5', welches zum Resultate für die Grundlinie $b = 25,8055° ... = 25° 8'$ giebt.

§ 264.

Wird aus der Spitze eines solchen rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks eine senkrechte Linie nach der Hypothenuse gezogen, so theilt diese die Hypothenuse in zwei gleiche Theile. Wird demnach die senkrechte Linie $= h$ genannt, und behält die Hypothenuse ihre Benennung c, so ist $h = \frac{1}{2}c$; daher ist

1. $c = 2h$. Da nun nach § 260 No. 1 $c = b\sqrt{2}$ ist, so ist

2. $h = \frac{b\sqrt{2}}{2} = 0,707..b$ und

3. $b = \frac{2h}{\sqrt{2}} = \frac{2h\sqrt{2}}{2} = h\sqrt{2} = 1,414..h.$

§ 265.

Zusatz. Da $T = \frac{hc}{2}$ nach § 252, und

$c = 2h$, so ist

4. $T = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2$ und

5. $h = \sqrt{T}$.

§ 266.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist c, wenn $h = 3^\circ 8' 6''$ ist?
So ist $c = 2 \times 386'' = 7^\circ 7' 2$.

2. Wie groß ist h, wenn $b = 2^\circ 3'$ ist?
So ist $h = 0,707 \times 23' = 1,6261^\circ = 1^\circ 6' 3''$.

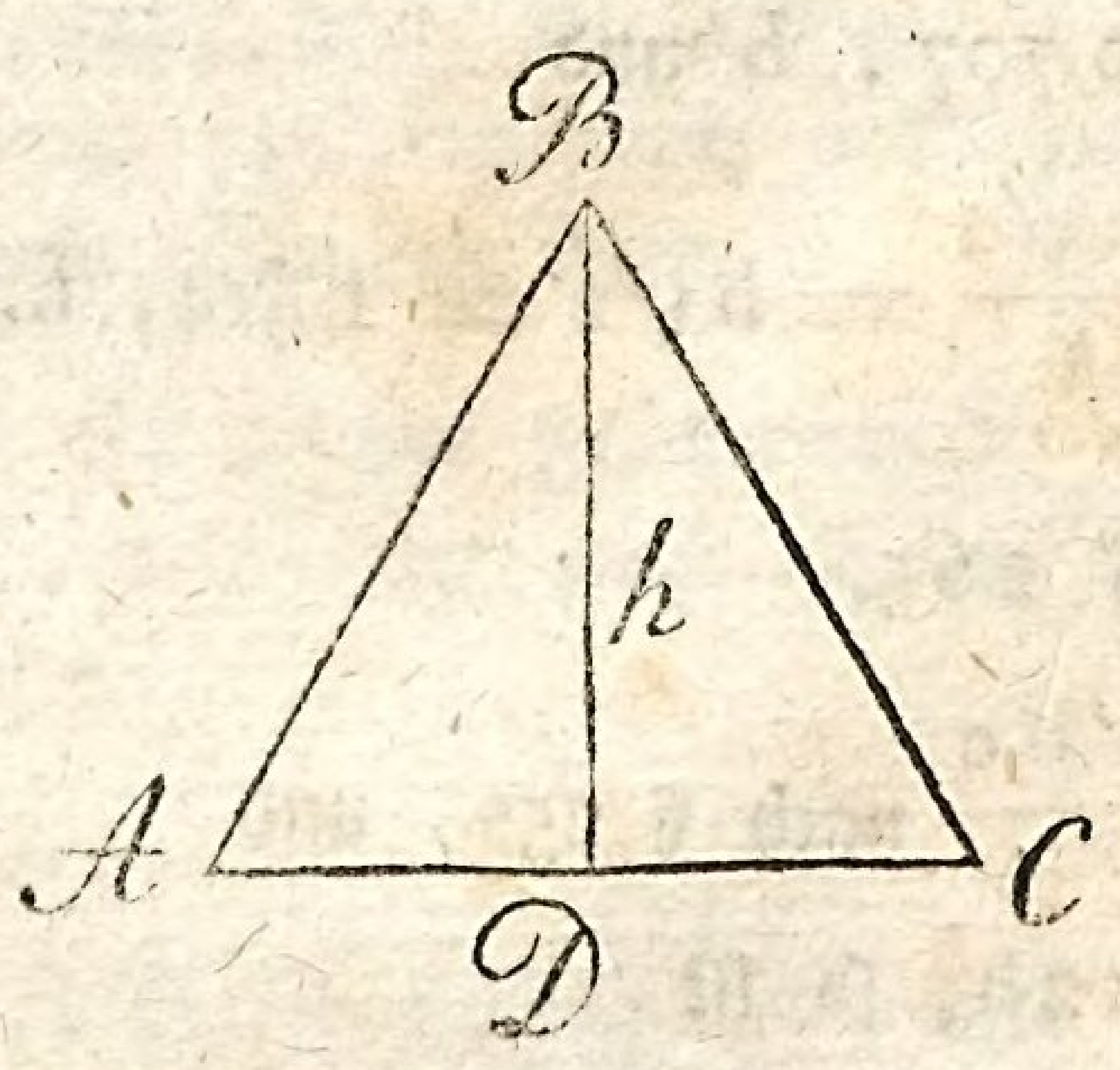
3. Wie groß ist b, wenn $h = 1^\circ 6' 2'' 6'''$ ist?
So ist $b = 1,414^\circ .. \times 1,626^\circ = 2,299164^\circ = 2^\circ 3'$.

4. Wie groß ist T oder der Flächeninhalt des Dreiecks, wenn $h = 2^\circ 3' 4''$ ist?
So ist $T = 234'' \times 234'' = 5,4756^\circ = 5^\circ 47' 56''$.

5. Wie groß ist h, wenn $T = 256 \square'$ ist?
So ist $h = \sqrt{256'} = 1^\circ 6'$.

C. Von dem gleichseitigen Dreiecke.

§ 267.



Wenn eines gleichseitigen Dreiecks ABC Seite AC = S, dessen Höhe BD = h, dessen Flächen-Inhalt = T, so ist

$$AB^2 = BD^2 + AD^2;$$ also
$$BD^2 = AB^2 - AD^2,$$ oder
$$h^2 = S^2 - \tfrac{1}{4}S^2 = \tfrac{3}{4}S^2.$$ Folglich

1. $h = \sqrt{\tfrac{3}{4}S^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3S^2} = \tfrac{1}{2}S\sqrt{3} = \frac{1,732050}{2} \times S = 0.866025..S.$

2. $S = \sqrt{\tfrac{4}{3}h^2} = \frac{\sqrt{4h^2}}{\sqrt{3}} = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3} = 1,1547..h.$

§ 268.

Zusatz. Da $T = \tfrac{1}{2}Sh = \tfrac{1}{2}S \times \tfrac{1}{2}S\sqrt{3}$, so ist

3. $T = \tfrac{1}{4}S^2\sqrt{3} = 0,4330 \ldots S^2$; also

$$S^2 = \frac{4T}{\sqrt{3}}$$

$$S^4 = \frac{16T^2}{3};$$ und

4. $S = \sqrt[4]{\frac{16T^2}{3}} = \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2\sqrt{T \cdot 3^3}}{\sqrt[4]{3 \cdot 3^3}}$

$$= \frac{2\sqrt{T} \times \sqrt{27}}{3} = 1,51967..\sqrt{T}.$$

§ 269.

Es ist $T = \tfrac{1}{2}Sh$

$$= \tfrac{1}{2}h \times \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$ Daher

5. $T = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} = 0,57735 .. h^2$

und $T^2 = \frac{h^4}{3}$; folglich

$3T^2 = h^4$, und

6. $h = \sqrt[4]{3}\sqrt{T} = 1{,}3160\ldots\sqrt{T}$.

§ 270.

Bei diesem Dreiecke kann man demnach durch Berechnung finden:

I. Die Höhe h
  1. aus der Seite S nach No. 1;
  2. aus dem Inhalte T nach No. 6.

II. Die Seite S
  1. aus der Höhe h nach No. 2;
  2. aus dem Inhalte T nach No. 4.

III. Den Flächeninhalt F
  1. aus der Höhe h nach No. 5;
  2. aus der Seite S nach No. 3.

§ 271.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wenn der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, also $T = 35^\circ$ ist, wie groß ist alsdann
  1. die Seite S }
  2. die Höhe h } ?

So ist nach No. 4. $S = 1{,}5197\ldots \times \sqrt{35^\circ} = 8{,}981427^\circ$
$= 8^\circ 9' 8''$.
und nach No. 6. $h = 1{,}316 \times \sqrt{35^\circ} = 7{,}77756^\circ$
$= 7^\circ 7' 7'' 8'''$.

2. Wenn die Seite S eines solchen Dreiecks = $8^\circ 9' 8''$ ist, wie groß ist alsdann

1. der Flächeninhalt T }
2. die Höhe h } ?

So ist nach No. 3. $T = 0,433 \ldots 898^2 = 35,027 \ldots$
$= 35^\circ$

und nach No. 1. $h = 0,866 \times 898 = 7,776 \ldots$
$= 7^\circ 7' 7'' 6'''$.

3. Wenn die Höhe $h = 7^\circ 7' 8''$ ist, wie groß ist alsdann

1. die Seite S }
2. der Inhalt T } ?

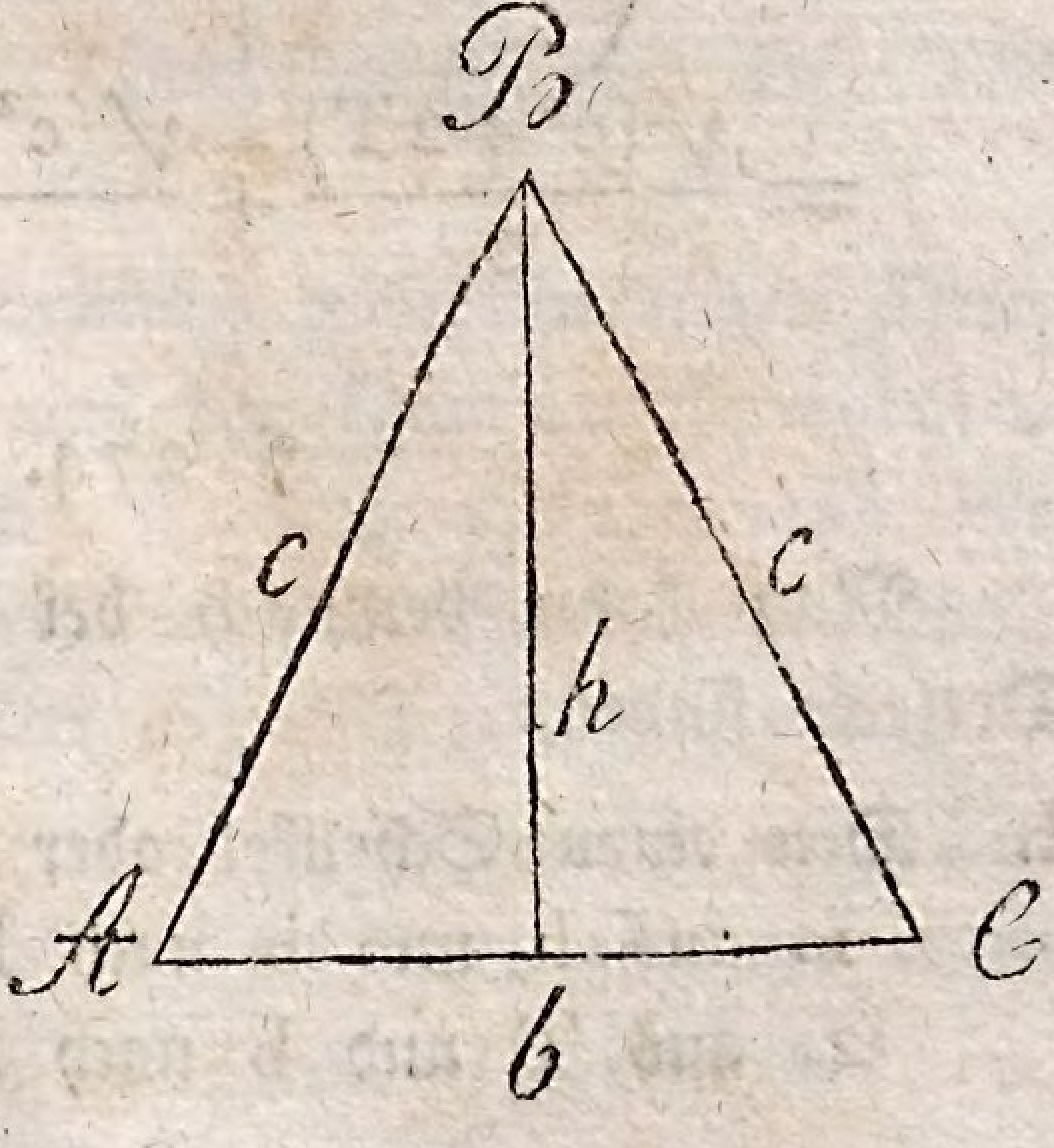
So ist nach No. 2. $S = 1,1547 . \times 778'' = 8,983^\circ \ldots$
$= 8^\circ 9' 8''$.

So ist nach No. 5. $T = 0,577 \ldots \times 778^2 = 34.924^\circ \ldots$
$= 35 \square^\circ$.

D. Von dem gleichschenkligen Dreiecke.

§ 272.

Wenn der Flächen-Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks $= T$, dessen Schenkel $AB = BC = c$, die Grundlinie $AC = b$, die Höhe $Bb = h$ ist; so ist $c^2 = h^2 + \frac{1}{4} b^2$.



Daher 1. $c = \sqrt{(h^2 + \frac{1}{4}b^2)} = \sqrt{\frac{(4h^2 + b^2)}{4}}$

$$= \frac{\sqrt{(4h^2 + b^2)}}{2} = \frac{\sqrt{((2h+b)^2 - 4hb)}}{2}.$$

2. $b = \sqrt{(4c^2 - 4h^2)} = 2\sqrt{(c^2 - h^2)}$

$$= 2\sqrt{(c+h)} \cdot \sqrt{(c-h)}.$$

3. $h = \frac{\sqrt{(4c^2 - b^2)}}{2} = \frac{\sqrt{(2c+b)} \cdot \sqrt{(2c-b)}}{2}.$

§ 273.

Zusatz. Da $T = \frac{bh}{2}$ ist, so ist

4. $T = \frac{b}{2} \times \frac{\sqrt{(4c^2 - b^2)}}{2} = \frac{b}{4}\sqrt{(2c+b)} \cdot \sqrt{(2c-b)}.$

5. $c = \sqrt{\left(\frac{4T^2}{b^2} + \frac{b^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\left(\frac{2T}{b} + \frac{b}{2}\right)^2 - 2T.\right)}$

6. $b = \sqrt{(2c^2 \mp \sqrt{(4c^4 - 16T^2)})}$

$$= \sqrt{(c^2 + 2T)} \mp \sqrt{(c^2 - 2T)}.$$

7. $h = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} \mp \sqrt{\left(\frac{c^4}{4} - T^2\right)}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{(c^2 + 2T)}}{2} \mp \frac{\sqrt{(c^2 - 2T)}}{2}.$$

§ 274.

Man kann demnach bei dem gleichschenkligen Dreiecke finden:

I. Den einen Schenkel oder c
   1. aus h und b nach No. 1;
   2. aus T und b nach No. 5.

II. Die Grundlinie oder b

1. aus h und c nach No. 2;
2. aus T und c nach No. 6.

III. Die Höhe oder h

1. aus c und b nach No. 3;
2. aus c und T nach No. 7.

IV. Den Inhalt oder T

1. aus b und h;
2. aus b und c nach No. 4.

Diese Sätze mit Beispielen zu versehen, da ich zu den vorhergehenden ähnlichen Sätzen solche genug gegeben habe, halte ich für überflüssig.

§ 275.

Nach dem § 252 wird demnach der Inhalt eines jeden beliebigen Dreiecks aus der Grundlinie und Höhe gefunden. Indessen kann dieser

1. Bei dem rechtwinkligen Dreiecke nach dem § 257, auch aus der Hypothenuse und der einen Cathete;

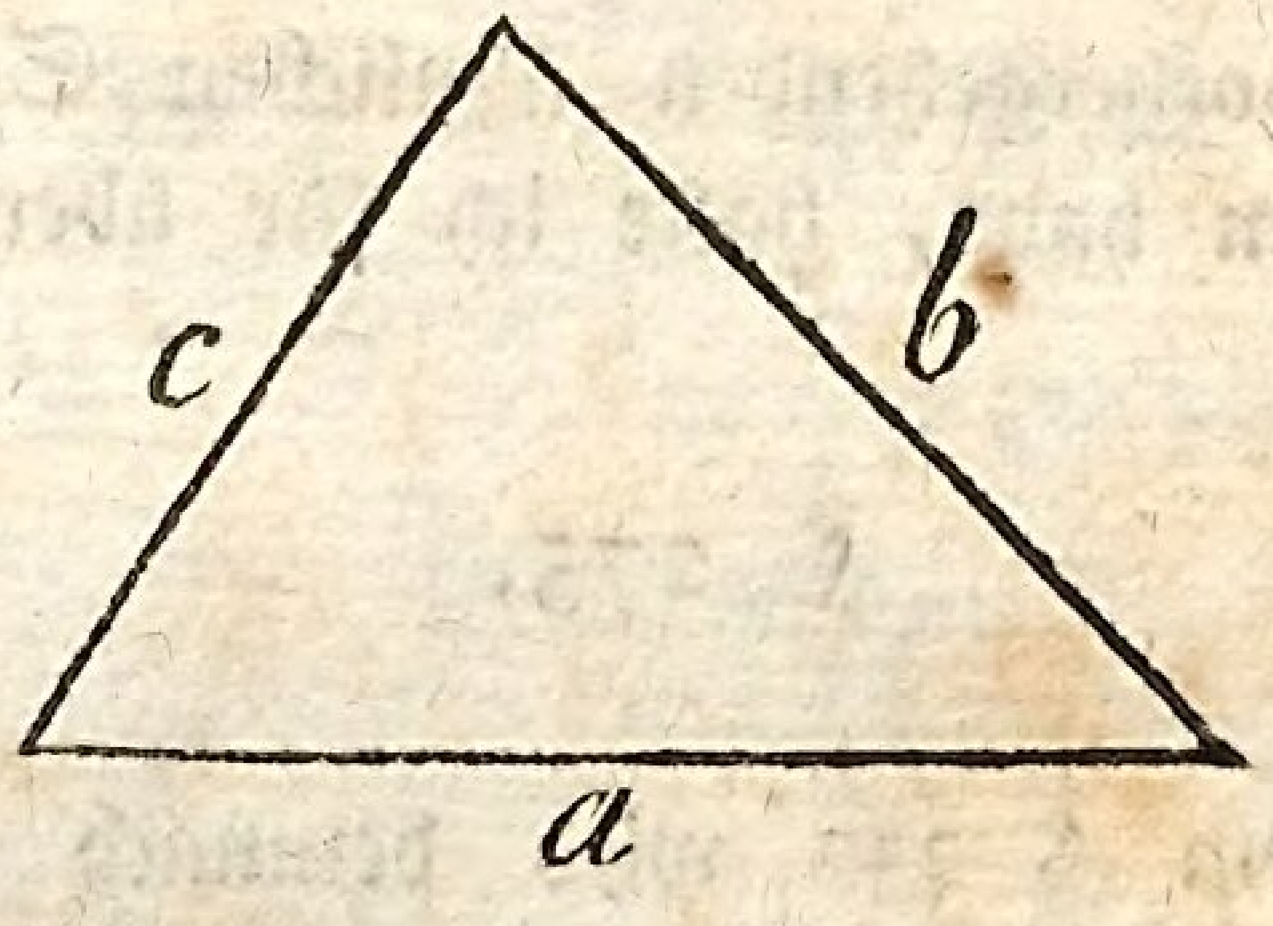
2. Bei dem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke nach dem § 260 aus der Hypothenuse allein, und nach § 264 No. 4 auch allein aus der senkrechten Linie, welche von der Hypothenuse nach der Spitze eines solchen Dreiecks gezogen wird;

3. Bei dem gleichseitigen Dreiecke nach den Paragraphen 268 und 269, sowol aus der einen Seite, wie auch aus der Höhe allein, und

4. Bei dem gleichschenkligen Dreiecke nach § 273, aus dem einen Schenkel und der Grundlinie gefunden werden.

5. Bei den ungleichseitigen und überhaupt bei allen Dreiecken wird aber auch solcher aus der Summe aller drei Seiten und deren Differenz hergeleitet, indem der Inhalt eines jeden Dreiecks oder T, wenn a, b und c die Seiten desselben sind, und S die Summe dieser Seiten bedeutet,

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}S.(\tfrac{1}{2}S - a).(\tfrac{1}{2}S - b).(\tfrac{1}{2}S - c)} \text{ ist.}$$



§ 276.

Beispiel zu No. 5 zur Erläuterung:

Es sei $a = 206''$, $b = 178''$ und $c = 146''$

so ist $a + b + c = 206'' + 178'' + 146 = 530''$

daher $\tfrac{1}{2}S = \tfrac{530}{2} = 265''$

also $\tfrac{1}{2}S - a = 265'' - 206'' = 59''$

$\tfrac{1}{2}S - b = 265'' - 178'' = 87''$

$\tfrac{1}{2}S - c = 265'' - 146'' = 119''$.

Daher $\tfrac{1}{2}S \times (\tfrac{1}{2}S - a).(\tfrac{1}{2}S - b).(\tfrac{1}{2}S - c)$

$= 265.59.87.119 = 161869155.$

$\sqrt{(\tfrac{1}{2}S \times (\tfrac{1}{2}S - a).(\tfrac{1}{2}S - b).(\tfrac{1}{2}S - c)} = \sqrt{161869155}.$

Also $\triangle abc = 1^{\circ}\,27'\,22\square''$.

Dieses Resultat weicht von dem, welches aus der Grundlinie und der halben Höhe gefunden wird und $= 1^\circ 27' 72 \square''$ ist, sehr wenig ab. Um dieses beweisen zu können, so theile man

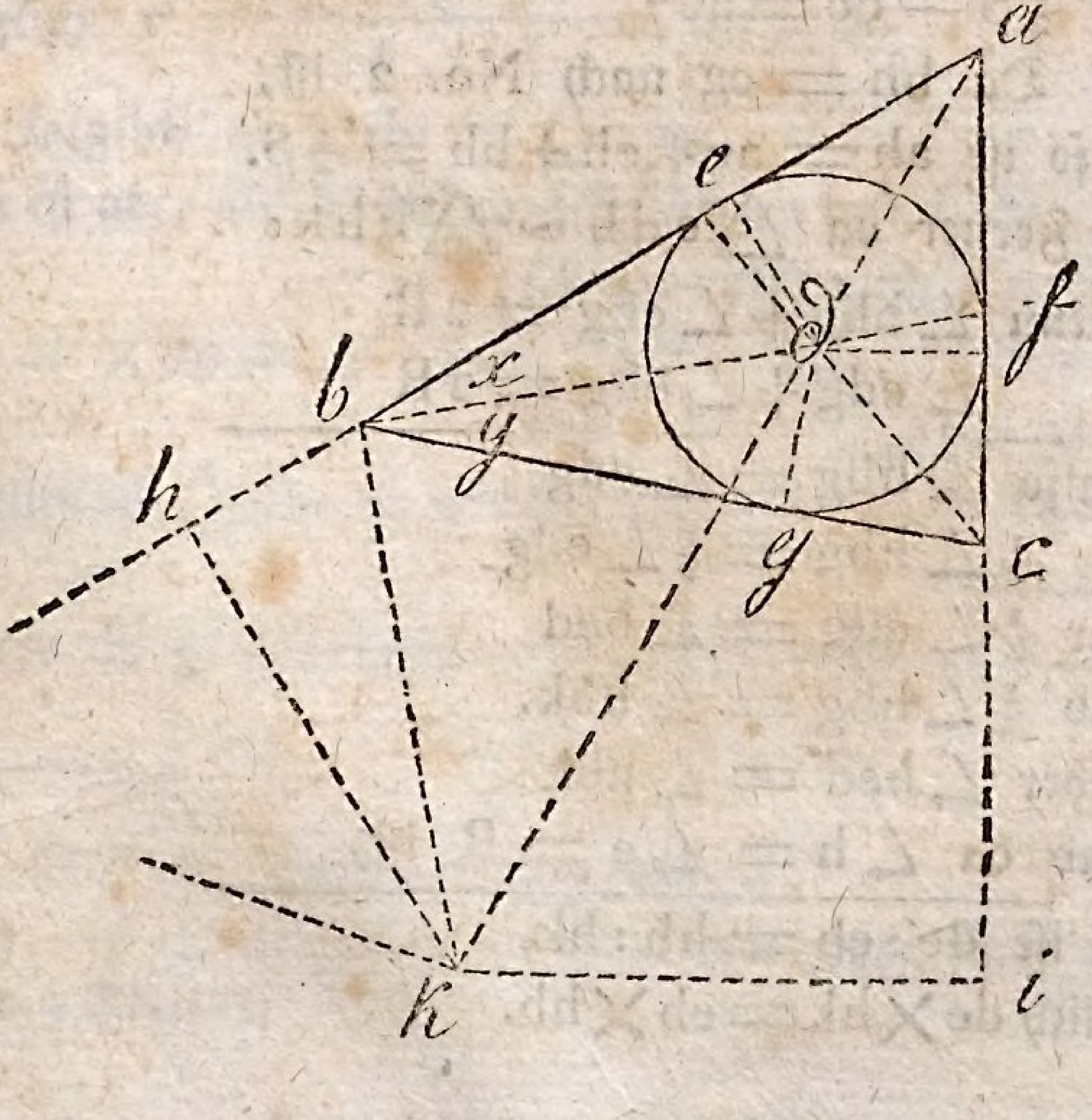
1. Jeden Winkel des $\triangle$ abc in zwei gleiche Theile, so daß x = y sei u. s. w.

2. Ziehe man aus dem Vereinigungspunkte der Theilungslinien einen Kreis, welcher die Seiten des $\triangle$ abc in e, f und g berührt, und lasse

3. aus dem Mittelpunkte d senkrechte Linien de, dg und df nach den Seiten des $\triangle$ abc hinfallen. Hierauf

4. verlängere man die Seite ab, und mache bh = gc. Und endlich

5. errichte man in h einen rechten Winkel bhk, und mache den $\angle$ hbk = $\angle$ bde.



Wenn nun $S =$ der Summe der Seiten des Dreiecks abc ist, so ist $S = ab + bc + ac = ae + eb + bg + gc + cf + af$.

Da nun 1. $\triangle bdg \cong \triangle bde$ ist, so ist $bg = be$.
2. $\triangle aed \cong \triangle adf$ — — $ae = af$.
3. $\triangle gdc \cong \triangle dfc$ — — $gc = cf$.

Folglich ist $S = 2ae + 2be + 2cg = 2(ae + be + cg)$

also I. $\frac{1}{2} S = ae + eb + cg = \frac{ab + bc + ac.}{2}$

II. Daher ist $\frac{1}{2} S - (ae + eb) = cg$.
$\frac{1}{2} S - (eb + cg) = ae$
und $\frac{1}{2} S - (ae + cg) = eb$.

Und da $ae + be = ab$
$be + cg = bc$
$ae + gc = ac$ ist; So ist

III. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} S - ab = cg \\ \frac{1}{2} S - ac = eb \\ \text{und } \frac{1}{2} S - bc = ae \end{array}\right\}$ nach No. 1.

IV. Da $bh = cg$ nach No. 2 ist,
so ist $ah = ae + eb + bh = \frac{1}{2} S$.

V. Ferner da $\triangle edb \sim \triangle bhk$:

Denn $\angle hbg + \angle ebg = 2R$
$\angle edg + \angle ebg = 2R$

also $\angle hbg = \angle edg$
$\frac{1}{2} \angle hbg = \frac{1}{2} \angle edg$
aber $\frac{1}{2} \angle edg = \angle bed$
und $\frac{1}{2} \angle hbg = \angle hbk$.
Daher $\angle bed = \angle hbk$
und da $\angle h = \angle e = R$ ist,

so ist $de : eb = hb : hk$.

Folglich $de \times hk = eb \times hb$.

Daher ist VI. $de^2 : de \times hk = de^2 : eb \times hb$
oder $de^2 : eb \times hb = de^2 : de \times hk$
$= de : hk.$
Aber es verhält sich $de : hk = ae : ah$ *)
folglich $de^2 : eb \times hb = ae : ah$
daher $de^2 \times ah = ae \times eb \times bh.$
Also ist VII. $de^2 \times ah^2 = ae . eb . bh . ah.$
Nun ist aber $ah . ae . eb . bh = \frac{1}{2} S . (\frac{1}{2} S - bc)$
$. (\frac{1}{2} S - ac) . (\frac{1}{2} S - ab).$
Folglich ist VIII. $de^2 . ah^2 = \frac{1}{2} S . (\frac{1}{2} S - bc)$
$. (\frac{1}{2} S - ac) . (\frac{1}{2} S - ab)$
Das $\triangle abc = \triangle adb + \triangle bdc + \triangle adc.$
Aber $\triangle adb + \triangle bdc + \triangle adc = \frac{1}{2} r$ **) $. ab + \frac{1}{2} r$
$. ac + \frac{1}{2} r . bc.$
Also ist auch $\triangle abc = \frac{1}{2} r (ab + ac + bc).$
Es ist aber $\dfrac{ab + ac + bc}{2} = \frac{1}{2} S = ah$ nach I und IV.
Folglich $r \dfrac{(ab + ac + bc)}{2} = ah \times de$
und folglich $ah \times de = \triangle abc.$
Nun ist aber $ah^2 \times de^2 = \frac{1}{2} S (\frac{1}{2} S - bc) . (\frac{1}{2} S - ac)$
$. (\frac{1}{2} S - ab)$ nach No. VIII.
und $ah \times de = \sqrt{} (\frac{1}{2} S . (\frac{1}{2} S - bc) . (\frac{1}{2} S - ac)$
$. (\frac{1}{2} S - ab).$
Folglich ist $\triangle abc = \sqrt{} (\frac{1}{2} S . (\frac{1}{2} S - bc) . (\frac{1}{2} S - ac)$
$(\frac{1}{2} S - ab)$
oder $= \sqrt{} \frac{1}{2} S . (\frac{1}{2} S - a) . (\frac{1}{2} S - b) . (\frac{1}{2} S - c).$

---

*) Weil de parallel mit hk ist.

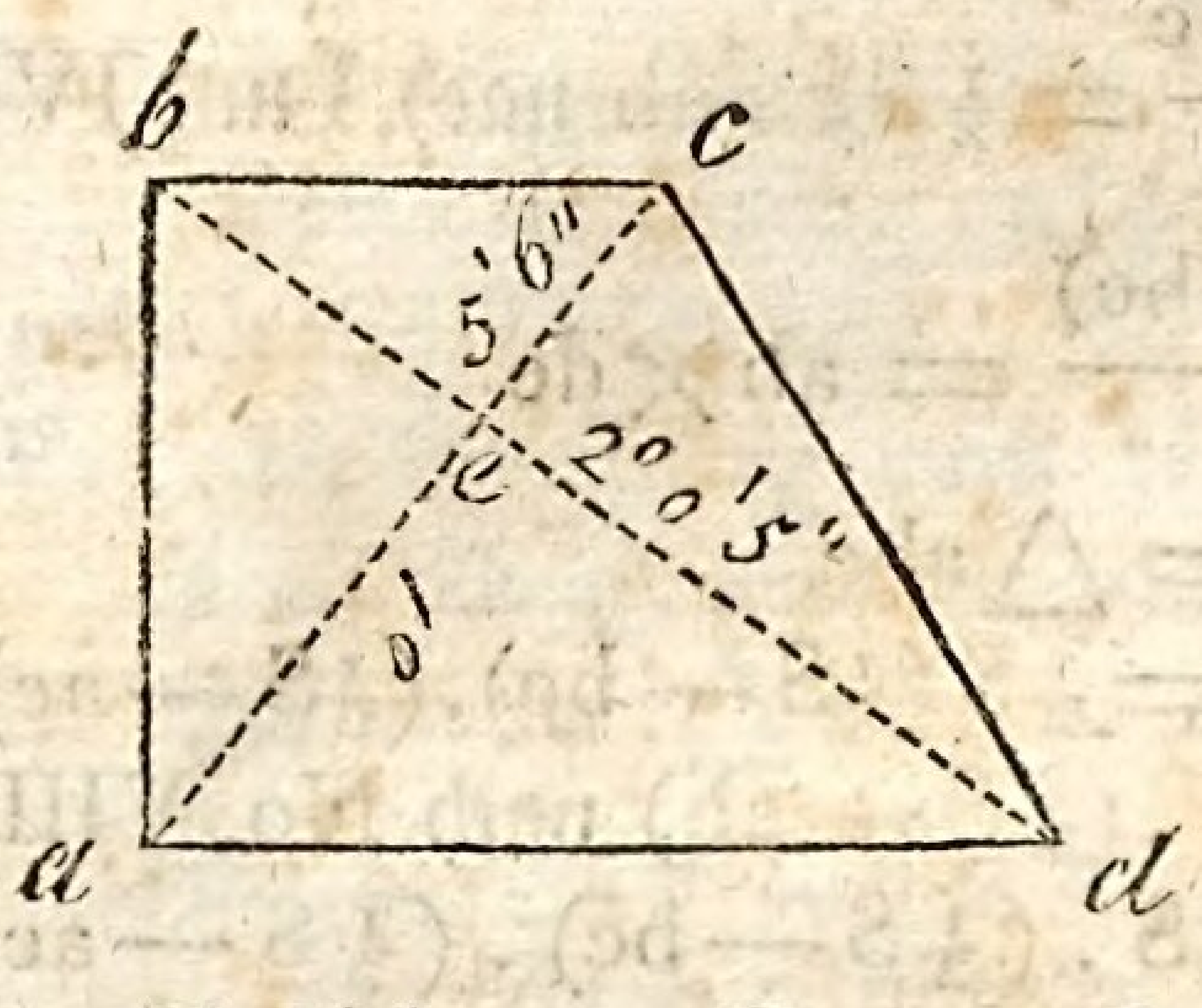
**) r ist = de = dg = df = der Höhe eines jeden dieser 3 Dreiecke.

Von dem Trapezium und Trapezoides.

§ 277.

Da jede von diesen beiden Figuren durch eine Diagonallinie in zwei ungleiche Dreiecke eingetheilt wird, so muß man, wenn von einer solchen Figur der Flächeninhalt berechnet werden soll, 1. solche in zwei Dreiecke eintheilen, hierauf 2. von einem jeden Dreiecke den Flächeninhalt suchen, und 3. die Inhalte von beiden zusammen addiren.

§ 278.



Aufgabe. Wie groß ist der Flächeninhalt von diesem Trapez. abcd?

Auflösung. Man messe 1. die Länge von bd $= 205''$ und ce $= 56''$ und 2. man multiplizire die beiden Zahlen durch einander und dividire ihr Produkt durch 2.

Es ist demnach bd $= 205''$
ce $= 56''$
11480
2)
So ist $\triangle$ bcd $= 5740''$.

Eben so verfahre man mit dem $\triangle$ abd.

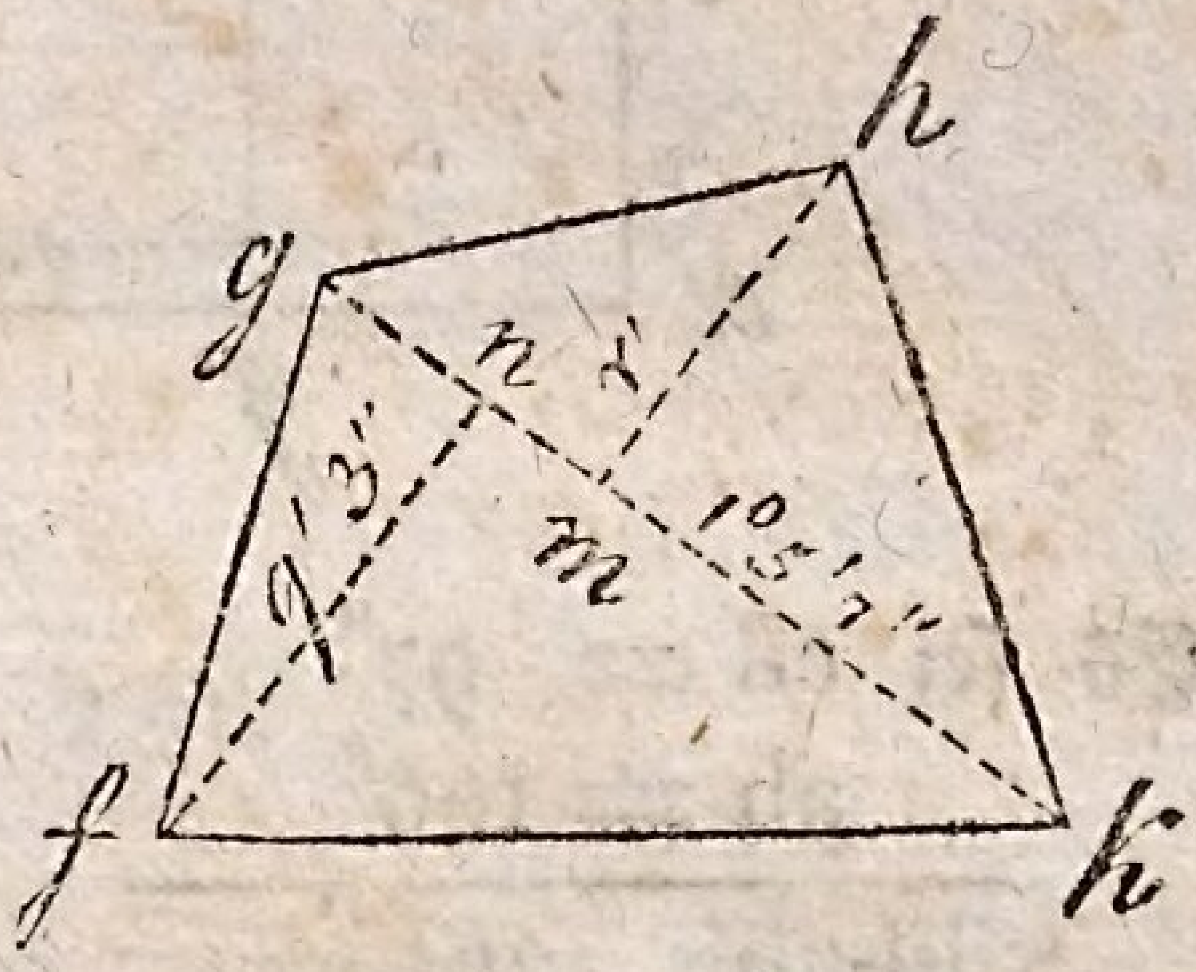
$$\begin{array}{r} \text{Es ist } bd = 205'' \\ \text{und } ae = 1^{\circ} \\ \hline 20500'' \\ 2) \overline{} \end{array}$$

also $\triangle$ adb = 10250″.

Da nun $\triangle$ bdc = 5740″ ist, so ist der Flächeninhalt des Trap. abcd = 1° 59′ 90 □″.

§ 279.

Wie groß ist der Flächeninhalt von dem Trapezoides fghk?



$$\begin{array}{r} \text{Es sei } gk = 157'' \\ fn = 93'' \\ \hline 14601'' \\ 2) \overline{} \end{array}$$

Also $\triangle$ fgk = 73′ 00″

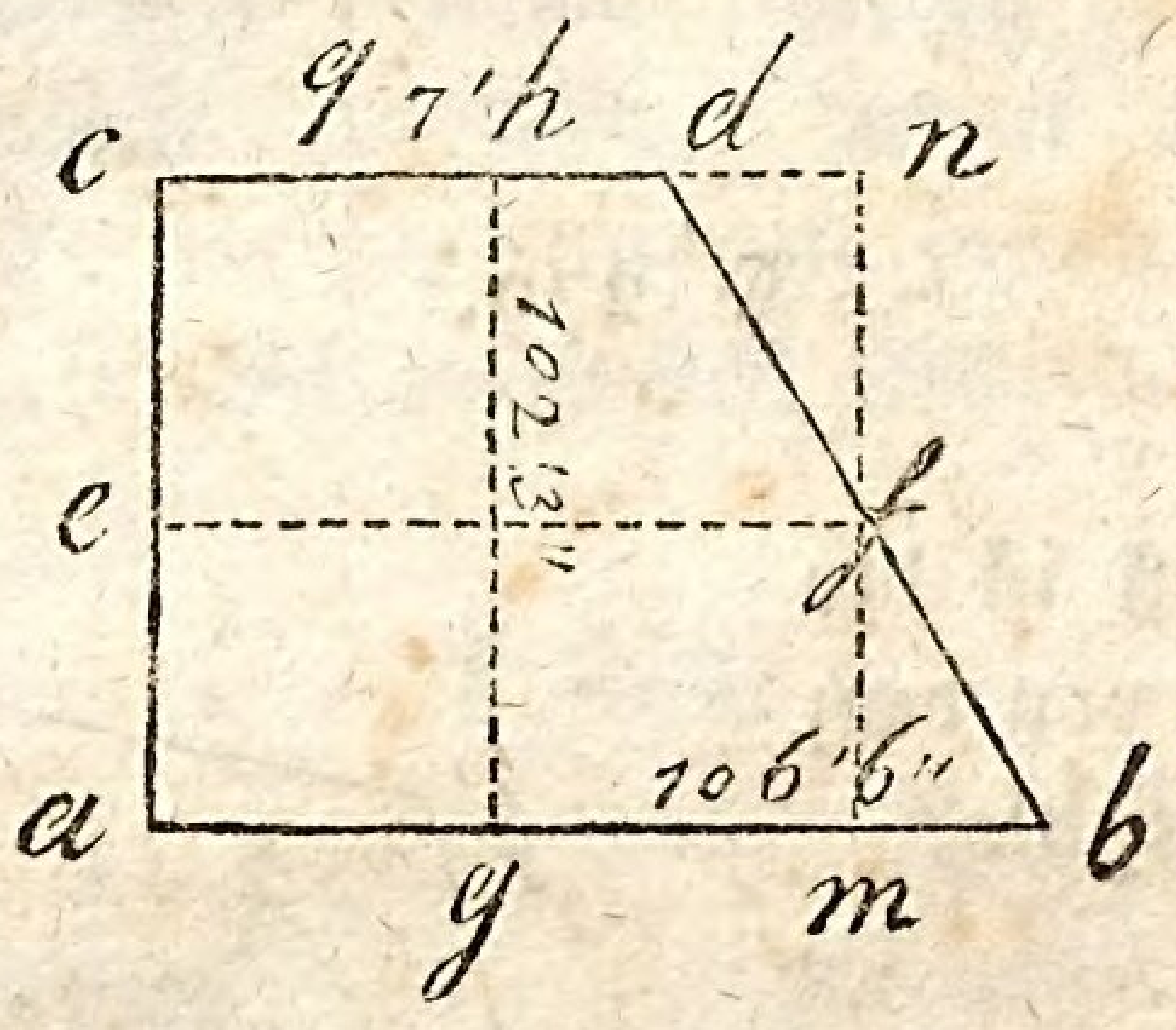
$$\begin{array}{r} \text{Ferner ist } gk = 157'' \\ km = 70'' \\ \hline 10990 \\ 2) \overline{} \end{array}$$

Also $\triangle$ ghk = 5495″.

Folglich Trap. fghk = 1° 27′ 95 □″.

§ 280.

Zusatz. Da bei dem Trapezium zwei Seiten parallel sind, so kann man den Flächeninhalt desselben noch auf eine andere Art berechnen, indem man die mittlere arithmetische Proportionallinie zwischen den beiden Parallelseiten sucht, und solche durch die Höhe der Figur multiplizirt.



Es sei cd = 97''
ab = 166''

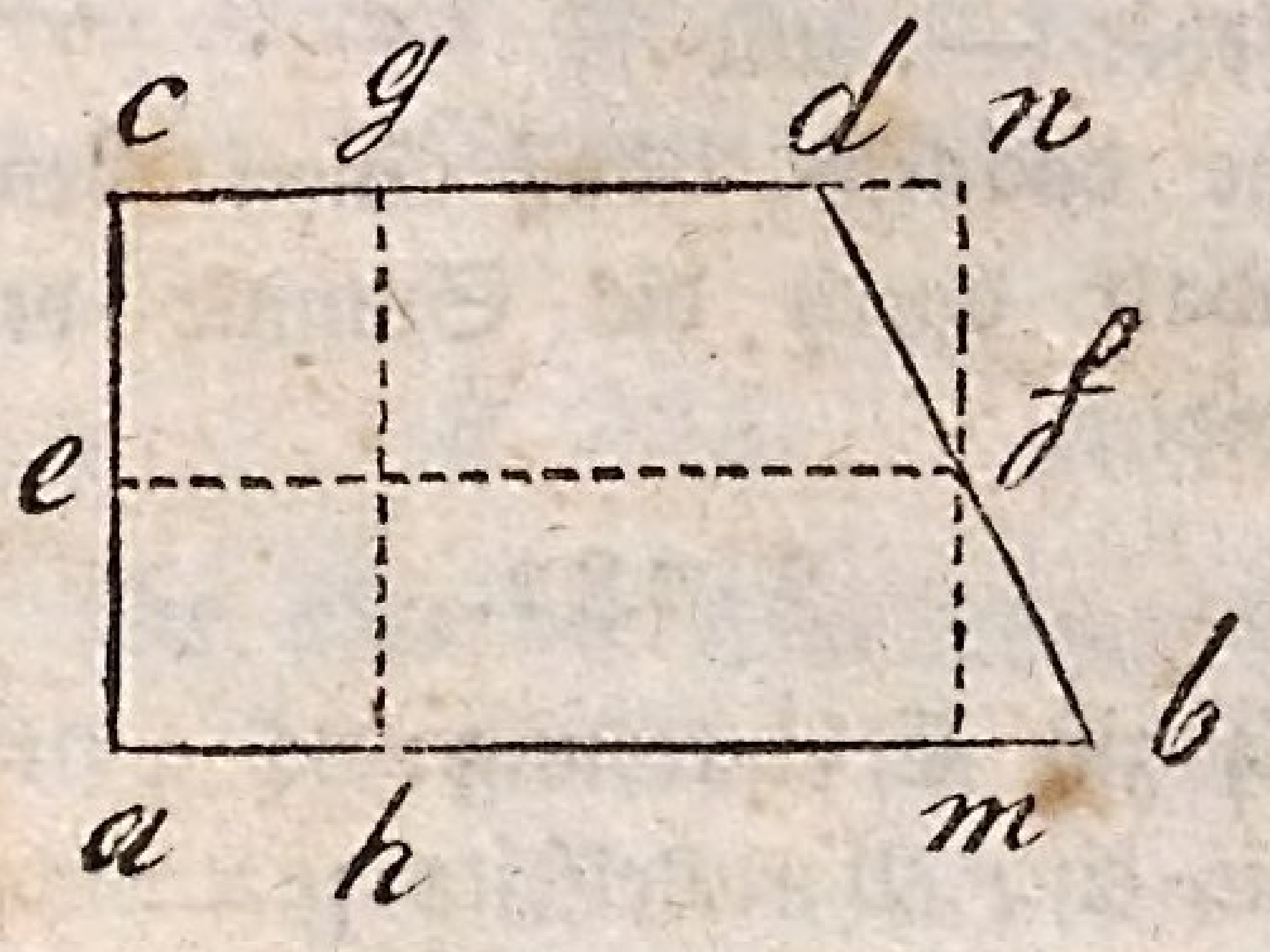
so ist $\frac{cd+ab}{2} = \frac{263''}{2} = 131'' = ef.$

= der mittlern arithmetischen Proportional-Linie.

Daher ef × gh = 131'' × 123 = 1° 61' 13 □''
= Flächeninhalt des Trapez. a b d c, welcher von dem im § 278 wenig abweicht, und weit leichter zu berechnen ist.

Beweis. Da die Seite db durch die Linie ef, welche parallel mit cd gezogen ist, in zwei gleiche Theile getheilt wird, so ist das △ dfn ≅ △ fmb,

von welchen das Dreieck dfn außerhalb an das Trapezium angesetzt, und dieses Dreieck fmb innerhalb von demselben weggenommen wird; daher ist Trapez. abcd = dem Rektangel amnc. Und da der Flächeninhalt von diesem dadurch gefunden wird, daß man am = ef durch mn = gh multiplizirt, so muß auch der Flächeninhalt des Trapez. abcd = dem Produkte von ef×hg sein.



§ 281.

Zusatz. Ist ab = P, cd = p, gh = h, der Flächeninhalt des Trapeziums = T, so ist

1. $T = \frac{P+p}{2} \times h.$

2. $P = \frac{2T}{h} - p.$

3. $p = \frac{2T}{h} - P.$

4. $h = \frac{2T}{P+p}.$

Man findet demnach von einem Trapezium

1. Den Inhalt dadurch, daß man die beiden Parallelseiten addirt, ihre Summe durch 2 dividirt und den Quotienten davon durch die Höhe der Figur dividirt.
2. Jede von den Parallelseiten dadurch, daß man den Flächeninhalt der Figur doppelt nimmt, hierauf dieß Produkt durch die Höhe dividirt, und von dem Quotienten die bekannte Parallelseite abziehet — und
3. die Höhe dadurch, daß man den doppelten Flächeninhalt durch die Summe der Parallelseiten dividirt.

§ 282.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wenn die eine Parallelseite $p = 24'$, die andere Parallelseite $P = 36'$, und die Höhe $h = 15'$ ist, wie groß ist der Flächeninhalt T?

So ist $T = \left(\frac{P+p}{2}\right) h = \frac{(36+24')\times 15}{2} = 30 \times 15$
$= 450\square'$.

2. Wenn der Flächeninhalt $T = 450\square'$, die Höhe $h\ 15'$, und die eine Parallelseite $p = 24'$ ist, wie groß ist die andere P?

So ist $P = \frac{2T}{h} - p = \frac{2 \cdot 450'}{15'} - 24' = 60' - 24 = 36'$.

3. Wenn der Flächeninhalt $T = 450\square'$, die eine Parallelseite $p = 24'$ und die andere $P = 36'$ ist, wie groß ist h?

So ist $h = \frac{2T}{p+P} = \frac{2 \cdot 450'}{24436'} = \frac{900'}{60'} = 15$.

Von den Vielecken.

§ 283.

Da jedes Vieleck auf eine doppelte Art 1. aus der Mitte und 2. aus einem beliebigen Winkel in Dreiecke eingetheilt werden kann, so muß auch der Flächeninhalt desselben dadurch gefunden werden, daß man jedes Dreieck für sich berechnet, und die Inhalte von allen zusammen addirt.

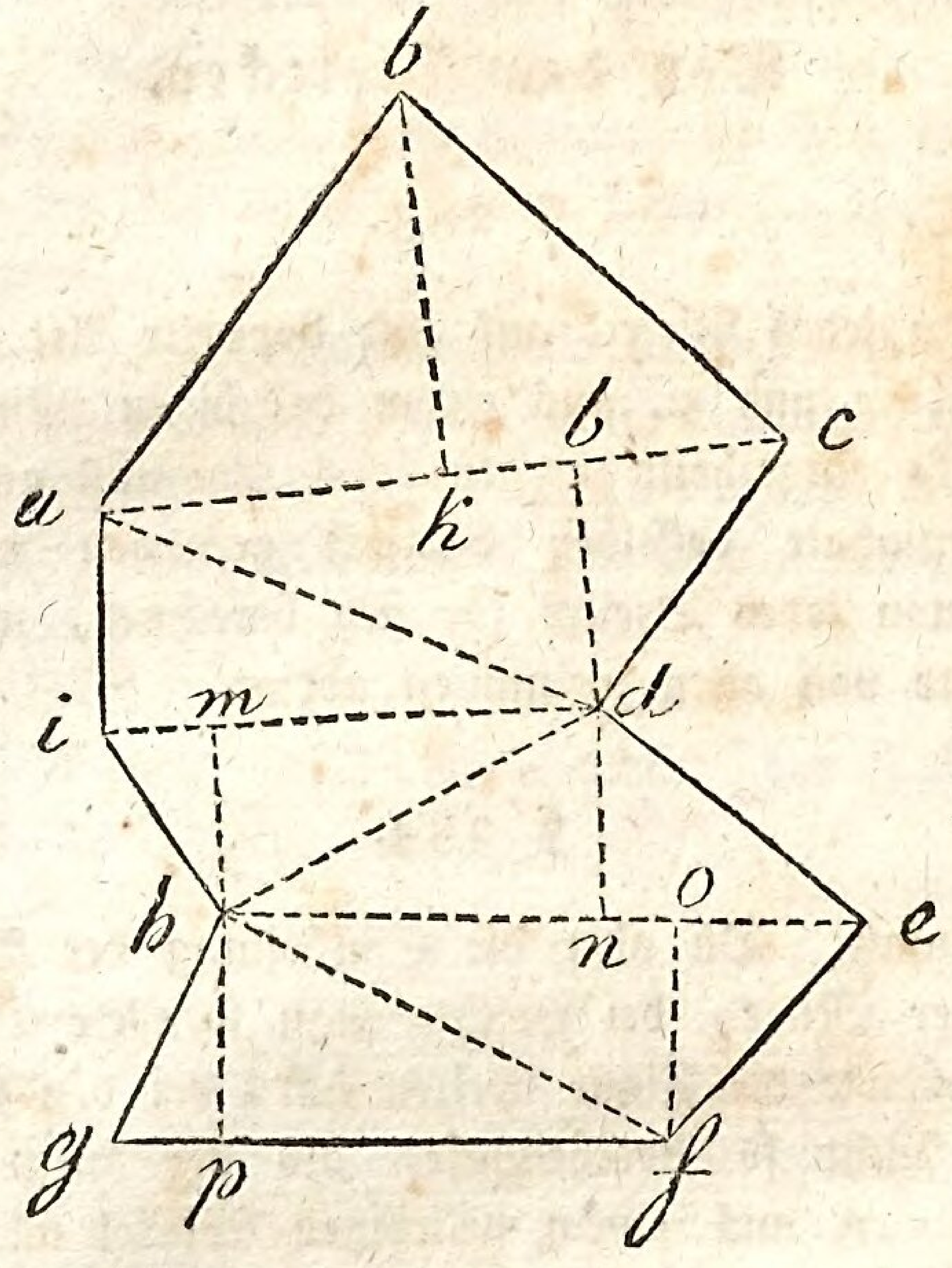
§ 284.

Zusatz. Da aber die Eintheilung der Vielecke aus der Mitte, bei welcher man so viele Dreiecke erhält, wie die Figur Seiten hat, bei den irregulären nicht so vortheilhaft, als die durch Diagonallinien aus einem beliebigen Winkel nach den gegenüberstehenden Winkeln ist, indem man bei dieser Eintheilung zwei Dreiecke weniger, als die Figur Seiten hat, erhält und also auch 2 Dreiecke weniger zu berechnen hat, so pflegt man diese Art gewöhnlich zu wählen, und darnach die irregulären Vielecke zu berechnen.

§ 285.

Beispiel zur Erläuterung:
Es ist demnach dieß irreguläre Neuneck abcdefghi in 7 Dreiecke durch die Diagonalen ac, ad, di, dh, he und hf eingetheilt worden.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)



Von diesen enthält:

die Linie ac = 225″
× bk = 127″
dividirt durch 2)
also 1. △ abc = 14287″.

Die Linie ac = 225″
× bd = 39″
2)
2. △ acd = 8775″.

Die Linie di = 164″
× ia = 37″
2)
3. △ adi = 6068″.

$$\begin{array}{rl} \text{Die Linie } di & = 164'' \\ \times hm & = 61'' \\ \hline 2) \quad 4.\ \triangle dhi & = 5002''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Die Linie } eh & = 214'' \\ \times dn & = 71'' \\ \hline 2) \quad 5.\ \triangle dhe & = 7597''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Die Linie } eh & = 214'' \\ \times of & = 34'' \\ \hline 2) \quad 6.\ \triangle hef & = 7276''. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Die Linie } fg & = 187'' \\ \times hp & = 73'' \\ \hline 2) \quad 7.\ \triangle hfg & = 6825''. \end{array}$$

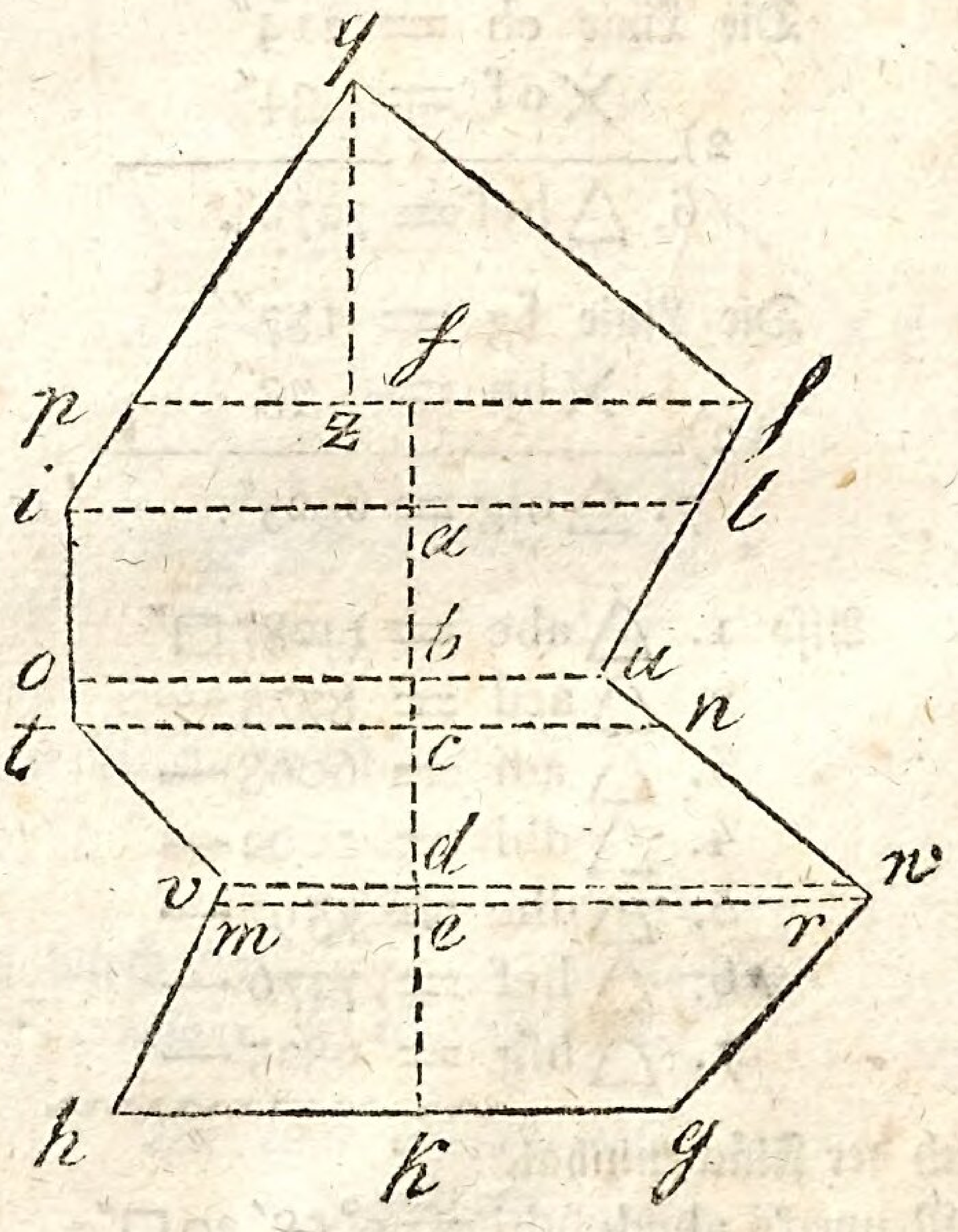
$$\begin{array}{lll} \text{Also } 1. & \triangle abc & = 14287\,\square'' \\ 2. & \triangle acd & = 8775 \text{ —} \\ 3. & \triangle adi & = 6068 \text{ —} \\ 4. & \triangle dhi & = 5002 \text{ —} \\ 5. & \triangle dhe & = 7597 \text{ —} \\ 6. & \triangle hef & = 7276 \text{ —} \\ 7. & \triangle hfg & = 6825 \text{ —} \end{array}$$

Folglich der Flächeninhalt
des Neunecks abcdefghi $= 5^\circ 58' 30\,\square''$.

§ 286.

Der Flächeninhalt dieses Vielecks, wie auch der jedes andern Vielecks kann auch dadurch ge-

funden werden, daß man mit der Grundlinie Parallellinien durch jeden Winkel der Figur ziehet, wodurch dieselbe in sechs Trapezien und in ein Dreieck eingetheilt wird. Ist dieses geschehen, so wird jedes Trapezium für sich berechnet, die Inhalte von allen werden zusammen addirt und zu ihrer Summe wird der Inhalt des übrig gebliebenen Dreiecks hinzugelegt.



So ist ps = 202″
il = 205″

2) 407 = 203″
× af = 34″

1. Trap. psli = 7202 □″

il = 205″
ou = 174″

2) 379 = 189″
× ab = 56″

2. Trap. ilou = 10584 □″

ou = 174″
tn = 192″

2) 366 = 183″
× bc = 15″

3. Trap. outn = 2745 □″

tn = 192″
vw = 211″

2) 403 = 201″
× cd = 53″

4. Trap. tnvw = 10653 □″

vw = 211″
mr = 217″

2) 428 = 214″
× de = 5″

5. Trap. vwmr = 1070 □″

mr = 217″
hg = 184″

2) 401 = 200″
× ek = 70″

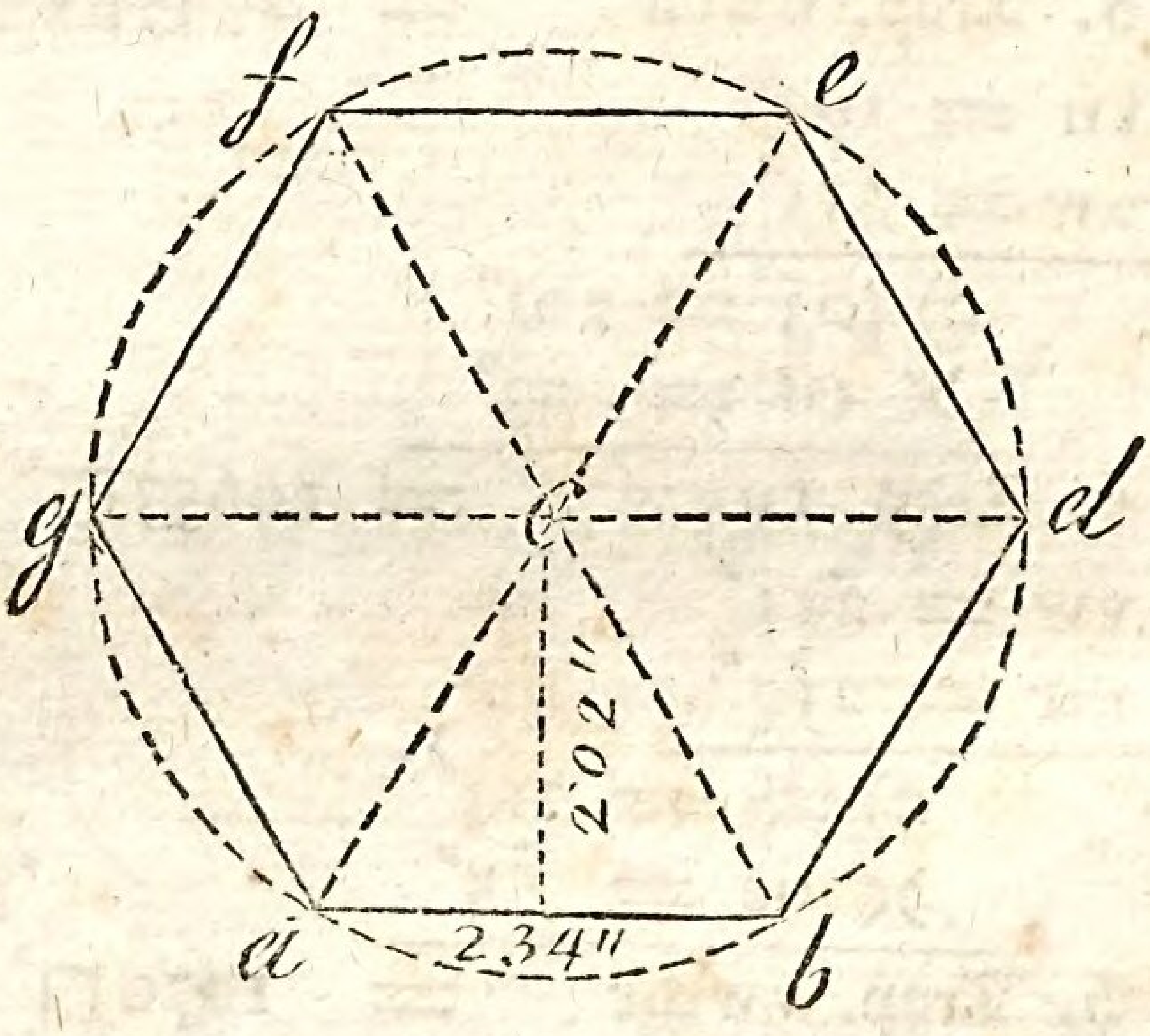
6. Trap. mrhg = 14000 □″.

Flächeninhalt aller 6 Trap. = 4° 62′ 54 □″
\+ △ pqs = 1° 07′ 06 □″

Also der ganze Flächeninhalt des Neunecks = 5° 69′ 60 □″.

§ 287.

Da jedes reguläre Vieleck, wenn solches aus der Mitte in Dreiecke eingetheilt wird, so viel Dreiecke enthält, wie es Seiten hat, und die dabei sich gleich sind, so braucht man nur, um den Flächeninhalt einer solchen Figur zu finden, ein Dreieck zu berechnen, und solches so viel Mal zu nehmen, als das Vieleck Seiten hat.



§ 288.

Zusatz. Es sei in dem regulären Sechsecke
die Seite ab = : : : : : : : $234''$
und die Höhe des $\triangle$ acb = ch = : : $202''$

So ist $\triangle$ acb = : : : : : $2^\circ 36' 34 \square''$
Folglich $6 \times 23634'' = 14^\circ 18' 04 \square''$
= Flächeninhalt des Sechsecks abdefg.

§ 289.

Zusatz. Der Inhalt eines regulären Vielecks kann auch dadurch gefunden werden, daß man eine Seite desselben mit der Anzahl aller Seiten multiplizirt, welches den Umfang oder Perimeter des Vielecks giebt, der hierauf durch die halbe Höhe eines Dreiecks multiplizirt wird.

So war in dem vorhergehenden Beispiele die Seite des Sechsecks ab = = = = = 234″; daher ist der Umfang des Vielecks = 6 × 234″ = 14° 0′ 4″ und folglich ist der Flächeninhalt des Sechsecks = 14° 0′ 4″ × 101″ = 14° 18′ 04″, wie vorhin.

§ 290.

Zusatz. Wenn demnach P = der Umfang des Vielecks, a = der einen Seite, h = der Höhe des Dreiecks und S = dem Flächeninhalte ist, so ist

1. $S = \frac{ah}{2} \times n = an \times \frac{1}{2} h.$

2. $n = \frac{2S}{ah}$

3. $a = \frac{2S}{nh}$

4. $h = \frac{2S}{na}$

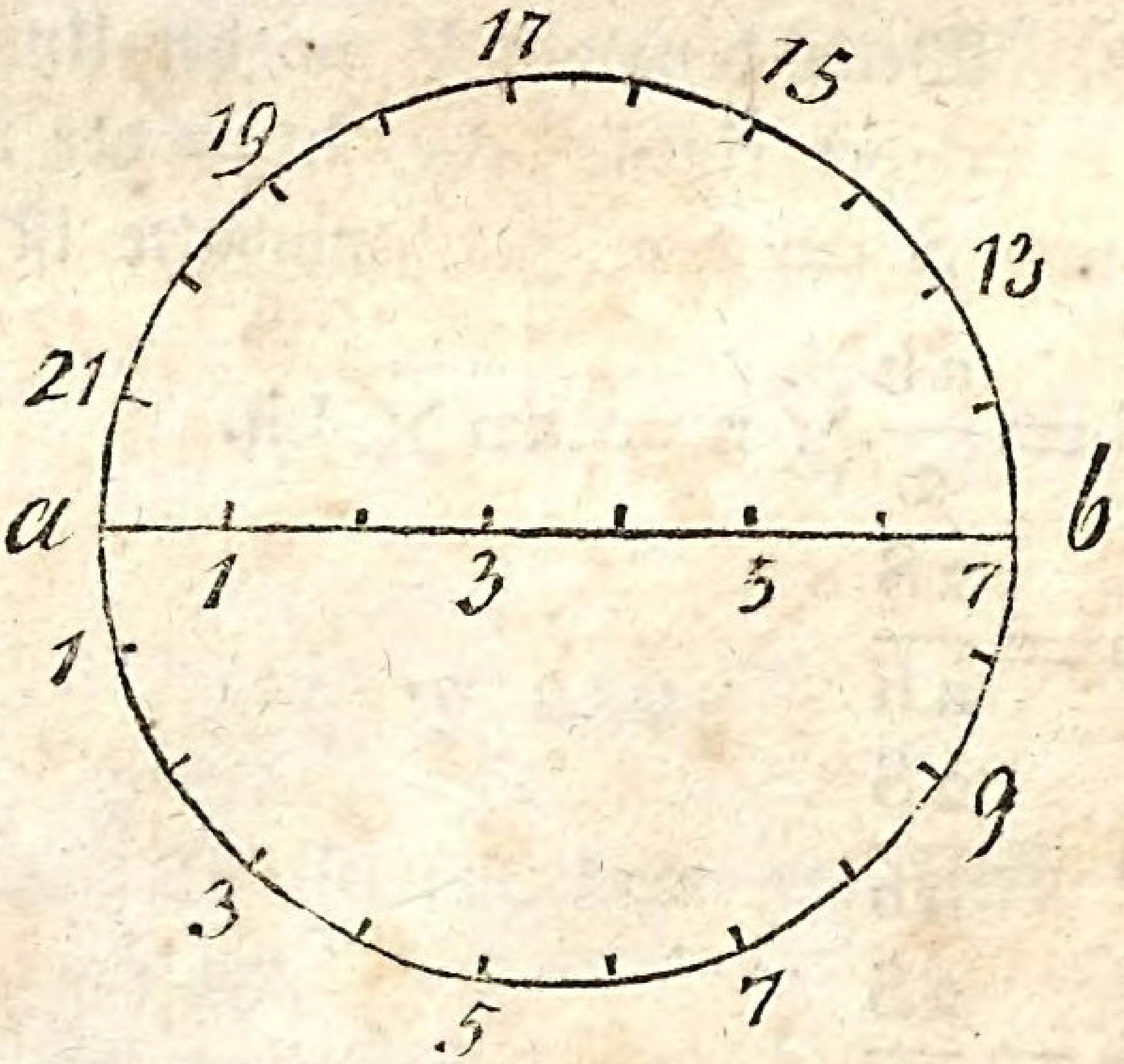
Da $na = P$, so ist

5. $P = \frac{2S}{h}.$

Vom Kreise.

§ 291.

Wenn man den Durchmesser eines Kreises in sieben gleiche Theile theilt, so läßt sich ein Theil davon 22 mal in der Peripherie oder dem Umkreise desselben umhertragen. Und theilt man den Durchmesser in 100 gleiche Theile ein, so läßt sich ein Theil davon 314 mal, und theilt man ihn in 113 gleiche Theile, so läßt sich ein Theil von diesen 355 mal in dem Umkreise umhertragen. Daher verhält sich der Durchmesser eines Kreises zu seinem Umkreise wie 7 zu 22, oder 100 zu 314, oder 113 zu 355.



Anmerkung. Das Verhältniß von 7 zu 22 ist zuerst von Archimedes entdeckt worden, weil aber solches um etwas zu groß ist, so hat Adrianus Metius das Verhältniß von 113 zu 355 dafür angenommen. In neuern Zeiten hat man solches noch genauer dadurch zu bestimmen gesucht,

daß man die Seite eines regulären 6ecks, wobei der Halbmesser = 1 gesetzt worden ist, berechnet, und hieraus die Seite des regulären 12ecks, 24ecks bis 192ecks und noch weiter hergeleitet hat. Auf diese Weise hat Ludolph von Cöln aus Hildesheim das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise gefunden, wie

1,00000000000000000000000000000000000

zu 3,14159265358979323846264338327950288

und Lagny hat solches sogar auf 127 Dezimalstellen berechnet; daher ist dieß Verhältniß so genau, daß in einem Kreise, dessen Halbmesser 100 Millionenmal größer wäre, als die Weite der Erde von der Sonne, der Irrthum im Umkreise 100 Millionenmal kleiner sein würde, als die Dicke eines Haars.

Von diesem Verhältniß nimmt man demnach gewöhnlich die drei ersten Ziffern, wodurch die Berechnung des Kreises ziemlich genau herausgebracht wird.

§. 292.

Zusatz. Soll demnach zu einem Durchmesser von 36″ der dazu gehörige Umkreis gefunden werden, so nimmt man eins von diesen Verhältnissen, und sagt, nach dem 1sten Verhältnisse: Wenn zu einem Durchmesser von 7″ ein Umkreis von 22″ gehört, was für ein Umkreis gehört alsdann zu einem Durchmesser von 36″? und setzt solches nach der Regeldetri also auf:

$$7 : 22 = 36'' : x \text{ Peripherie.}$$

$$\frac{22 \times 36''}{7} = 113'' = \text{Umkreis.}$$

2tes Beispiel. Wenn der Durchmesser der Erde = 1720 geogr. Meilen lang ist, wie groß ist nach dem 2ten Verhältnisse der Umkreis derselben?

$$100 : 314 = 1720 : x \text{ Umkreis.}$$

$$\frac{314 \times 1720}{100} = 5400 \text{ geogr. Meilen.}$$

$$= \text{Umkreis der Erde.}$$

3tes Beispiel. Wenn der Durchmesser des Mondes = 468 geogr. Meilen lang ist, wie groß ist nach dem 3ten Verhältnisse der Umkreis desselben?

$$113 : 355 = 468 : x \text{ Umkreis.}$$

$$\frac{355 \times 468}{113} = 1470 \text{ geogr. Meilen.}$$

= Peripherie des Mondes.

§ 293.

Zusatz. Soll aus dem Umkreise oder der Peripherie eines Kreises der Durchmesser desselben gefunden werden, so wird jenes Verhältniß umgekehrt gesetzt.

§ 294.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, wenn dessen Umkreis 50′ hat?

$$314 : 100 = 50' : x \text{ Durchmesser.}$$

$$\frac{100 \times 50}{314} = 16' = \text{Durchmesser.}$$

2. Wie groß ist der Durchmesser eines Weltkörpers, wenn dessen Umkreis = 213½ geogr. Meilen, wie bei der Vesta, groß ist?

$$314 : 100 = 213\tfrac{1}{2} : x \text{ Durchmesser.}$$

$$\frac{100 \times 427}{314 \cdot 2} = 68 \text{ geogr. Meilen}$$

= Durchmesser.

§ 295.

Da der Kreis einem regulären Vielecke von unendlich vielen Seiten gleicht, bei welchem der Umkreis gleich dem Umfange oder Perimeter des Vielecks und der Halbmesser gleich der Höhe des Dreiecks ist, und ein solches Vieleck dadurch berechnet wird, daß man den Perimeter desselben durch die halbe Höhe multiplizirt, so muß auch der Inhalt des Kreises dadurch gefunden werden, daß man den Umkreis desselben durch den halben Halbmesser, d. i. durch den vierten Theil des Durchmessers multiplizirt.

§ 296.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, wenn dessen Durchmesser 24° ist?

$100 : 314 = 24^{\circ} : x$ Peripherie

$$\frac{314 \times 24^{\circ}}{100} = 75^{\circ}\,3'\,6'' = \text{Peripherie.}$$

Daher $7536'' \times \frac{24^{\circ}}{4} = 7536'' \times 600'' = 452^{\circ}$ $16\,\square' =$ Kreisfläche.

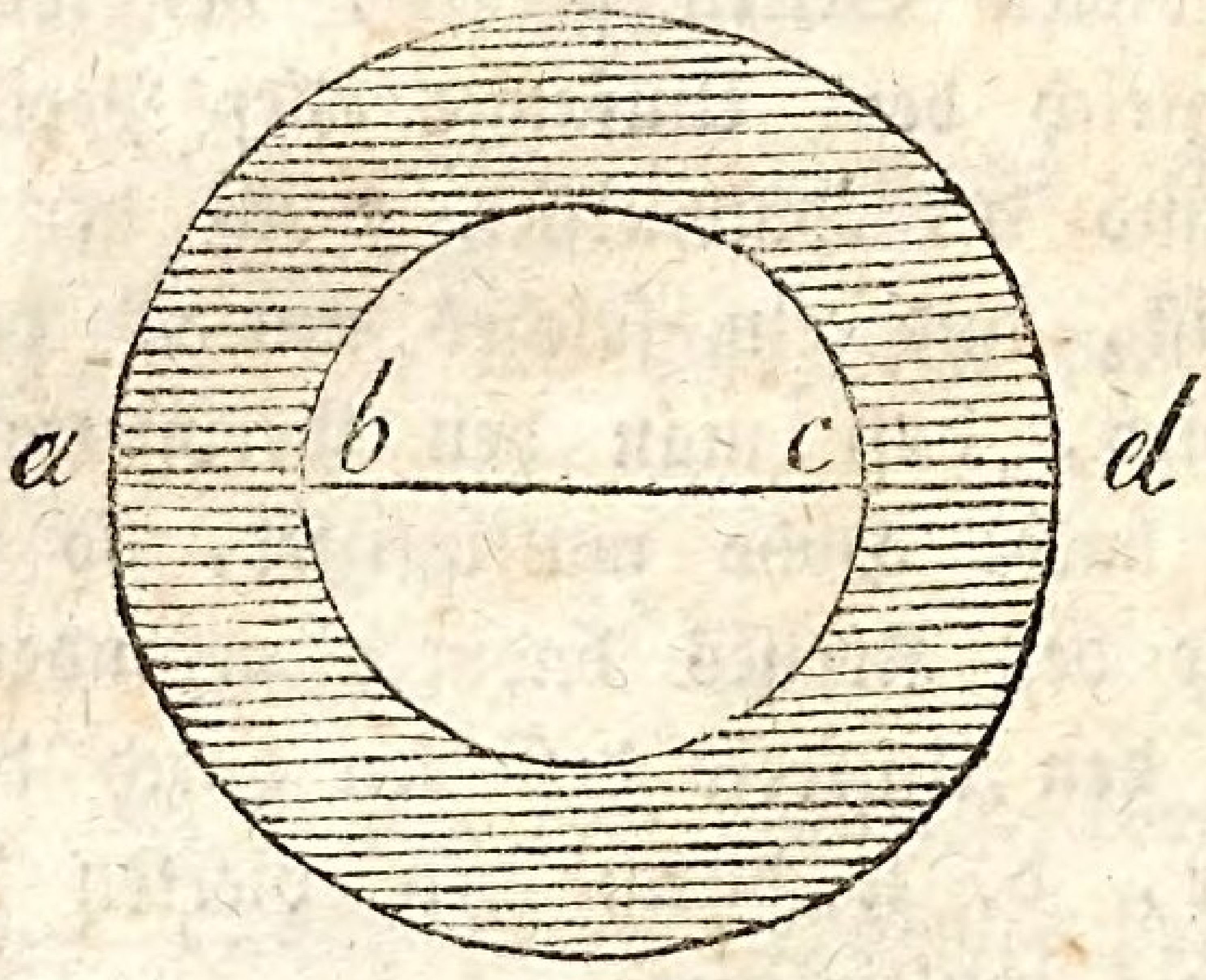
2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreises, wenn dessen Umkreis $= 113'$ ist?

$314 : 100 = 113' : x$ Durchmesser.

$$\frac{113 \times 100}{314} = 36' = \text{Durchmesser.}$$

Daher $113' \times \frac{36'}{4} = 113' \times 9' = 10^{\circ}\,17'$ = Kreisfläche.

3. Wie groß ist der Kreisrand von einem Kreise, dessen äußerer Durchmesser ad = $1^{\circ} 9' 8''$ und dessen innerer bc = $1^{\circ} 1' 2''$ ist?



Da der Kreisrand = der Differenz des kleinen Kreises von dem großen ist, so muß man die Flächen beider berechnen, und hierauf die kleine Kreisfläche von der großen abziehen. Nach der Berechnung ist demnach die Kreisfläche von dem

Durchmesser ad	: : : : :	= $3^{\circ} 07' 75 \square''$
— — bc	: : : : :	= $98' 47 \square''$
also der Kreisrand	: : : :	= $2^{\circ} 09' 28 \square''$.

§ 297.

Zusatz. Wenn die Kreisfläche = C, die Verhältnißzahl 3,14 = π, die Peripherie = P, der Durchmesser = D und der Halbmesser = R gesetzt wird, so entstehen für die vorhin angeführten Beispiele folgende Formeln:

1. $D = \frac{P}{\pi}$ d. h. der Durchmesser wird gefunden, wenn die gegebene Peripherie durch 3,14 dividirt wird.

2. $P = D\pi$ }
3. $P = 2R\pi$ } d. h. die Peripherie wird gefunden, wenn der Durchmesser oder der doppelte Halbmesser durch 3,14 multiplizirt wird.

4. $C = \frac{PD}{4} = \frac{PR}{2}$ d. h. die Kreisfläche wird gefunden, wenn die Peripherie durch $\frac{1}{4}$ Durchmesser oder $\frac{1}{2}$ Halbmesser multiplizirt wird.

5. $C = R^2\pi$; denn es ist $P = 2R\pi$ nach No. 3; also $C = 2RR\pi = 2R^2\pi$ nach No. 4.

Das heißt: die Kreisfläche ist = dem Quadrate des Halbmessers multiplizirt durch π; daher ist

6. $R = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$ d. h. der Halbmesser wird aus der Kreisfläche gefunden, wenn diese durch 3,14 dividirt, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen wird.

7. $D = 2\sqrt{\frac{C}{\pi}}$ d. h. der Durchmesser wird aus der Kreisfläche gefunden, wenn diese durch 3,14 dividirt, darauf aus dem Quotienten die Quadratwurzel gezogen und solche doppelt genommen wird.

8. $C = \frac{P^2}{4\pi}$ d. h. die Kreisfläche wird aus der Peripherie dadurch gefunden, daß man diese zum Quadrate erhebt und solches durch $4 \times 3{,}14$ dividirt.

9. $P = 2\sqrt{\pi C}$ d. h. die Peripherie ist = zweimal der Quadratwurzel aus dem Produkte der Kreisfläche multiplizirt durch 3,14..

§ 298.

Zusatz. Einige Beispiele zu den letzten Formeln zur Erläuterung: *)

1. Wenn der Halbmesser eines Kreises = 16′ ist, wie groß ist alsdann die Kreisfläche?

Nach No. 5. ist $C = R^2\pi$

also $= 16 \times 16' \times 3,14 = 256 \times 3,14 = 803,84 \square'$
$= 803'84 \square''$.

2. Die Kreisfläche eines Kreises ist groß 10° 17′, wie groß ist der dazu gehörende Halbmesser? **)

Nach No. 6. ist $R = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$; daher

$$C = \sqrt{\frac{10°17'}{3,14}} = \frac{\sqrt{1017'.3,14}}{3,14.} = \frac{\sqrt{3193,38'}}{3,14}$$
$$= \frac{56,5'}{3,14} = \frac{5650'}{314} = 18'.$$

---

*) Da die Zahl 3,14 als ein Dezimalbruch hier angenommen ist, so muß auch dieselbe überall wie ein solcher Bruch gebraucht werden; deswegen schneidet man von dem Produkte, welches durch ihre Multiplikation entstanden ist, zwei Stellen ab, und hängt der Zahl, welche durch sie dividirt werden soll, zwei Dezimalstellen durch Hülfe von zwei Nullen an, wenn noch keine Dezimalstelle vorhanden ist. Ist aber schon eine vorhanden, so fügt man nur eine Null hinzu.

**) Diese Aufgabe kann auch durch das Verhältniß der Kreisfläche zum Quadrate des Durchmesser von 100, welches = 785 zu 1000 ist, in vielen Fällen noch leichter aufgelöset werden, indem man aufsetzt: die Kreisfläche von 785 giebt zum Quadrate des Durchmesser 1000, was giebt die gegebene Kreisfläche für ein Quadrat? woraus man hierauf die Quadratwurzel zu ziehen hat. Z. B.

$$785 : 1000 = 1017' : x^2$$
$$x^2 = \frac{1017000'}{785} = 1295'$$
$$x = \sqrt{1295'} = 36' = \text{Durchmesser}.$$

3. Wie groß ist der Inhalt eines Kreises, wenn dessen Umkreis = 48′ ist?

Nach No. 8 ist $C = \frac{P^2}{4\pi}$; daher

$$C = \frac{48' \times 48'}{4 \cdot 3,14} = \frac{2304'}{12,56} = \frac{230400'}{1256'} = 183\square'.$$

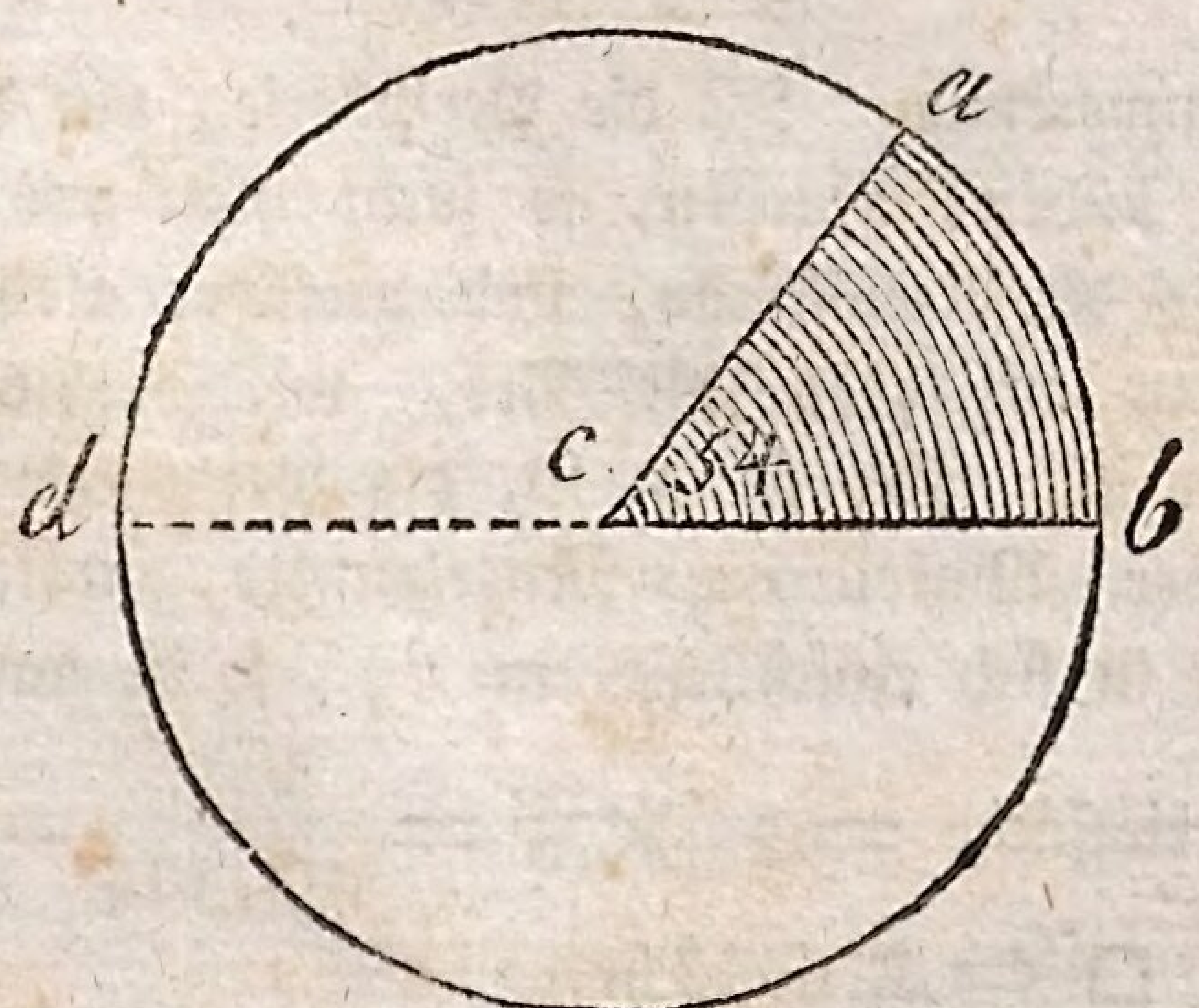
4. Wie groß ist die Peripherie eines Kreises, wenn dessen Flächeninhalt = 72 □° ist?

Nach No. 9 ist $P = 2\sqrt{C'\pi}$;

daher $P = 2\sqrt{72^\circ \times 3,14} = 2\sqrt{226^\circ 08'} = 2 \times 15^\circ = 30^\circ$.

§ 299.

Soll der Ausschnitt eines Kreises berechnet werden, so muß man dazu die Größe der Kreisfläche und den Winkel am Mittelpunkt, welcher von dem Bogen des Ausschnittes eingeschlossen wird, wissen, und alsdann aufsetzen: 360 Grad geben eine Kreisfläche von der gegebenen Größe, was muß der Winkel am Mittelpunkte für einen Theil von der Kreisfläche einschließen?



§ 300.

Beispiele zur Erläuterung:

Es sei der Durchmesser bd eines Kreises $= 240''$, der Winkel c am Mittelpunkte, welcher den Sektor acb bildet, $= 54^\circ$, wie groß ist dessen Flächenraum?

$100 : 314 = 240'' : x$ Peripherie

$\frac{240 \times 314}{100.} = 75' \, 3'' \, 6'''$ = Peripherie.

Wird diese Peripherie $= 75' \, 3'' \, 6'''$
durch $\frac{1}{4}$ Durchmesser $\times = 60'' \, 0'''$

so erhält man $= 4^\circ \, 52' \, 16'' \, 00'''$ = Inhalt des Kreises.

Setzt man hierauf nach der Regeldetri auf:

$\frac{360^\circ}{20} : 4^\circ \, 52' \, 16'' = \frac{54^\circ}{3} : x$ Ausschnitt.

$135648''$ (3

20) ————

So ist $67' \, 82'' \, 40'''$ = Flächeninhalt des Ausschn. abc.

§ 301.

Anmerkung. Ist die Peripherie, um den Sektor zu finden, gegeben, so sucht man aus der Peripherie die Kreisfläche, und verfährt alsdann mit derselben auf eben die Art, wie vorhin gezeigt worden ist. Es sei z. B. die Peripherie $= 75'$ und der Winkel am Mittelpunkte, welcher den Sektor in sich einschließt, $= 65^\circ$, so ist nach No. 8 die Kreisfläche $= 75' \times 75' = \frac{5625'}{4 \times 3{,}14} = \frac{562500'}{1256}$ $= 447 \, \square'$ = Kreisfläche.

Setzt man auf:

$$5)\frac{360^\circ}{72^\circ} : 447\,\square' = 5)\frac{65^\circ}{13} : x \text{ Sektor.}$$

$$\frac{\qquad}{5811'}(13$$

$$72)\frac{\qquad}{}$$

So ist $80'\,71\,\square'' =$ Flächeninhalt d. Ausschnitts.

§ 302.

Zusatz. Will man nicht den Ausschnitt, welchen der Winkel am Mittelpunkte in sich einschließt, sondern nur den Theil oder den Bogen von dem Umkreise, welcher von diesem Winkel eingeschlossen wird, berechnen, so hat man dazu nur die Größe der Peripherie und die des Winkels am Mittelpunkte nöthig zu wissen.

§ 303.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wenn die Peripherie eines Kreises = 120′ und der Winkel c am Mittelpunkte = 50° ist, wie groß ist der dazu gehörende Bogen ad?

$$\frac{360^\circ}{3} : \frac{120'}{1} = 50^\circ : x \text{ Bogen}$$

$$\text{also } \frac{50'}{3} = 16'\,6'' = \text{Bogen ad.}$$

2. Wenn der Durchmesser eines Kreises = 36′, und der Winkel c am Mittelpunkte = 40° ist, wie groß ist alsdann der Bogen ab?

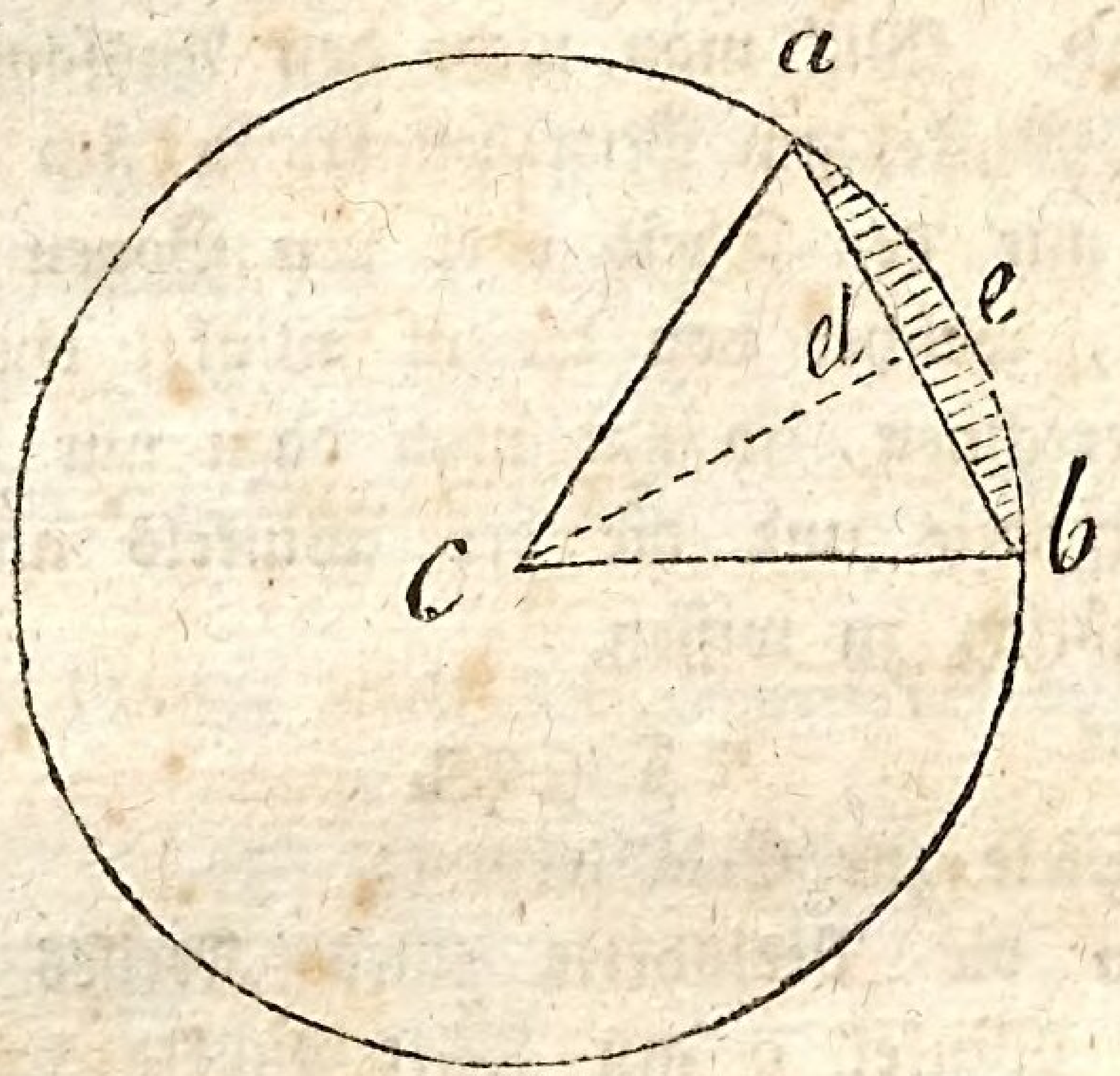
Wenn der Durchmesser = 36′ ist, so ist die Peripherie des Kreises = 113′ daher

$$\frac{360^\circ}{9} : 113' = \frac{40}{1} : x \text{ Bogen}$$

$$9)\frac{\qquad}{12'\,5''} = \text{Bogen ab.}$$

§ 304.

Um den Flächeninhalt des Segments oder des Abschnitts aebd in dem Kreise C zu finden, so muß man zuvor den Ausschnitt aebC berechnen, und von dem Flächeninhalte desselben das geradlinige Dreieck aCb abziehen.



So ist z. B. im § 300 der Inhalt des Ausschnitts aeCb $= 67' 82'' 40'''$. Wird nunmehr von diesem Flächeninhalt das Dreieck aCb, dessen Grundlinie ab $= 1° 1' 0''$ und dessen Höhe cd $=$ $109''$ und dessen Flächeninhalt $= \frac{110 \times 109''}{2}$ $= 59' 95''$ ist, abgezogen, so erhält man das Segment adeb, dessen Flächeninhalt daher $=$ $67' 82'' 40''' - 59' 95 = 7' 87'' 40'''$ ist.

§ 305.

Zusatz. Wird der Ausschnitt des Kreises $=$ A, der Abschnitt desselben $=$ B und der Winkel

am Mittelpunkte = W gesetzt, wobei die übrigen im § 297 angenommenen Beziehungen für die Theile des Kreises beibehalten werden, so entstehen für den Ausschnitt, Bogen u. s. w. folgende allgemeine Formeln:

Nach den Paragraphen 299 und 300 ist der Ausschnitt oder

1. $A = \frac{CW}{360} = \frac{\pi R^2 W}{360}$ nach § 297 No. 5.

Daher 2. $W = \frac{360 . A}{\pi R^2}$ d. h. der Winkel am Mittelpunkte wird aus dem Abschnitte und dem Halbmesser dadurch gefunden, daß man jenen durch 360° multiplizirt und durch das Produkt des Quadrats des Halbmessers und 3,14 dividirt.

3. $R = \sqrt{\frac{360 A}{\pi W}} = 6\sqrt{\frac{10 A}{\pi W}}$ d. h. der Halbmesser eines Kreises wird aus dem Ausschnitte und dem Winkel am Mittelpunkte dadurch gefunden, daß man den Ausschnitt 10mal nimmt, dieß Produkt durch das vom Winkel und 3,14 dividirt, daraus die Quadratwurzel ziehet und solche 6mal nimmt.

§ 306.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist der Winkel am Mittelpunkte, wenn der Ausschnitt 2° 34□′ und der Halbmesser = 18′ ist?

Nach No. 2 ist $W = \frac{360 . A}{\pi R^2}$; daher ist

$$W = \frac{360 \times 234'}{3,14 \times 18 . 18'} = \frac{130'}{1,57} = \frac{13000'}{157'} = 83 \text{ Grad.}$$

2. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, wenn dessen Ausschnitt = 32′ 26 □″ und der Winkel am Mittelpunkte = 80° ist?

Nach No. 3 ist $R = 6\sqrt{\frac{10 A}{\pi W}} = 6\sqrt{\frac{3226'' \times 10}{3,14 \times 80.}}$

$$= 6\sqrt{\frac{32260''}{3,14 \times 80}} = 6\sqrt{\frac{1613''}{4 \times 3,14}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{1613'' \times 12,56}{12,56^2.}}$$

$$\frac{6\sqrt{20259,28''}}{12,56} = \frac{142,3'' \times 6}{12,56} = \frac{85380''}{1256} = 68''$$

= Halbmesser.

§ 307.

Zusatz. Da der Kreis einem Dreiecke gleicht, in welchem die Grundlinie gleich dem Umkreise und die halbe Höhe gleich dem Halbmesser ist, so ist $C = \frac{PR}{2}$. Und da, um die Kreisfläche zu finden, der ganze Umkreis durch den halben Halbmesser multiplizirt wird, so muß man, um den Ausschnitt zu finden, den Theil des Umkreises, der den Ausschnitt einschließt, mit dem halben Halbmesser multipliziren; daher ist

1. $A = \frac{bR}{2}$; daraus folgt

2. $b = \frac{2A}{R}$ und

3. $R = \frac{2A}{b}$.

§ 308.

Beispiele zur Erläuterung:

1. Wie groß ist der Ausschnitt, wenn der Kreisbogen $= 78''$ und der Halbmesser $= 56''$ ist?

Da $A = \frac{bR}{2}$ ist, so ist $A = 78'' \times \frac{56''}{2} = 78'' \times 28''$

$= 21'84 \square'' =$ Ausschnitt.

2. Wie groß ist der Bogen, wenn der Ausschnitt $= 32'26 \square''$ und der Halbmesser $= 68''$ ist?

Da $b = \frac{2A}{R}$ ist, so ist $b = \frac{2 \times 3226''}{68} = \frac{1613''}{17}$

$= 95'' =$ Bogen.

3. Wie groß ist der Halbmesser, wenn der Ausschnitt $= 21'84 \square''$ und der Bogen $= 78''$ ist?

Da $R = \frac{2A}{b}$ ist, so ist $R = \frac{2 \times 2184''}{78''} = \frac{2184''}{39''}$

$= \frac{728''}{13} = 56'' =$ Halbmesser.

§ 309.

Anmerkung. Durch die vorhergehenden Beispiele wird man, wie ich glaube, leicht in den Stand gesetzt worden sein, von diesen angeführten Formeln, welche ich der Vollständigkeit wegen hier noch hingesetzt habe, Gebrauch zu machen.

$$1.\ b = \frac{\pi RW}{180^{\circ}}$$

$$2.\ R = \frac{180\,b}{\pi W}$$

$$5.\ W = \frac{180\,b}{\pi R}$$

Eben so auch noch

$$4.\ A = \frac{90\,b^2}{\pi W}$$

$$5.\ W = \frac{90\,b^2}{A\pi}$$

$$6.\ b = \sqrt{\frac{\pi WA}{90.}}$$

B. Von den Körpern.

§ 310.

Erklärung. Einen Körper berechnen heißt ausmitteln, wie viel mal ein angenommenes Körpermaß in dem Raum desselben enthalten sei. Und da unter allen regelmäßigen Körpern der Würfel derjenige ist, dessen Körperraum sich am leichtesten bestimmen läßt, so hat man diesen zum Maßstabe aller Körper angenommen.

§ 311.

Zusatz. Wenn demnach die Seite eines Würfels $= 1^{\circ}$ lang ist, so ist die Grundfläche *)

*) Unter Grundfläche verstehet man die unterste Fläche

abcd desselben $= 1\square^\circ$ am Flächenraume groß. Und da diese soviel mal über einander liegt, als der Körper hoch ist, so muß diese Grundfläche durch die Höhe ae desselben multiplizirt werden, um den körperlichen Inhalt des Würfels dadurch zu erhalten. Da aber 1° Länge $= 10'$ ausmachen, und $1\square^\circ = 100\square'$ sind, so muß eine Kubikruthe $= 100\square' \times 10'$ hoch $= 1000$❒$'$ groß sein u. s. w. Ist aber eine Ruthe 12 Schuh lang, so enthält $1\square^\circ = 12 \times 12' = 144\square'$ und 1❒$^\circ = 12 \times 12 \times 12' = 1728$❒$'$. Dieß Maß nennt man das Duodezimal und jenes, nach welchem in der Geometrie stets verfahren wird, das Dezimalmaß.

§ 312.

Zusatz. Soll daher der Inhalt eines Würfels gefunden werden, so braucht man nur die eine Seite desselben 3 mal durch sich selbst zu multipliziren.

Es sei die Seite ab (s. Fig. auf folg. S.) $= 3\frac{3}{4}'$, so ist der körperliche Inhalt des Würfels $= 3\frac{3}{4} \times 3\frac{3}{4} \times 3\frac{3}{4}'$

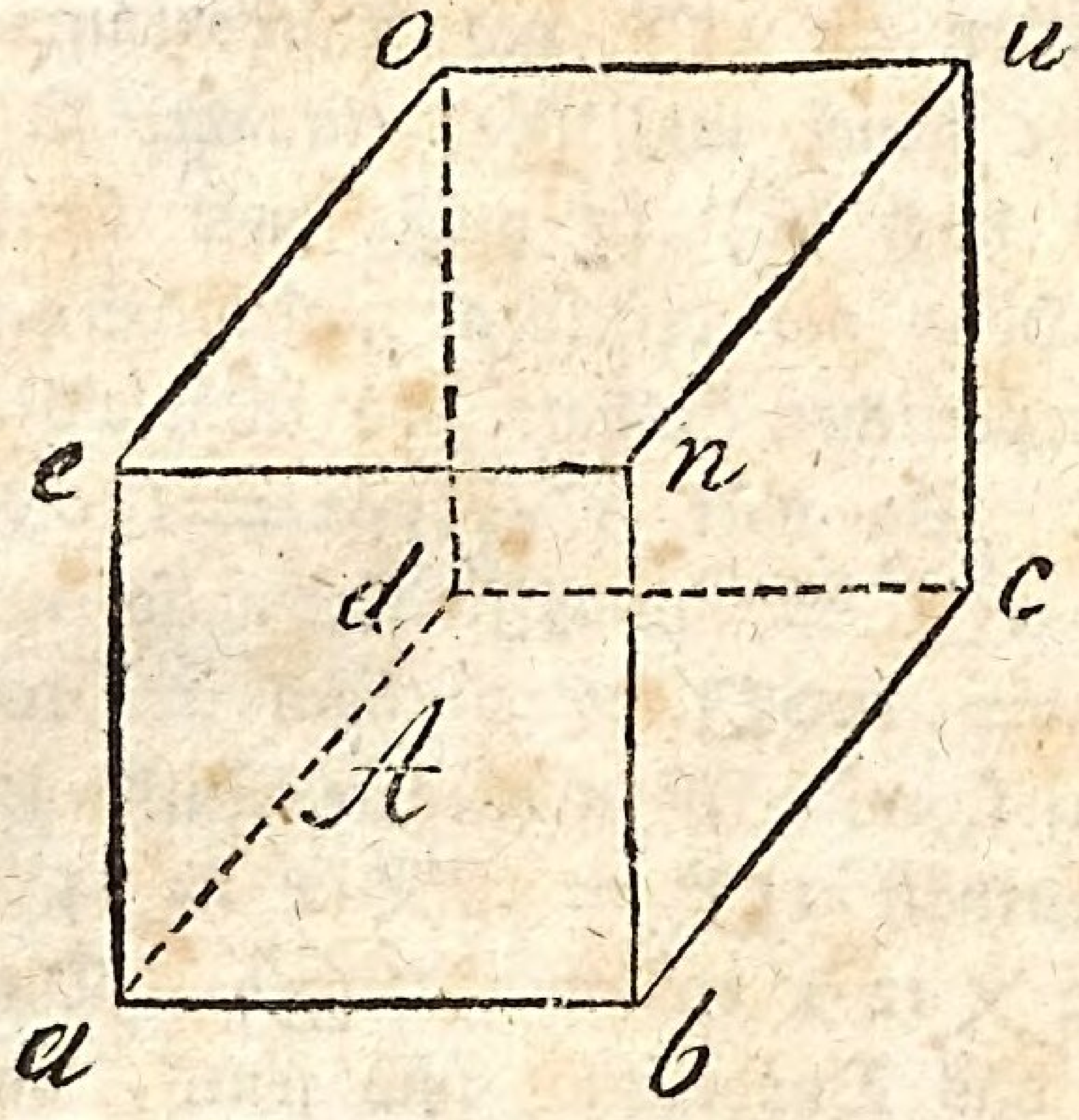
$$= \frac{15}{4}' \times \frac{15}{4}' \times \frac{15}{4}' = \frac{3375'}{64'} = 52'34''.$$

Soll dieser Inhalt durch Dezimalbrüche gefunden werden, so ist

$\frac{15}{4} = 3{,}75'$; daher $3{,}75^3 = 52{,}734375$❒$' = 52{,}734''375$❒$'''$.

---

des Körpers, worauf derselbe ruhet, unter der Seitenfläche, die Fläche zur Seite und unter der Oberfläche alle Flächen zusammen genommen, welche keinen Raum einschließen.



§ 313.

Will man aus dem kubischen Inhalte eines Würfels eine Seite desselben wieder finden, so muß man aus jenem die Kubikwurzel ziehen. Es sei demnach der kubische Inhalt des Würfels A = 52734375‴, wird hieraus die Kubikwurzel gezogen so erhält man 3′ 7″ 5‴ wieder, wie folgendes Beispiel lehren wird. *)

$$\sqrt[3]{52|734|375} \mid 3' 7'' 5''' = 3\tfrac{75}{100}' = 3\tfrac{3}{4}'$$

$$\begin{array}{l} 27 \\ \hline 25|734 \\ (27) \\ 189 \\ \;441 \\ \;\;343 \\ \hline 23653 \\ \hline \;\;2081|375 \\ \;\;(4107) \\ \;\;20535 \\ \;\;\;\;2775 \\ \;\;\;\;\;125 \\ \hline \;\;2081375 \end{array}$$

*) Die Verfahrungsart hierbei ist gründlich in dem zweiten Theile meines Rechenbuchs S. 190—192 gezeigt worden.

§ 314.

Und soll die Oberfläche dieses Körpers gefunden werden, so wird die Grundfläche desselben 6 mal genommen, weil er von 6 gleichen Quadraten, wovon jedes so groß als die Grundfläche ist, eingeschlossen wird.

So war z. B. die Seite ab des Würfels A $= 3\frac{3}{4}'$; daher ist die Grundfläche abcd dieses Körpers $= 3\frac{3}{4}' \times 3\frac{3}{4}' = \frac{15}{4} \times \frac{15}{4} = 3{,}75' \times 3{,}75' = 14{,}0625' = 14'\,06''\,25'''$. Wird dieses nun 6 mal genommen $= 14'\,06''\,25''' \times 6$, so erhält man die Oberfläche desselben, welche demnach $= 14'\,06''\,25''' \times 6 = 84'\,37''\,50\,\square'''$ ist.

§ 315.

Zusatz. Wird bei dem Würfel der körperliche Inhalt = W, die Seite seiner Grundfläche = S = der Höhe desselben und die Oberfläche = F gesetzt, so entstehen folgende Formeln, wodurch jedes Stück bei dem Würfel kann gefunden werden. Denn es ist

1. $W = S^3$; 2. $S = \sqrt[3]{W}$, und die Grundfläche $= S^2$; daher ist

3. $F = 6S^2$, und 4. $S = \sqrt{\frac{F}{6}} = \frac{\sqrt{6F}}{6}$

Nach No. 1 ist demnach der kubische Inhalt des Würfels gleich dem Würfel der Seite, siehe § 312.

Nach No. 2 ist die Seite gleich der Kubikwurzel aus dem kubischen Inhalte, s. § 313.

Nach No. 3 ist die Oberfläche gleich dem 6fachen Quadrate der Seite, s. § 314.

Und nach No. 4 ist die Seite des Würfels gleich der Quadratwurzel aus dem 6fachen Produkt der Oberfläche dividirt durch 6.

§ 316.

Beispiel zu No. 4.

Es sei die Oberfläche eines Würfels $= 9^{\circ}52'56\,\square''$, wie groß ist die Seite desselben?

Da $S = \sqrt{\frac{F}{6}}$; so ist die Seite des Würfels

$= \frac{95256'}{6} = \sqrt{15876''} = 1^{\circ}\,2'\,6'' =$ der Seite des Würfels.

§ 317.

Aus No. 2 und No. 4 des § 315 folgt, daß

$$\sqrt[3]{W} = \frac{\sqrt{6F}}{6}$$ sei; daher ist

$$5.\ W = \frac{\sqrt{6^3 F^3}}{6^3}$$

$$= \frac{6F\sqrt{6F}}{6^3} = \frac{F}{6^2}\sqrt{6F} = \frac{F}{6}\sqrt{\frac{F}{6.}}$$

§ 318.

Zusatz. Nach dieser Formel No. 5 kann man demnach ohne die Seite des Würfels zu haben, den körperlichen Inhalt aus der Oberfläche dessel-

ben finden, wenn man diese durch 6 dividirt, darauf aus dem Quotienten die Quadratwurzel ziehet, und solche durch den 6sten Theil der Oberfläche multiplizirt.

Es sei die Oberfläche eines Würfels $= 12^{\circ}96'54\square''$, wie groß ist dessen kubischer Inhalt?

Da $W = \frac{F}{6}\sqrt{\frac{F}{6}}$; so ist $W = \frac{129654''}{6}\sqrt{\frac{129654''}{6}}$ $= 21609\sqrt{21609} = 21609'' \times 147'' = 3^{\circ}176'523$ ⧈$''$ $=$ dem kubischen Inhalte desselben.

§ 319.

Da nach No. 5 des § 317

$$W = \frac{\sqrt{6^3 F^3}}{6^3} \text{ ist, so ist}$$

$$6^3 W = \sqrt{6^3 F^3},$$

$$6^6 W^2 = 6^3 F^3 \text{ und}$$

$$F = \sqrt[3]{6^3 W^2} = 6\sqrt[3]{W^2}.$$

Die Oberfläche ist demnach gleich der 6fachen Kubikwurzel aus dem Quadrate des Würfels.

§ 320.

Beispiel zur Erläuterung:

Es sei der kubische Inhalt des Würfels $= 5^{\circ}832$⧈$'$, wie groß ist dessen Oberfläche?

Da $F = 6\sqrt[3]{W^2}$ ist, so ist $F = 6\sqrt[3]{5832^2}$ $= 6\sqrt[3]{5832 \times 5832} = 6 \times 18 \times 18 = 19^{\circ}44\square'$ $=$ der Oberfläche desselben.

Vom Prisma.

§ 321.

Erläuterung. Da ein Prisma nach § 53 zu seiner Grundfläche ein Dreieck, Viereck und Vieleck haben kann, so werden sie auch hiernach in dreiseitige, vierseitige und vielseitige Prismen eingetheilt. Da ferner die Grundfläche bei ihnen sowol eine reguläre, wie auch eine irreguläre Fläche sein kann, so theilt man sie wiederum in reguläre und irreguläre Prismen ein. Zu den regulären vielseitigen Prismen gehört der Würfel und zu den irregulären das Parallelepipedum oder der Balkenkörper, wenn nämlich dessen Grundfläche kein Quadrat ist.

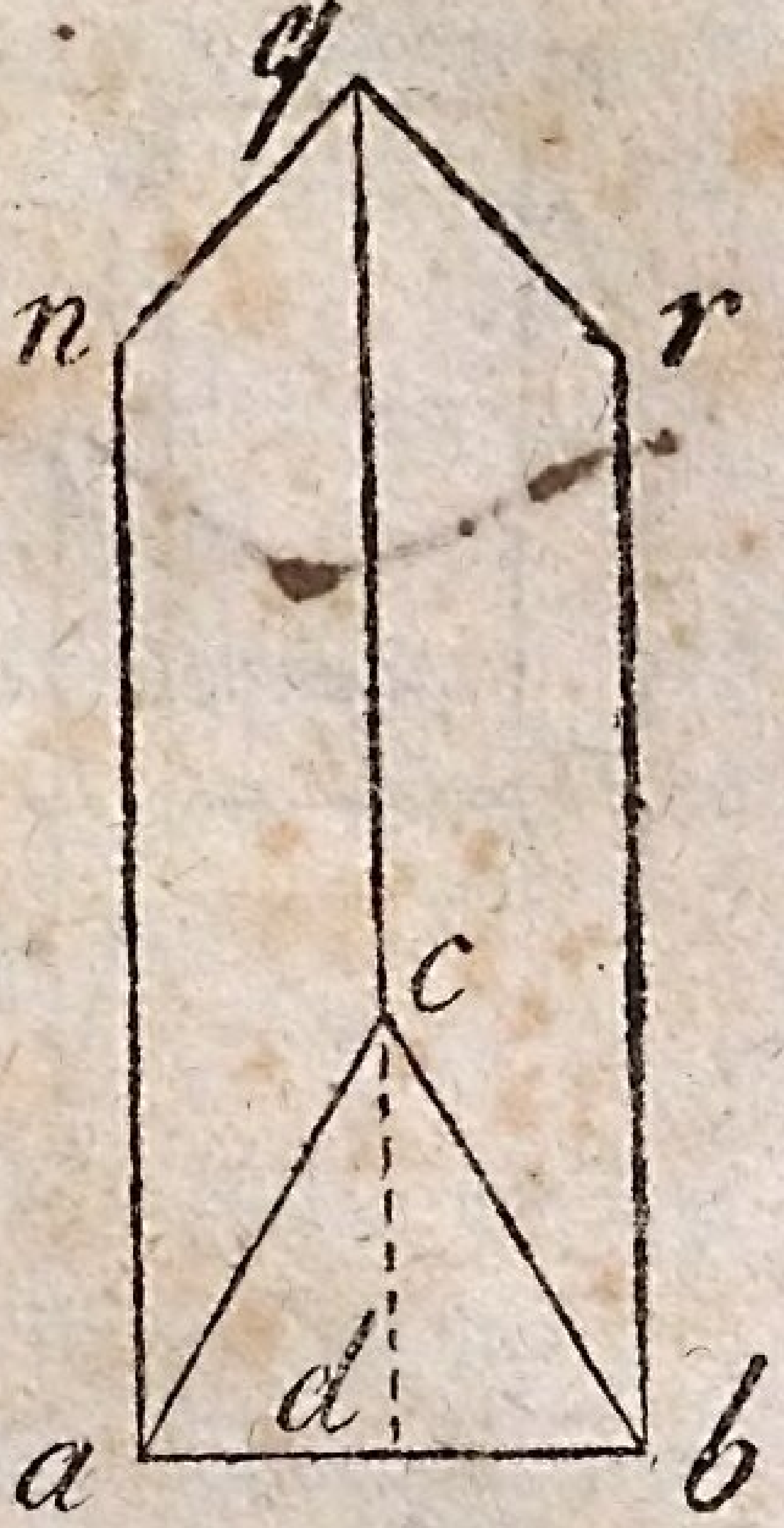
§ 322.

Da demnach der Würfel zu den Prismen gehört, so muß der kubische Inhalt dieses Körpers eben so, wie der des Würfels dadurch gefunden werden, daß man die Grundfläche des Prisma's mit der Höhe desselben multiplizirt.

§ 323.

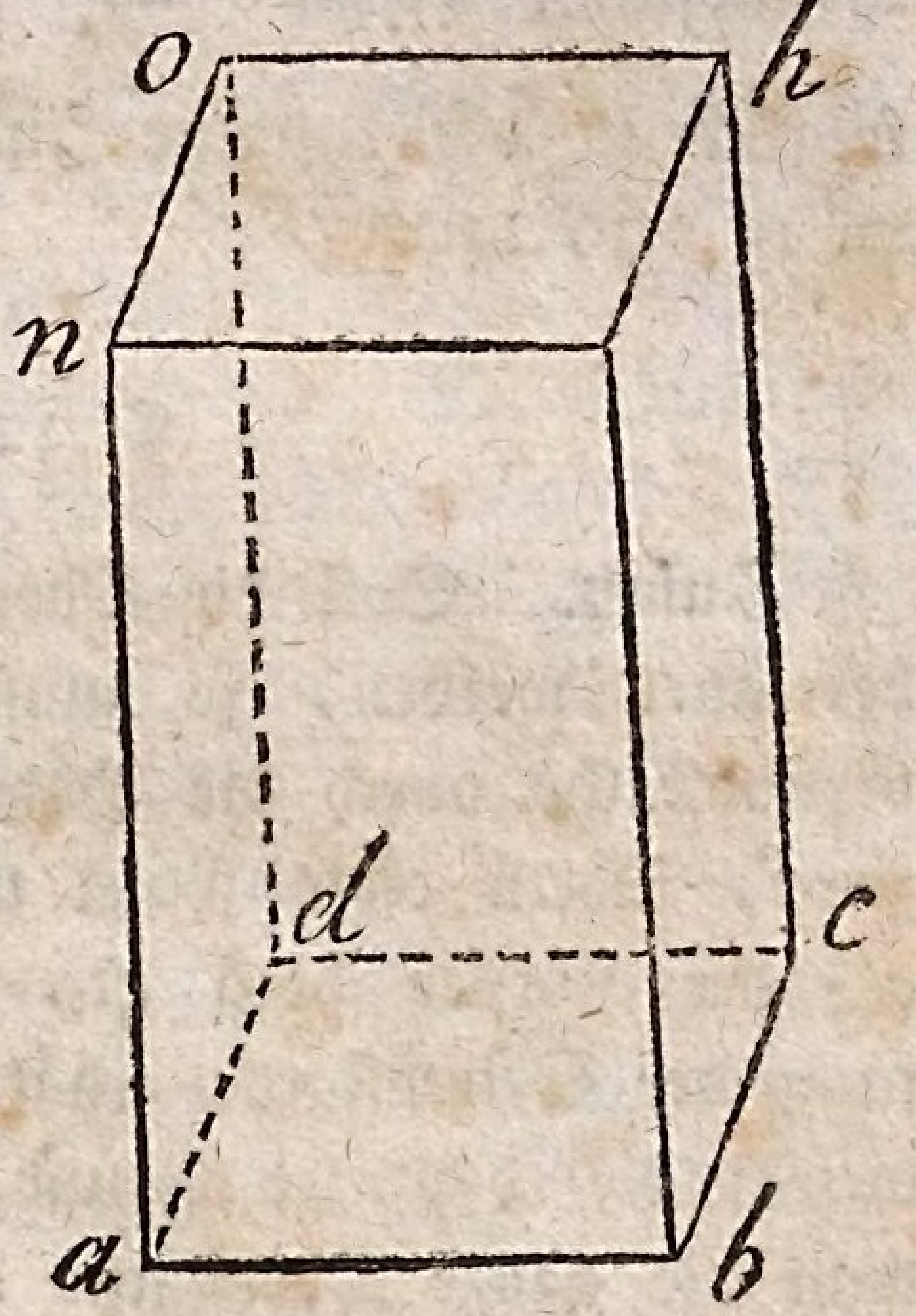
Einige Beispiele zur Erläuterung:

1. Es sei bei diesem dreiseitigen Prisma (s. Fig. auf folg. Seite) die Seite der Grundfläche a b



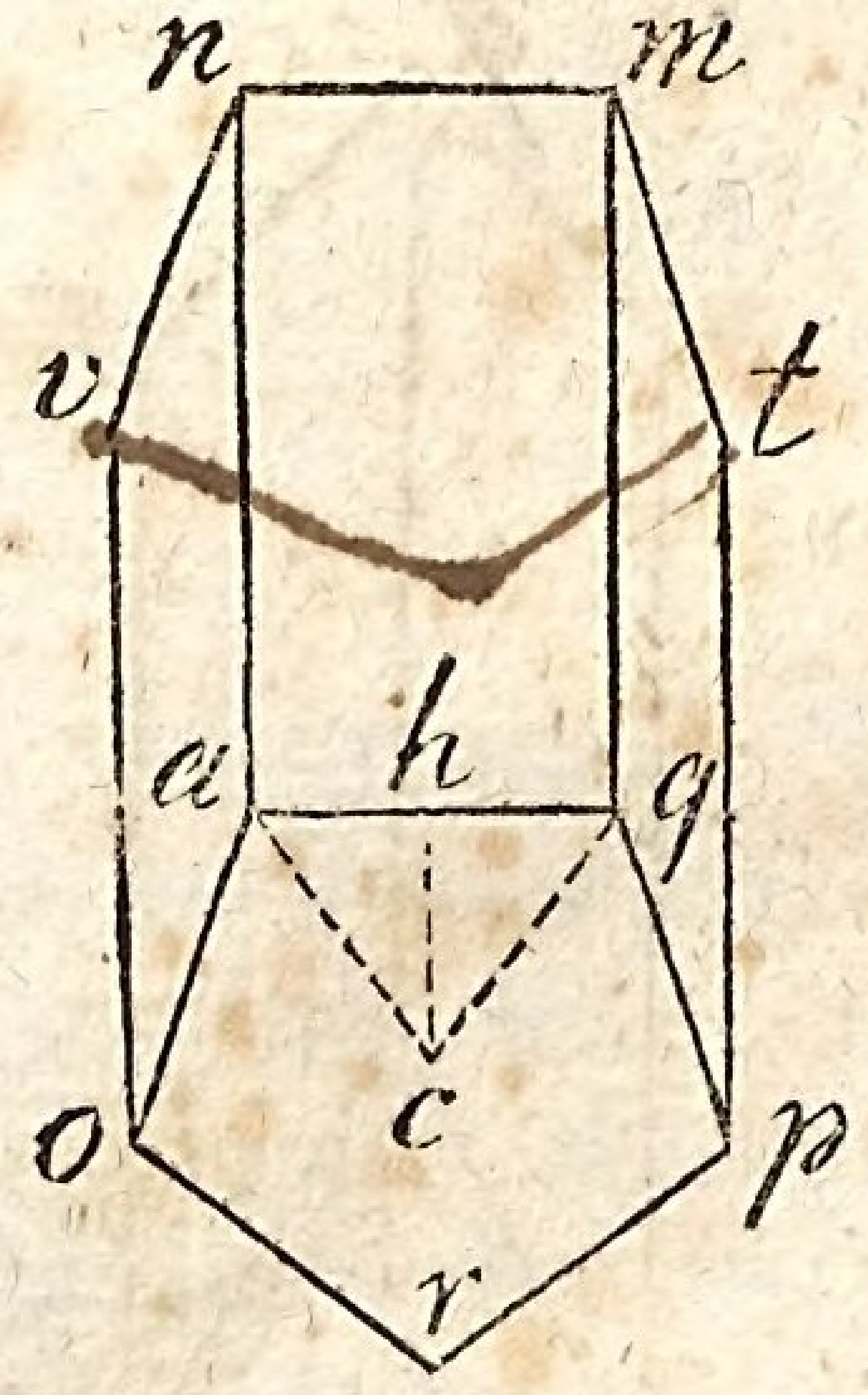
= 18′, die Höhe derselben ed = 15′ 5″ und die Höhe des Prisma cq = 43′; wie groß ist der körperliche Inhalt desselben?

Da ab = 18′ 0″
und cd = 15′ 5″
so ist 1° 39′ 50″ = der Grundfläche abc.
× cq = 43′ 0″
= 5° 998′ 500 □ = kubischer Inhalt.



2. Es sei bei einem vierseitigen Prisma oder einem Parallelepipedum die Seite ab = 12′, die Seite bc, als Höhe, = 10′ und die Höhe des Körpers ch = 20′, wie groß ist der kubische Inhalt desselben?

Da ab = 12′
bc = 10′
so ist 120′ = der Grundfläche
× ah = 20′
Folglich 2° 400 □′ = dem kubischen Inhalt.



3. Es sei bei einem regulären fünfseitigen Prisma die Seite aq des Fünfecks aqpro = 164″ die Höhe ch des einen Dreiecks = 113″, und die Höhe des Körpers an = 328″, wie groß ist der kubische Inhalt desselben?

Da die Seite aq = 164″ ist, so ist der Umfang des Fünfecks = 5 × 164″ = 820″, und die Grundfläche aqpro $= \frac{820 \times 113''}{2} = 4^\circ 63' 30 \square''$; folglich ist der kubische Inhalt $= 4^\circ 63' 30'' \times 328'' = 15^\circ 196' 240$ ⬚″.

§ 324.

Zusatz. Soll die Oberfläche dieser drei Körper berechnet werden, so muß man den Umfang der Grundfläche durch die Höhe des Körpers multipliziren, indem diese soviel mal über einander liegt, als der Körper hoch ist, wodurch man den Umfang der Seitenfläche erhält; und wird hierauf zu diesem die doppelte Grundfläche addirt, so erhält man die ganze Oberfläche des Körpers.

§ 325.

Beispiele zur Erläuterung. In dem ersten Beispiele des § 323, war die Seite ab der dreiseitigen regulären Grundfläche = 18′, daher ist der Umfang

derselben $= 3 \times 18' = 54'$; und die Höhe des Körpers cq war $= 43'$; also ist der Umfang der Seitenflächen $= 54' \times 43' = 23^\circ 22 \square'$. Und da die Grundfläche in diesem Beispiele $= 1^\circ 39' 50 \square''$ war, so ist solche doppelt genommen $= 2^\circ 79'$. Wird nun diese zu der ganzen Seitenfläche, die $= 23^\circ 22 \square'$ ist, addirt, so erhält man die Oberfläche dieses Körpers, welche demnach $= 23^\circ 22' + 2^\circ 79' = 26^\circ 01 \square'$ ist.

Zu dem 2ten Beispiele war die Seite ab des Parallelepipedums $= 12'$ und die Seite bc $= 10'$; also ist der Umfang der Grundfläche dieses Körpers $= 12 + 12 + 10 + 10 = 44'$; wird dieser durch die Höhe des Körpers ch $= 20'$ multiplizirt, so erhält man $= 44' \times 20' = 8^\circ 80 \square'$ zur ganzen Seitenfläche; und wird hierzu die doppelte Grundfläche, welche $= 2 \times 120' = 240'$ ist, addirt, so erhält man zur Oberfläche dieses Körpers $= 2^\circ 40 \square' + 8^\circ 80 \square' = 11^\circ 20 \square'$. Und in dem 3ten Beispiele war der Umfang des Fünfecks $= 820''$, folglich ist die ganze Seitenfläche $= 820'' \times 328'' = 26^\circ 89' 60 \square''$. Wird zu dieser die doppelte Grundfläche, welche $= 2 \times 4^\circ 63' 30 \square'' = 9^\circ 26' 60 \square''$ ist, addirt, so erhält man zur Oberfläche dieses Körpers $= 9^\circ 26' 60 \square'' + 26^\circ 89' 60 \square'' = 36^\circ 16' 20 \square''$.

§ 326.

Zusatz. Wird demnach der kubische Inhalt des Prisma $= K$, die Grundfläche $= G$ und die Höhe des Körpers $= h$ gesetzt, so ist

1. $K = G \times h = Gh$

2. $G = \frac{K}{h}$ und

3. $h = \frac{K}{G}$.

§ 327.

Zusatz. Man kann daher die Grundfläche dieses Körpers, wenn sein kubischer Inhalt und seine Höhe bekannt sind, dadurch finden, daß man den kubischen Inhalt durch die Höhe desselben dividirt; und wird solcher durch die Grundfläche dividirt, so erhält man die Höhe wieder.

Wird die Grundfläche dieses Körpers wieder in ihre Theile zertheilt, wodurch ihr Produkt entstanden ist, so kann man aus jenen drei Formeln noch andere herleiten, welche aber für jede Art des Prisma's besonders müssen hergeleitet werden, und die daher hier zu viele Weitläufigkeit verursachen würden.

§ 328.

Grundsätze. Zwei Prismen sind sich demnach am Raume gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben; daher muß auch ein rechtwinkliges einem schiefwinkligen unter diesen Bedingungen am Raume gleich sein. Folglich müssen sich auch zwei Prismen zu einander verhalten:

1. Wenn sie gleiche Höhen haben, wie ihre Grundflächen.

2. Wenn sie gleiche Grundflächen haben, wie ihre Höhen.

3. Wenn sie ungleiche Grundflächen und ungleiche Höhen haben, wie die Produkte aus ihren Grundflächen in ihre Höhen.

§ 329.

Zusatz. Aehnliche Prismen, das sind solche, bei welchen 1. ähnliche Grundflächen sind, und 2. bei welchen die Grundfläche und die Höhe des einen mit der Grundfläche und Höhe des andern in eine Proportion gebracht werden können, verhalten sich zu einander, wie die Würfeln ähnlicher Seiten der Grundflächen oder wie die Würfeln ihrer Höhen.

§ 330.

Aufgabe. Wenn demnach die Seite eines solchen Prisma's = 4′ und die Seite eines andern = 12′ ist, wie groß ist der Raum von diesem gegen den von jenem?

Da die Seite von dem ersten = 4′
die Seite von dem andern = 12′ ist,
so verhält sich $4^3 : 12^3 = 64 : 1728 = 1 : 27$.
Daher ist der kubische Inhalt von dem 2ten 27 mal größer als der von dem ersten.

§ 331.

Sollen zwei Prismen zusammen addirt, oder von einander abgezogen, oder durch einander multiplizirt oder dividirt werden, so müssen solche 1. gleiche Höhen, und 2. ähnliche Grundflächen haben. Haben sie solches, so werden ihre Grundflächen nach dem § 83 und § 184 zusammen addirt, von einander abgezogen ꝛc. wobei ihnen gleiche Höhen gegeben werden, indem sie sich, wenn sie gleiche Höhen haben, nach dem § 328 zu einander verhalten wie ihre Grundflächen, die sich aber nach dem § 182 zu einander verhalten, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

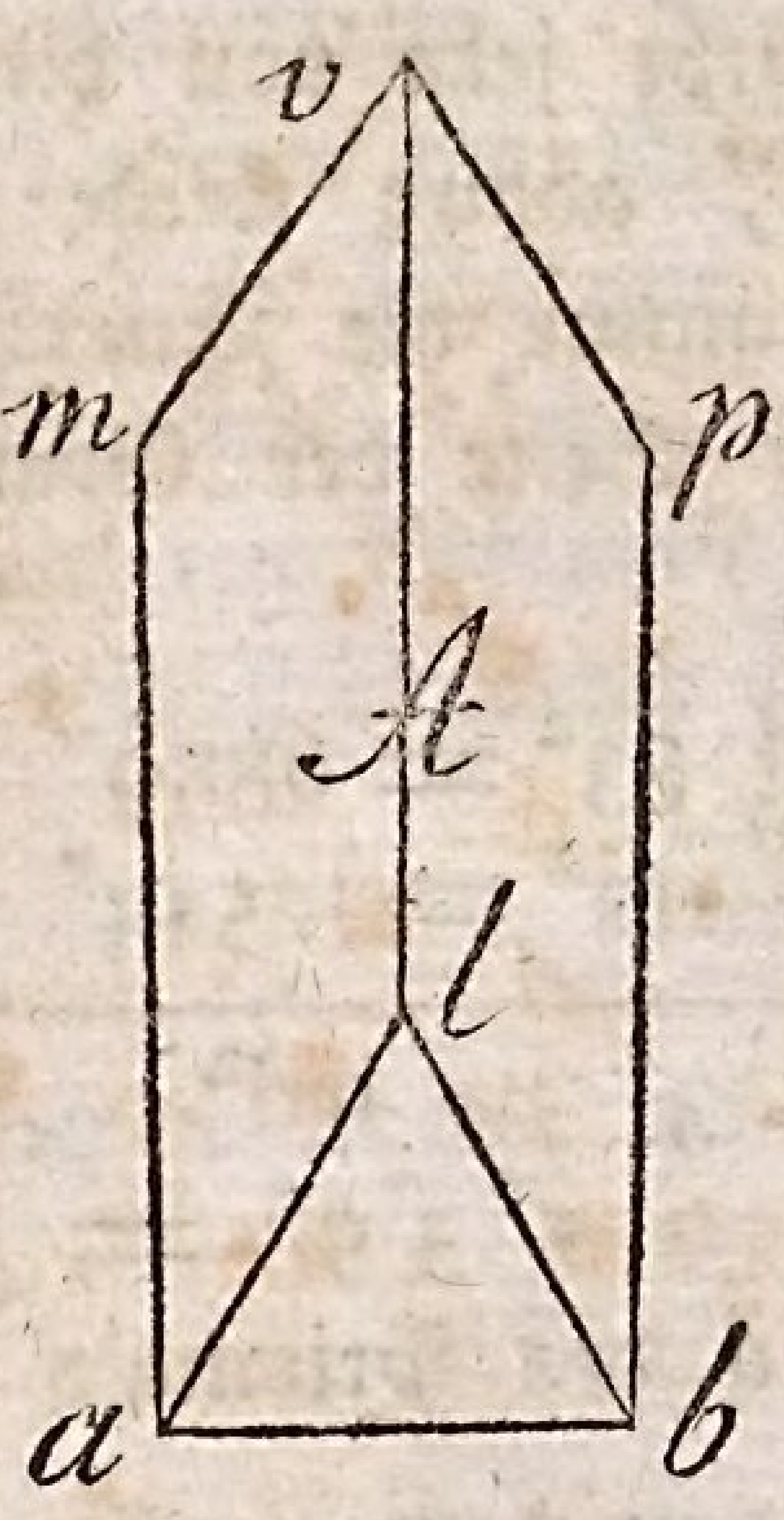
Bei den ähnlichen Prismen kann dieses nur durch Addition, Subtraktion u. s. w. der Würfeln ähnlicher Seiten oder der Höhen ausgeführt werden; und bei den übrigen Prismen müssen ihre kubischen Räume selbst zusammen addirt, oder von einander abgezogen u. s. w. werden, wenn man solche zu einander addiren, oder von einander subtrahiren u. s. w. will.

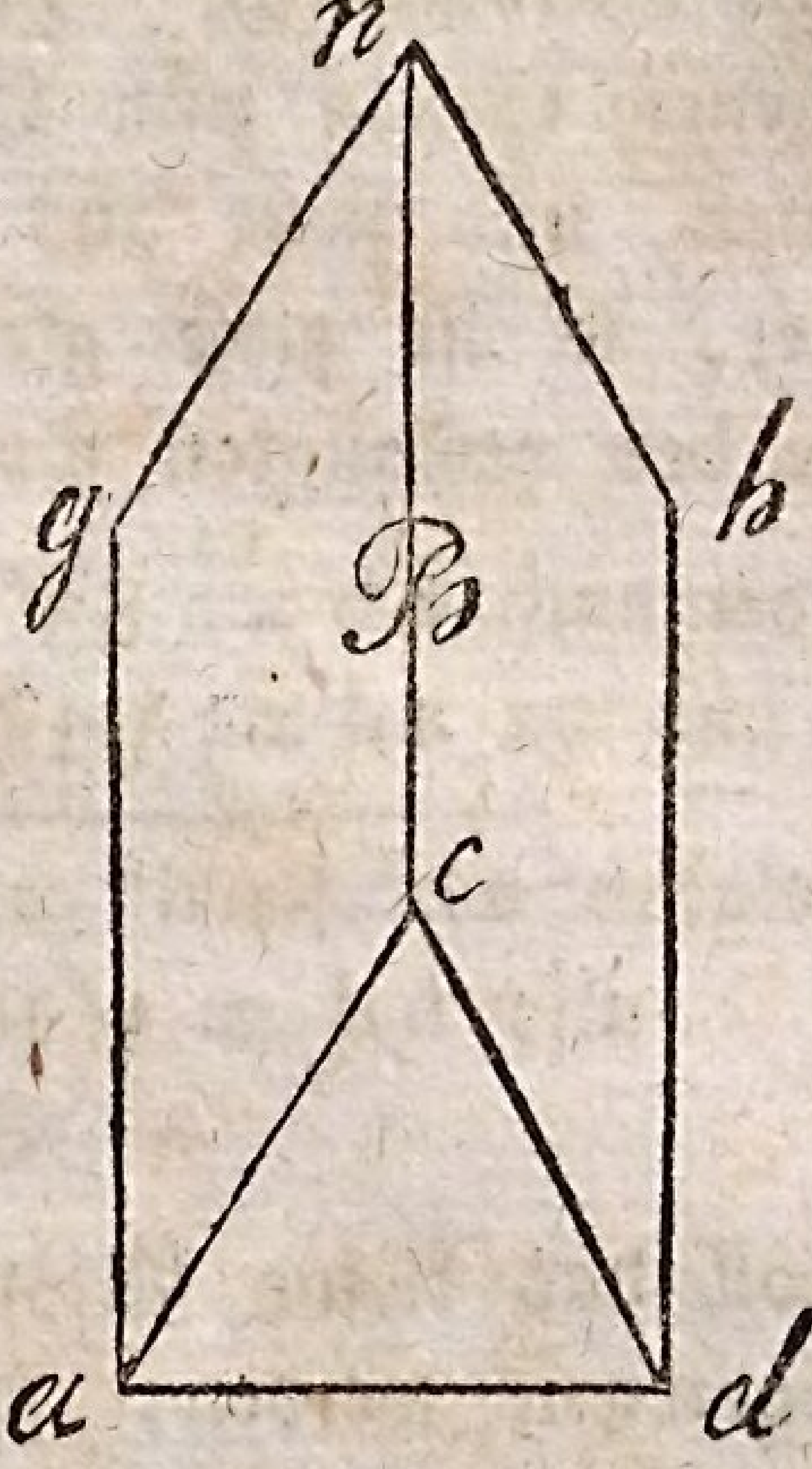
§ 332.

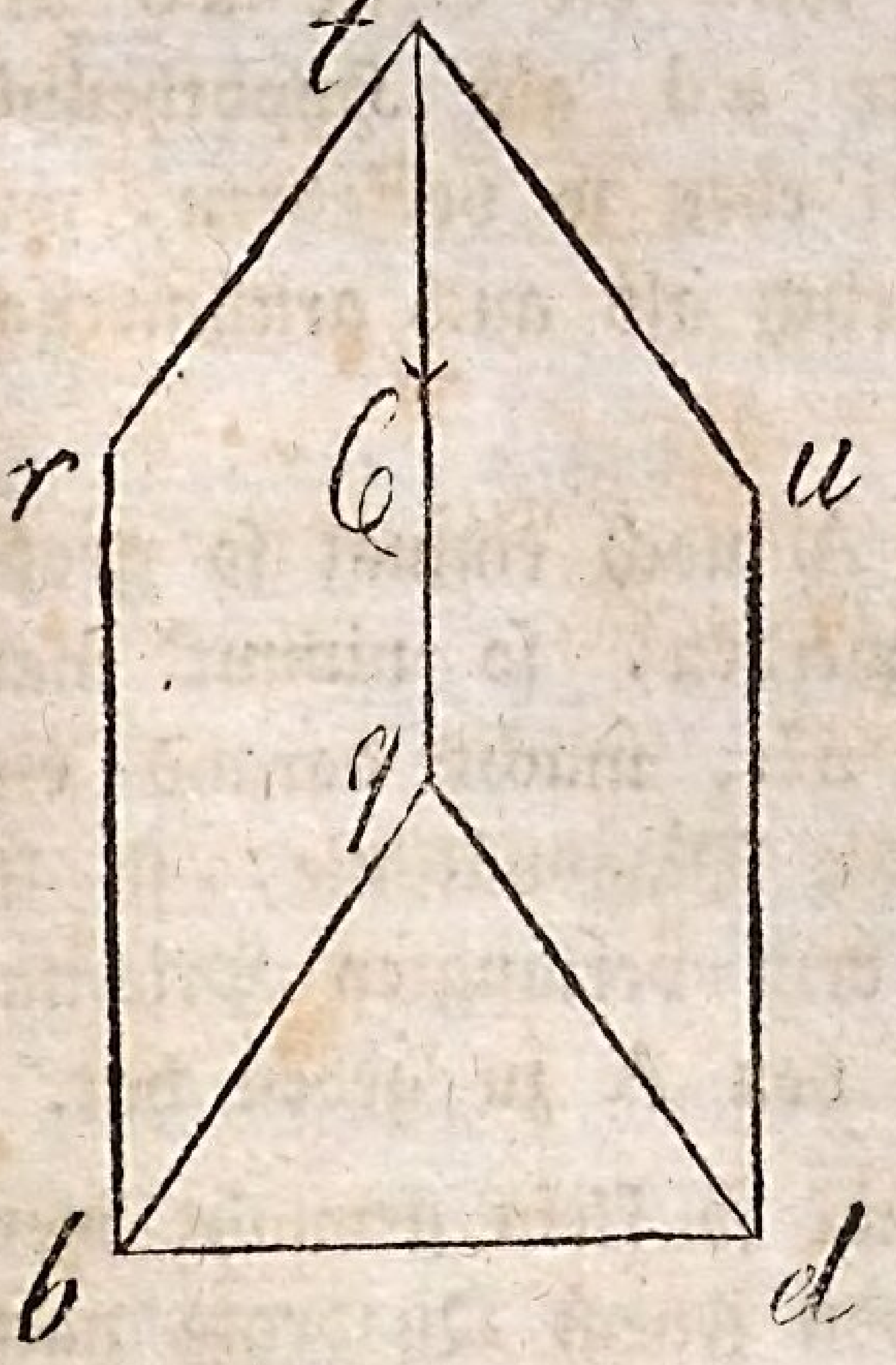
Einige Beispiele zur Erläuterung:

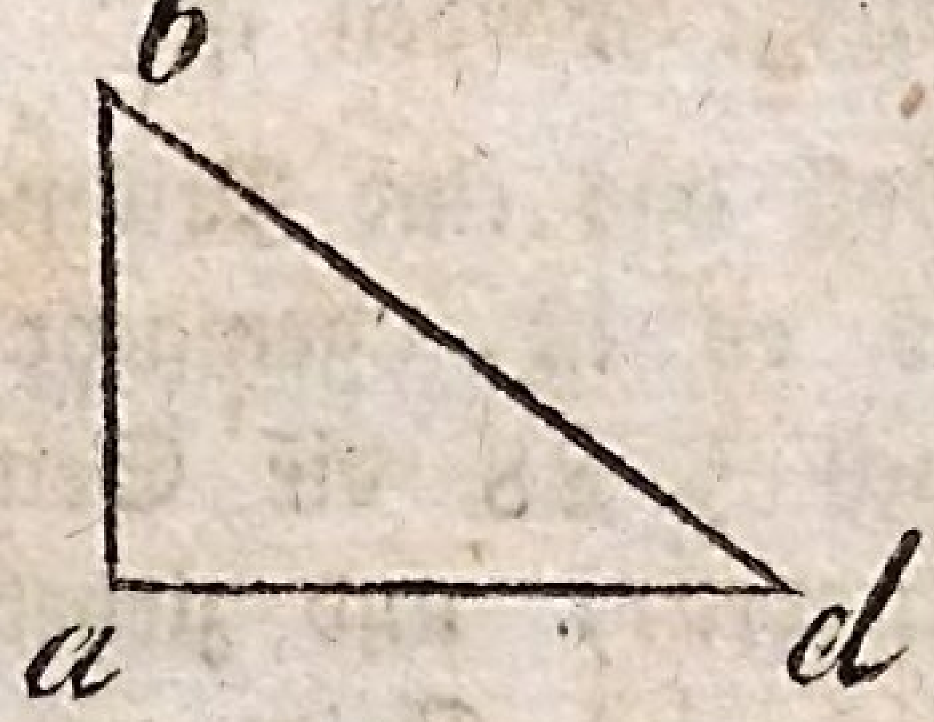
1. Zwei Prismen A und B, welche ähnliche Grundflächen und gleiche Höhen haben, wovon die Seite ab des einen = 83″ und die Seite ad des andern = 112″ ist, zusammen zu addiren.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)









Auflösung. a) Geometrisch. Man setze ab und ad senkrecht mit ihren Endpunkten zusammen, und ziehe bd, so ist bd die Seite der Grundfläche eines Prisma's, welches, wenn man ihm die Höhe von dem Prisma A oder B gegeben hat, so groß ist, als die beiden zusammen genommen sind.

b) Arithmetisch. Man erhebe jede von diesen gegebenen Seiten zum Quadrat, addire solche zusammen, und ziehe aus der Summe die Quadratwurzel, so ist diese gleich der Seite der Grundfläche des verlangten Prisma's.

Da demnach $ab = 83''$, so ist $83^2 = 6889''$
und da $ad = 112''$, — — $112^2 = 12544''$

Folglich $ab^2 + ad^2 = 19433'' = bd^2$
also $bd = \sqrt{19433''} = 1^\circ 3' 9''$ = der Seite bd des Prisma's C.

2. Soll das kleine Prisma A von dem großen B abgezogen werden, so wird die Seite ab als Cathete und die Seite ad als Hypothenuse daran gesetzt, und dabei eben so verfahren, wie im § 87, sowol geometrisch als auch arithmetisch gezeigt worden ist.

3. Soll das eine Prisma A noch einmal so groß, als es ist, gemacht werden, so nimmt man nach § 88 die Seite ab, macht daraus ein Quadrat, und ziehet die Diagonallinie, so ist dieß eine Seite von dem verlangten Prisma, welchem man die Höhe von A zu geben hat.

4. Soll solches noch einmal so klein gemacht werden, so nimmt man von jenem Quadrate nach § 91 die halbe Diagonallinie, so ist diese die eine Seite der Grundfläche von dem verlangten Prisma mit der Höhe von A.

5. Zwei ähnliche fünfseitige Prismen zusammen zu addiren, wovon die Seite der Grundfläche des einen $= 16'$, und die des andern $= 22'$ ist.

Auflösung. Man erhebe jede Seite zum Würfel, addire die Würfeln von beiden Seiten zusammen, und ziehe aus deren Summe die Kubikwurzel; so ist solche die eine Seite der Grundfläche des verlangten Prisma's.

Es ist demnach $16^3 = 4096'$

$$22^3 = 10648'$$

$$16^3 + 22^3 = 14744'.$$

Daher $\sqrt{14744'} = 24' =$ der verlangten Seite.

§ 333.

Soll ein dreiseitiges oder vielseitiges Prisma in ein Parallelepipedum verwandelt werden, so darf man nur die Grundfläche desselben in das verlangte Parallelogramm nach dem 2ten Abschnitte verwandeln, und dieser verwandelten Grundfläche die Höhe des Prisma's geben.

Von der Pyramide.

§ 334.

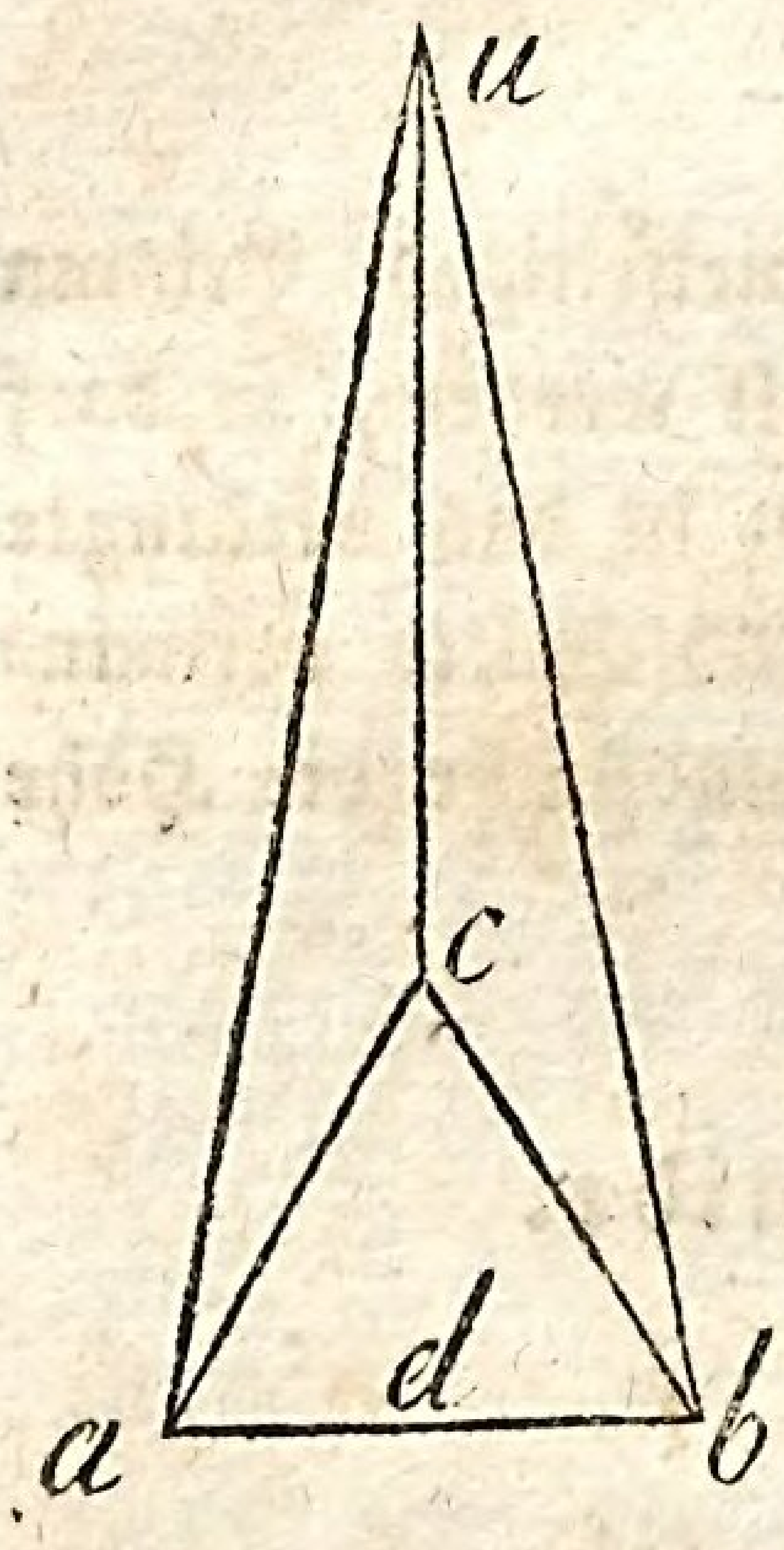
Erklärung. Da die Grundfläche einer Pyramide eben so verschieden als die eines Prisma's sein kann, so findet bei ihr eben der Unterschied von einer 3seitigen, 4seitigen und vielseitigen, von einer regulären und irregulären Statt.

Und da ferner jede Pyramide den 3ten Theil von einem Prisma ausmacht, welches mit ihr gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat, so muß ihr kubischer Inhalt eben so, wie der von einem

Prisma berechnet werden und zwar dadurch, daß man die Grundfläche der Pyramide mit ihrer Höhe multiplizirt und das Produkt daraus durch 3 dividirt, oder die Grundfläche mit dem dritten Theile ihrer Höhe multiplizirt.

§ 335.

Einige Beispiele zur Erläuterung:

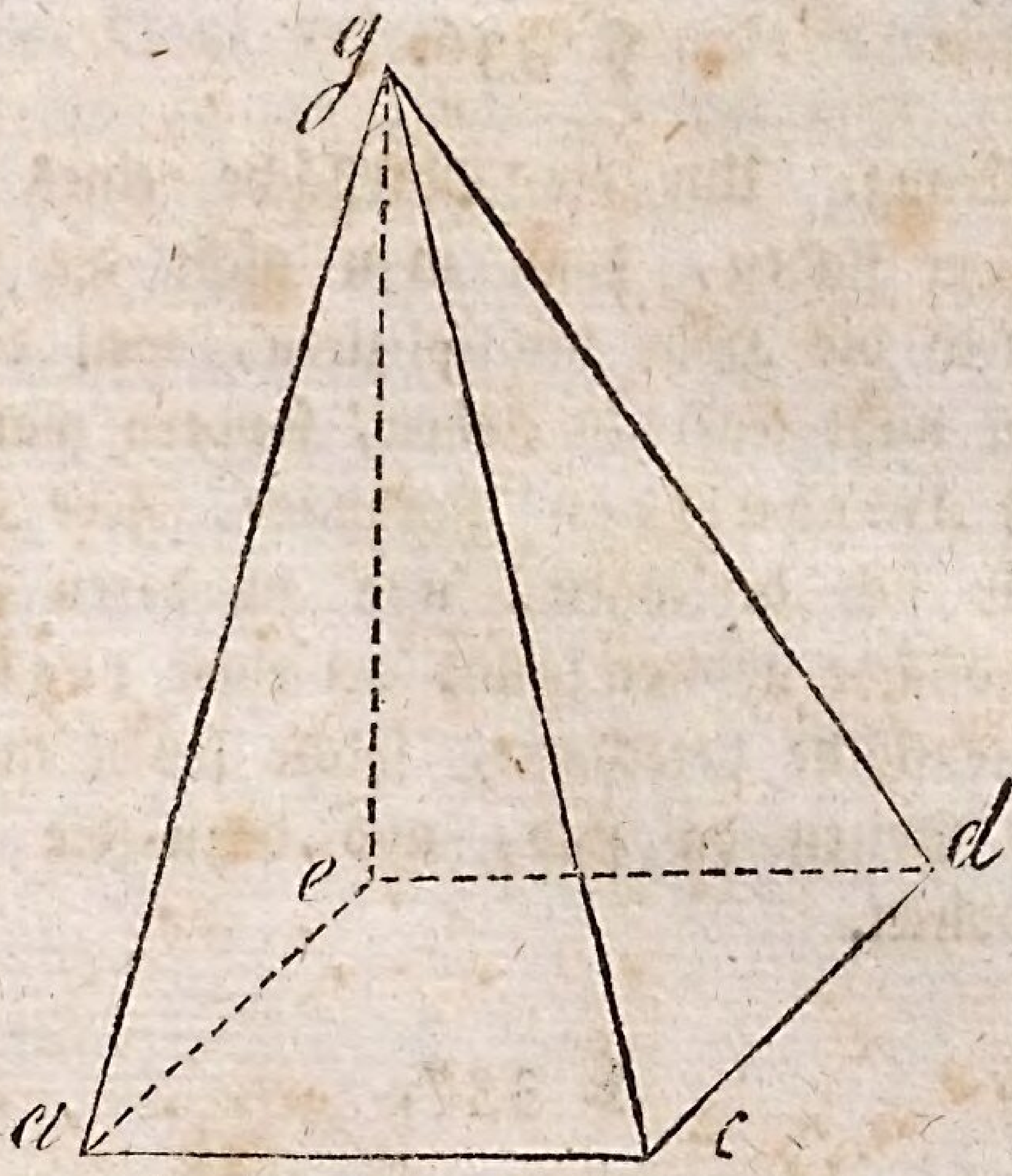


1. Es sei bei einer dreiseitigen regulären Pyramide die Seite ab = 98″, die Höhe cd des $\triangle$abc = 84″ und die Höhe der Pyramide = 217″, wie groß ist dessen kubischer Inhalt?

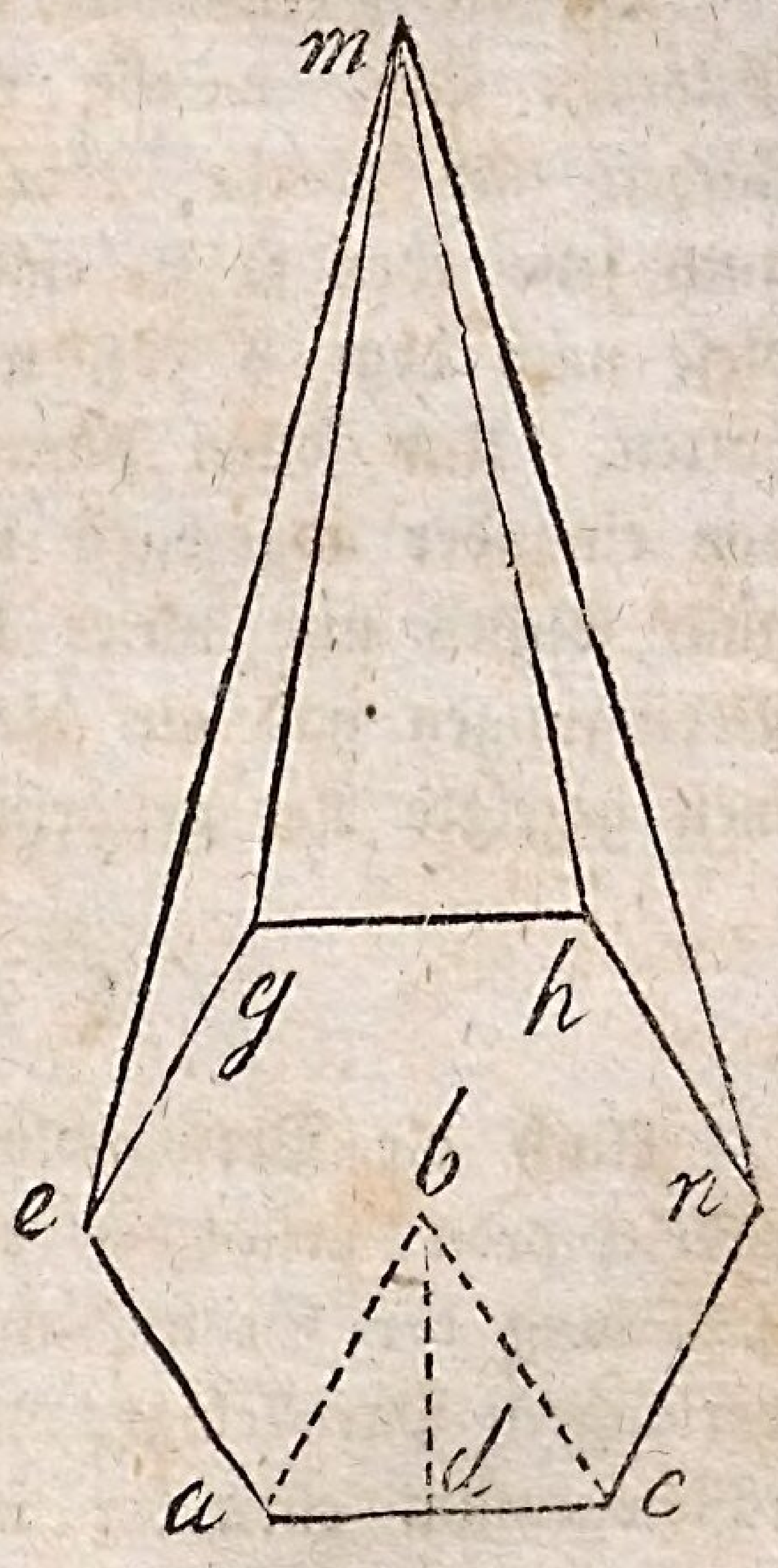
Da ab = 98″ und cd = 84″ ist, so ist die Grundfläche der Pyramide = 4116□″, und der kubische Inhalt derselben $= \frac{4116'' \times 217''}{3} =$ 297′ 724⬚″.

2. Es sei bei einer vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche ein Rektangel bildet, (s. Fig. auf folg. Seite) ac = 162″, cd = 114″, und die Höhe der Pyramide = 27′; wie groß ist deren kubischer Inhalt?

Da ab = 162″ und cd = 114″ ist, so ist die Grundfläche = 1°84′68□″ und der kubische Inhalt der Pyramide $= 18468'' \times \frac{270''}{3} =$ 1°662′120⬚″.



Es sei die Seite ac einer 6seitigen regulären Pyramide = 92″ und die Höhe bd des △abc = 76″, und die Höhe der Pyramide = 30′; wie groß ist der kubische Inhalt davon?



Da die Seite ac = 92″ und die Höhe bd = 76″ ist, so ist △abc = 3496″, und die Grundfläche = 3496″ × 6 = 20976 □″, und der kubische Inhalt dieser Pyramide = 20976 × $\frac{300''}{3}$ = 2°097′600 ⬚″.

§ 336.

Erklärung. Um die Oberfläche eines solchen Körpers zu finden, kann man nicht die Grundfläche durch die Höhe multipliziren, weil die Seitenflächen nicht senkrecht stehen, sondern man muß, bei einer irregulären Pyramide, jede Seitenfläche für sich berechnen, und zu deren Summe die Grundfläche addiren; und bei einer regulären eine Seitenfläche berechnen, solche soviel mal nehmen als Seiten da sind, und dazu die Grundfläche addiren.

§ 337.

Da die Pyramiden der dritte Theil von den Prismen sind, welche mit ihnen gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so müssen sich auch jene eben so zu einander verhalten, wie sich diese nach dem § 328 und 329 zu einander verhalten. Und sollen Pyramiden zu einander addirt, von einander abgezogen u. s. w. werden, so kann auch solches nur unter den im § 331 angeführten Bedingungen und auf die im § 332 bei den Prismen gezeigte Art geschehen.

§ 338.

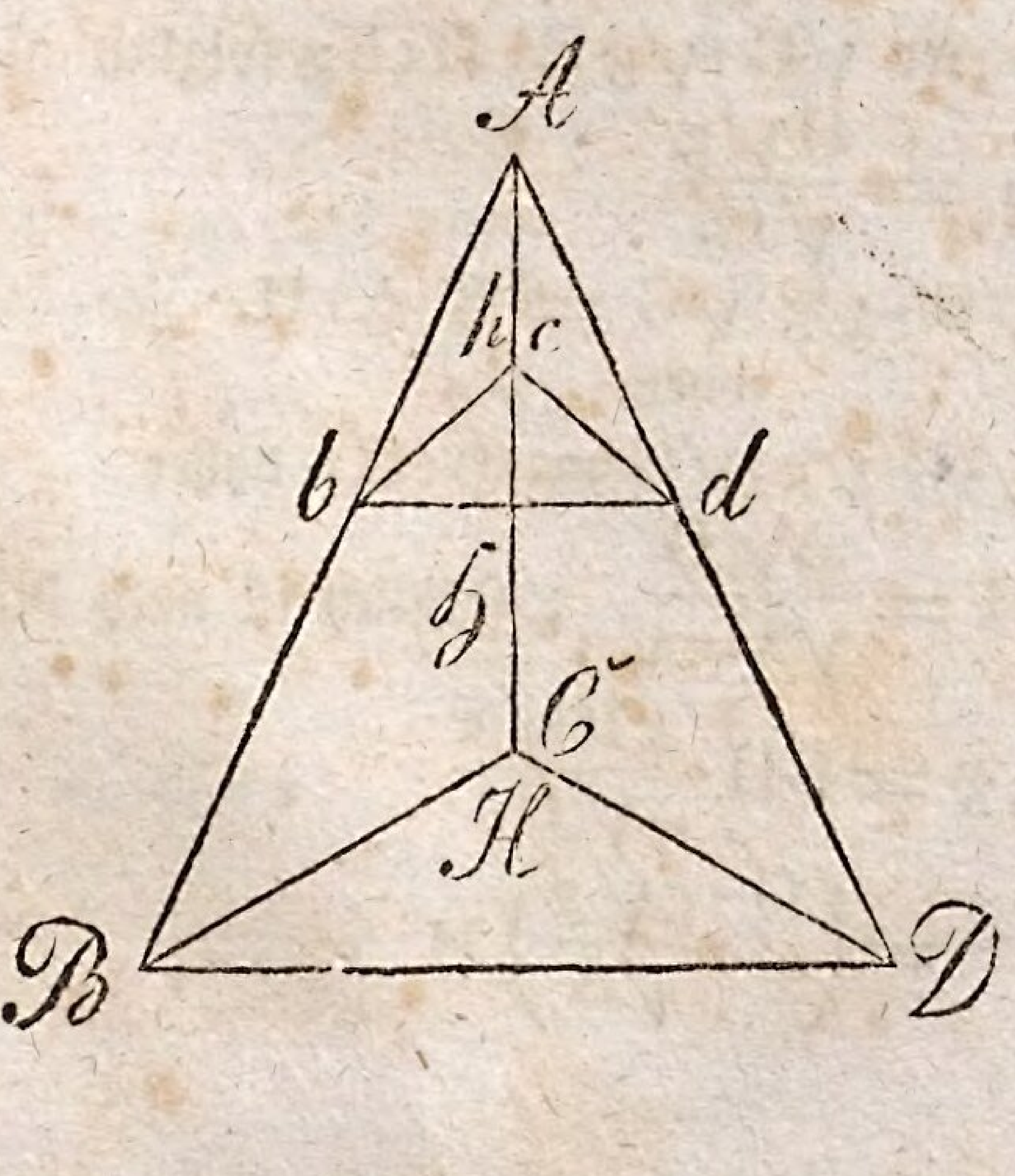
Auch die Verwandlung dieser Körper in Parallelepipeda geschiehet ebenfalls durch die Verwandlung der Grundflächen der Pyramiden in die verlangten Parallelogramme, worauf aber das Parallelogramm entweder in 3 gleiche Theile, mit

der einen Seite parallel, eingetheilt werden muß, wovon alsdann ein Theil zur Grundfläche des Parallelepipedums genommen wird, und wobei die Höhe unverändert bleibt, oder wobei die verwandelte Grundfläche so bleibt, wie sie verwandelt worden ist, wofür aber von der Höhe der Pyramide der dritte Theil zur Höhe des Parallelepipedums genommen wird.

Von der abgekürzten Pyramide.

§ 339.

Um den kubischen Inhalt der abgekürzten Pyramide zu erhalten, muß man den kubischen Inhalt der ganzen Pyramide ABCD berechnen, und davon den der kleinen Pyramide Abcd abziehen.



§ 340.

Zusatz. Zur Erleichterung dieser Berechnungsart und zur leichtern Auffindung der verschiedenen Höhen und Grundflächen dieses Körpers mögen folgende Formeln dienen. Wenn demnach der körperliche Raum der ganzen Pyramide ABCD $= P$, der der kleinen Pyramide Abcd $= p$ und der der abgekürzten BbdD $= \mathfrak{P}$ gesetzt; ferner wenn die Höhe der ganzen Pyramide $= H$, die der kleinen $= h$, und die der abgekürzten $= \mathfrak{H} = H - h$, und die Grundfläche der ganzen Pyramide $= G$ und die der kleinen $= g$ angenommen wird, so ist

1. $P = \frac{1}{3} GH$
2. $p = \frac{1}{3} gh$
3. $\mathfrak{P} = P - p = \frac{1}{3} GH - \frac{1}{3} gh = \frac{1}{3}(GH - gh)$,

also 4. $3\mathfrak{P} = GH - gh$.

Nun verhält sich aber

$$G : g = H^2 : h^2$$

daher $\sqrt{G} : \sqrt{g} = H : h$; folglich ist

5. $h = \dfrac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G}}.$

6. $\sqrt{G} - \sqrt{g} : \sqrt{G} = H - h : H$

oder

$\sqrt{G} - \sqrt{g} : \sqrt{G} = \mathfrak{H} : H$; daher

7. $H = \dfrac{\mathfrak{H}\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$; folglich ist nach No. 4 u. 5

8. $3\mathfrak{P} = GH - \dfrac{gH\sqrt{g}}{\sqrt{G}}.$

$$= \left(G - \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \right) H$$

$$= \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \times \mathfrak{H}; \text{ also}$$

$$9.\ \mathfrak{P} = \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \times \frac{\mathfrak{H}}{3}.$$

Wird bei den Grundflächen, die sich hier ähnlich sind, die ähnliche Seite der Grundfläche mit S und die der kleinen mit s bezeichnet, so verhält sich

$$G : g = S^2 : s^2$$

oder

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = S : s; \text{ daher ist}$$

$$10.\ g = \frac{G s^2}{S^2} \text{ und}$$

$$11.\ G = \frac{g S^2}{s^2}$$

$$12.\ \sqrt{G} = \frac{S\sqrt{g}}{s}. \text{ Daher}$$

$$13.\ \mathfrak{P} = \frac{\frac{G S\sqrt{g}}{s} - g\sqrt{g}}{\frac{S\sqrt{g}}{s} - \sqrt{g}} \times \frac{\mathfrak{H}}{3}.$$

$$= \left(\frac{G S\sqrt{g} - s g\sqrt{g}}{s} : \frac{S\sqrt{g} - s\sqrt{g}}{s}\right) \frac{\mathfrak{H}}{3}$$

$$= \left(\frac{(G S - s g)\sqrt{g}}{s} : \frac{(S - s)\sqrt{g}}{s}\right) \times \frac{\mathfrak{H}}{3}.$$

$$= \frac{G S - s g}{S - s} \times \frac{\mathfrak{H}}{3}$$

$$= \frac{G S - \frac{G s^3}{S^2}}{S - s} \times \frac{\mathfrak{H}}{3} \text{ nach No. 10.}$$

$$=\left(\frac{(S^3-s^3)G}{S^2}:(S-s)\right)\times\frac{\mathfrak{H}}{3}$$

$$=\frac{(S^3-s^3)G}{(S-s)S^2}\times\frac{\mathfrak{H}}{3}$$

14. $\mathfrak{P}=\frac{S^3-s^3}{S-s}\times\frac{G\mathfrak{H}}{3S^2}=(S^2+Ss+s^2)\frac{G\mathfrak{H}}{3S^2}$.

Und nach No. 11 ist auch

15. $\mathfrak{P}=(S^2+Ss+s^2)\frac{g\mathfrak{H}}{3s^2}$

16. $=\left(g\frac{S^2}{s^2}+g\frac{S}{s}+g\right)\frac{\mathfrak{H}}{3}$.

Nun ist nach No. 11

17. $G=g\frac{S^2}{s^2}$ folglich ist

18. $\sqrt{\frac{G}{g}}=\frac{S}{s}$, und

19. $\frac{gS}{s}=g\sqrt{\frac{G}{g}}=\sqrt{\frac{Gg^2}{g}}=\sqrt{Gg}$; daher ist

20. $\mathfrak{P}=(G+g+\sqrt{Gg})\frac{\mathfrak{H}}{3}$ aus 16. 17. 18. 19 hergeleitet.

Anmerkung. Der kubische Inhalt der abgekürzten Pyramide läßt sich demnach finden:

1. Aus dem kubischen Inhalte der großen und kleinen Pyramide nach No. 3.

2. Aus den Grundflächen dieser beiden Pyramiden, und aus der Höhe der abgekürzten, nach No. 9 und 20. Und

3. Aus den ähnlichen Seiten der beiden Grundflächen und aus einer Grundfläche der großen und

kleinen Pyramide, und der Höhe der abgekürzten Pyramide, nach No. 14 und 15.

Soll die Höhe dieser oder jener Pyramide aus den Grundflächen und einer zu dieser Pyramide nicht gehörenden Höhe gefunden werden, so dienen dazu die Formeln in No. 5. 6 und 7. Und eben so dient zur Aufsuchung der Grundfläche der großen Pyramide aus den ähnlichen Seiten beider Pyramiden, und der Grundfläche der kleinen, die Formel in No. 11 — und zur Aufsuchung der Grundfläche der kleinen, aus jenen Stücken und der Grundfläche der großen, dient die in No. 10. *)

§ 341.

Was endlich die Berechnung der ganzen Seitenfläche einer regulären, abgekürzten Pyramide anbetrifft, so ist solche gleich der der großen, nach Abzuge der der kleinen. Da aber bei der abgekürzten Pyramide der Umfang der Seitenflächen der kleinen gar nicht, und der der großen nur zum Theil vorhanden ist, so muß man aus den Grundflächen beider, wovon die der kleinen, die obere Fläche der abgekürzten, ausmacht, und aus der Höhe der abgekürzten die Höhe der großen, nach No. 7, und daraus die der kleinen, nach No. 5, berechnen. Ist aber die Höhe der großen Pyramide

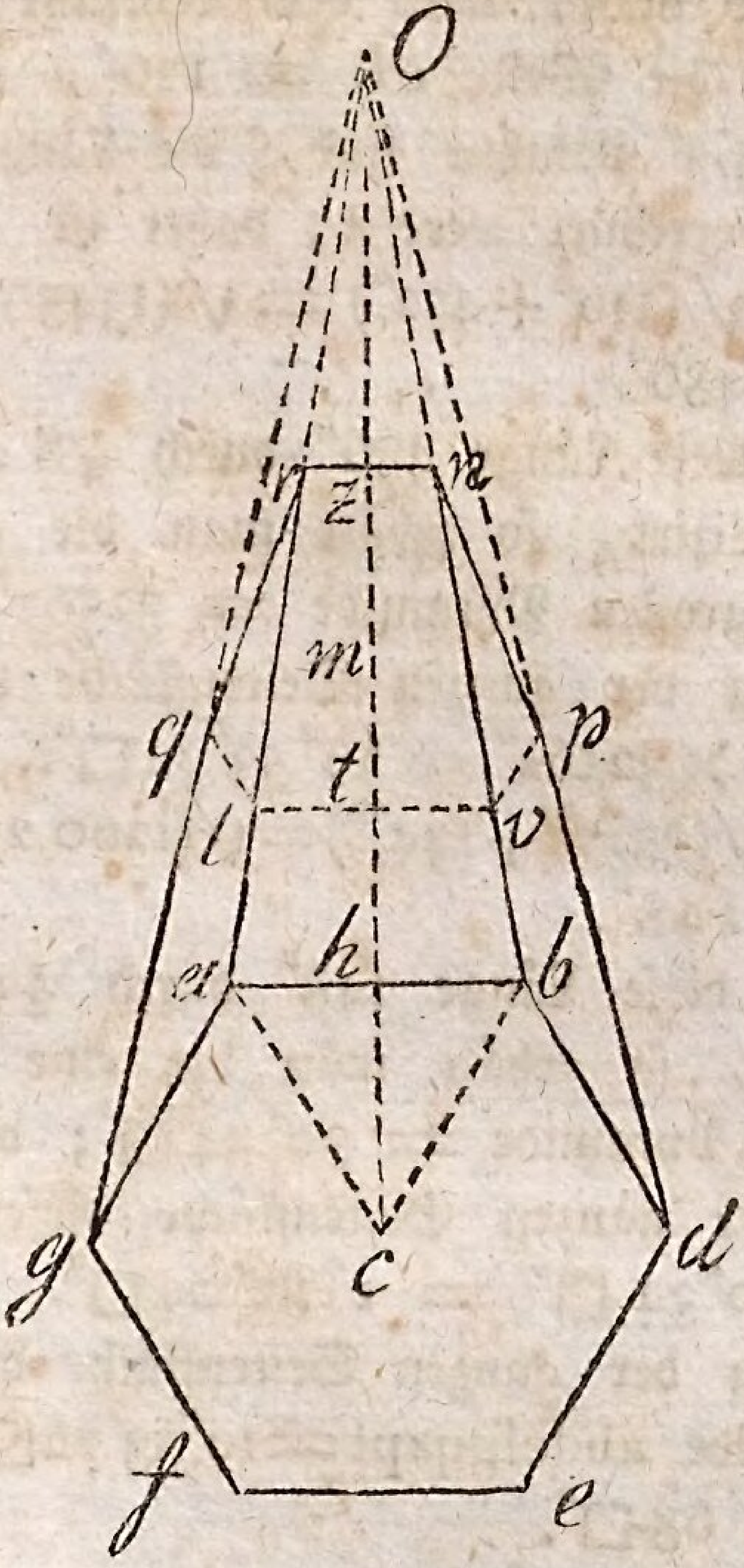
*) Diese Formeln mit Beispielen noch zu begleiten halte ich für überflüssig, indem ich solche, in den vorhergehenden Paragraphen, reichlich damit versehen habe, wodurch jeder, der nur mit den Anfangsgründen der Algebra bekannt ist, dieselben zu verstehen und anzuwenden wird gelernt haben.

bekannt, so läßt sich aus dieser, und aus ihrer Weite von der Mitte der einen Seite des Umfanges der Grundfläche, die Länge der einen Seitenfläche, nach dem Lehrsatze des Pythagoras, berechnen. Und da jede Seitenfläche beider Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck bildet, wovon die gefundene Länge die Höhe, und jene Seite des Umfanges = der Grundlinie desselben ist, so ist der Inhalt desselben leicht daraus zu finden; und wird dieser hierauf so vielmal genommen, als Seiten des Umfanges da sind, so erhält man die ganze Seitenfläche der großen Pyramide. Wird nun auf eben diese Art der der kleinen berechnet, und solcher von dem der großen abgezogen, so erhält man den Umfang der Seitenfläche der abgekürzten Pyramide.

§ 342.

Beispiele zur Erläuterung:

Es sei die Grundfläche abcdefg einer sechsseitigen regulären abgekürzten Pyramide (s. Fig. auf folg. Seite) = 4° 66′ 32 □″ = G, deren Seite ab = S = 134″, die obere Fläche qrnpt oder g = 4366 □″ und deren Seite rn = s = 41″, die Höhe dieser Pyramide oder H = 328″, die Weite von der Höhe bis zum Umfange der großen Grundfläche ch = 113″, und die Weite von der Höhe bis zum Umfange der kleinen Grundfläche zm = 34″ ist; wie groß ist alsdann der Umfang der Seitenfläche dieser abgekürzten Pyramide?



Aus diesen gegebenen Stücken muß demnach gesucht werden:

1. Die Höhe der großen Pyramide, welche nach der 7ten Formel $= \frac{H\sqrt{G}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$ ist;

also $\frac{328\sqrt{46632''}}{\sqrt{46632''}-\sqrt{4366''}} = 472'' =$ der Höhe der großen Pyramide.

Folglich ist

2. $h = H - G = 472'' - 328'' = 144'' =$ der Höhe der kleinen Pyramide.

Hieraus muß, nach dem Lehrsatze des Pythagoras, da die Weite ch = 116″, und die von nm = 35,5″ bekannt sind, die Längen der Seitenflächen berechnet werden; daher ist

3. $Oh = \sqrt{(116^2 + 472'')} = \sqrt{(13456'' + 222784'')}$
$= 486''$.

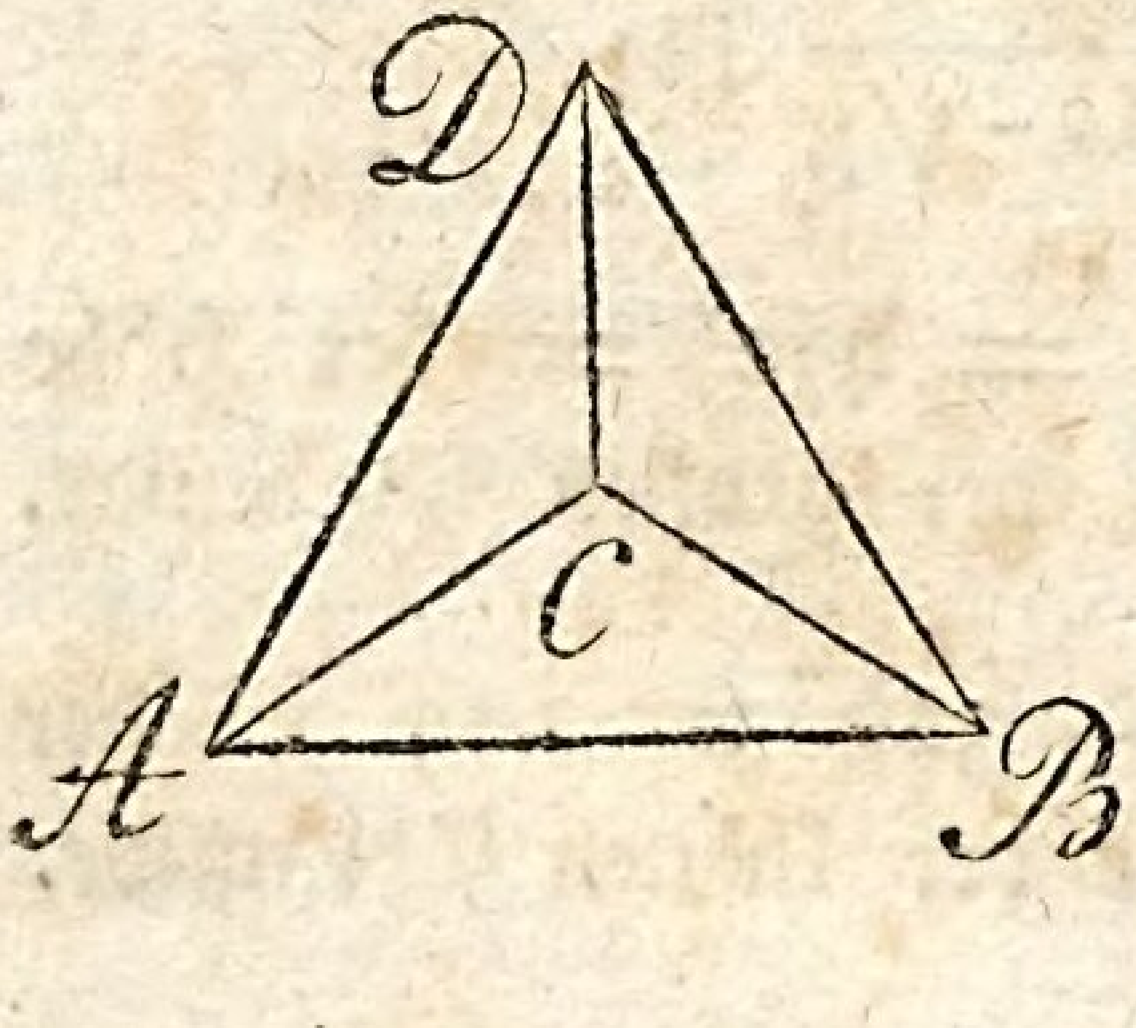
Wird diese Länge 486″ durch $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}ab = 67''$ multiplizirt, so erhält man die eine Seitenfläche der großen Pyramide = 32562″; daher ist der Umfang der ganzen Seitenfläche dieser Pyramide = $6 \times 32562'' = 19^\circ 53' 72 \square''$. Und

4. $Oz = \sqrt{(35{,}5''^2 + 144''^2)} = \sqrt{(1260{,}25'' + 20736'')}$
$= 148''$.

Wird diese Länge 148″ durch $\frac{1}{2}s = 20{,}5''$ multiplizirt, so erhält man die eine Seitenfläche der kleinen Pyramide = $30' 34 \square''$; daher ist der Umfang der ganzen Seitenfläche dieser Pyramide $= 6 \times 30' 34 \square'' = 1^\circ 82' 04 \square''$. Folglich ist der Umfang der ganzen Seitenfläche der abgekürzten Pyramide abdefgqzpt $= 19^\circ 53' 72 \square'' - 1^\circ 82' 04'' = 18^\circ 51' 68 \square''$.

Vom Tetraedrum.

§ 343.

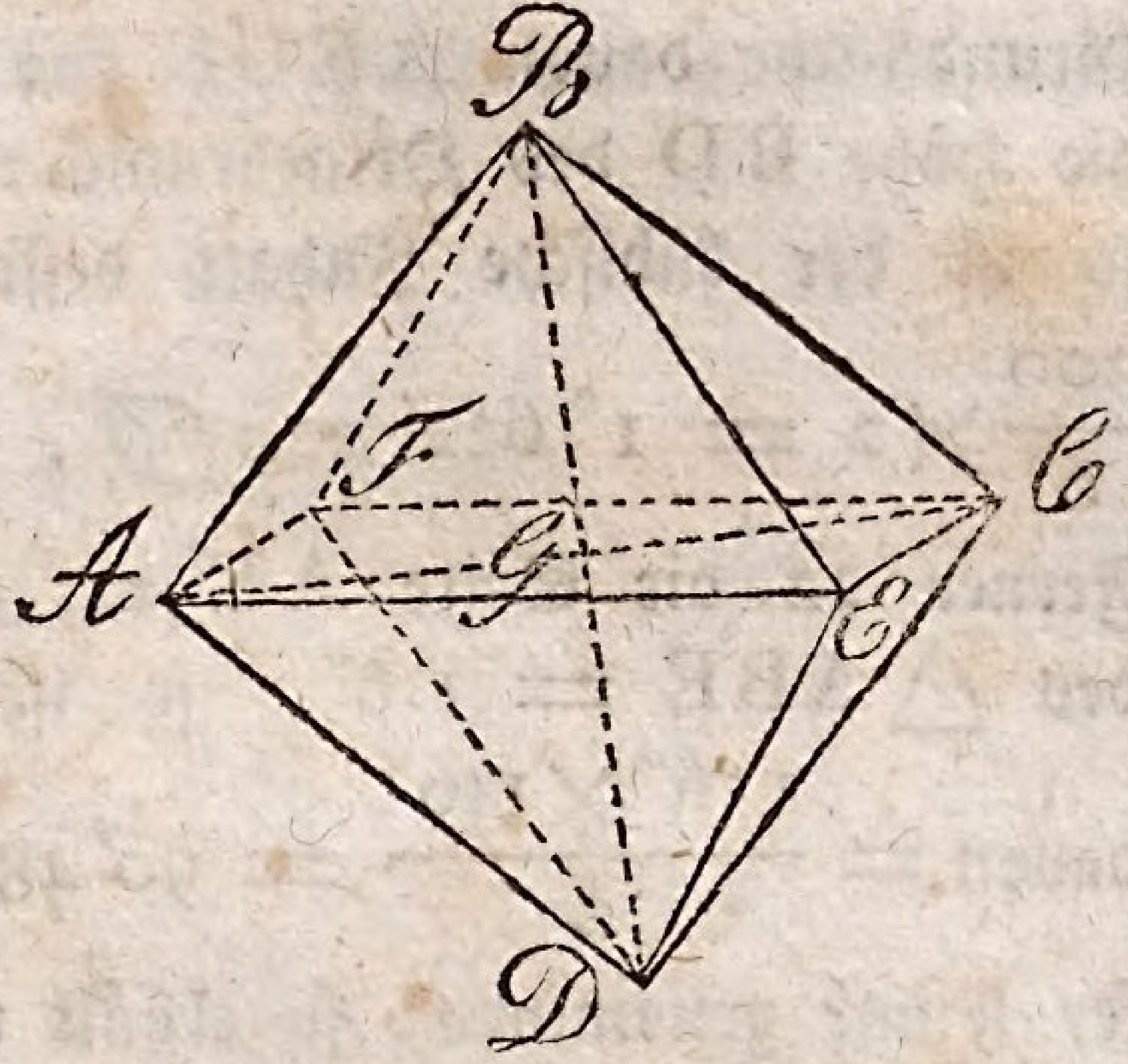


Da dieser Körper eine reguläre dreiseitige Pyramide ist, so wird der kubische Inhalt desselben, nach dem Beispiel im § 335, berechnet; und

da an ihm alle 4 Seitenflächen gleiche gleichseitige Dreiecke sind, so wird, um seine Oberfläche zu finden, nur ein Dreieck berechnet und solches 4 mal genommen.

Vom Oktaedrum.

§ 344.



Da dieser Körper aus zwei, mit gleichen Höhen u. Grundflächen, versehenen Pyramiden bestehet, welche mit ihren Grundflächen, die gleiche Quadrate sind, auf einander stehen, so wird der kubische Inhalt von denselben dadurch gefunden, daß man die Seite AE dieses Quadrats mißt, solche durch sich selbst multiplizirt, wodurch man ihre Grundfläche AECF erhält. Wird nun diese durch $\frac{1}{3}$ der Höhe BG der einen Pyramide, d. i. durch $\frac{1}{6}$ Theil beider Höhen, oder der ganzen Höhe BD des Körpers multiplizirt, und hierauf das Produkt derselben, weil doppelte Pyramiden über einander stehen, 2 mal genommen, so erhält man den kubischen Inhalt des Oktaedrum's.

Soll aber die Oberfläche von diesem Körper gefunden werden, so berechnet man nur eins von

den gleichseitigen Dreiecken und nimmt den Inhalt desselben 8 mal, weil der kubische Raum desselben von 8 gleichen gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen ist.

§ 345.

Ein Beispiel zur Erläuterung:

Es sei die Seite AE des Quadrats der Grundfläche der Pyramide AFCE $= 156''$, so ist die Grundfläche davon AECF $= 2^\circ 43' 36''$; und da die Höhe BD des Oktaedrums $= 2^\circ = 200''$ ist, so ist der kubische Inhalt desselben $= 24336 \times \frac{200}{6} \times 2 = 1^\circ 622' 400$ ⧈″.

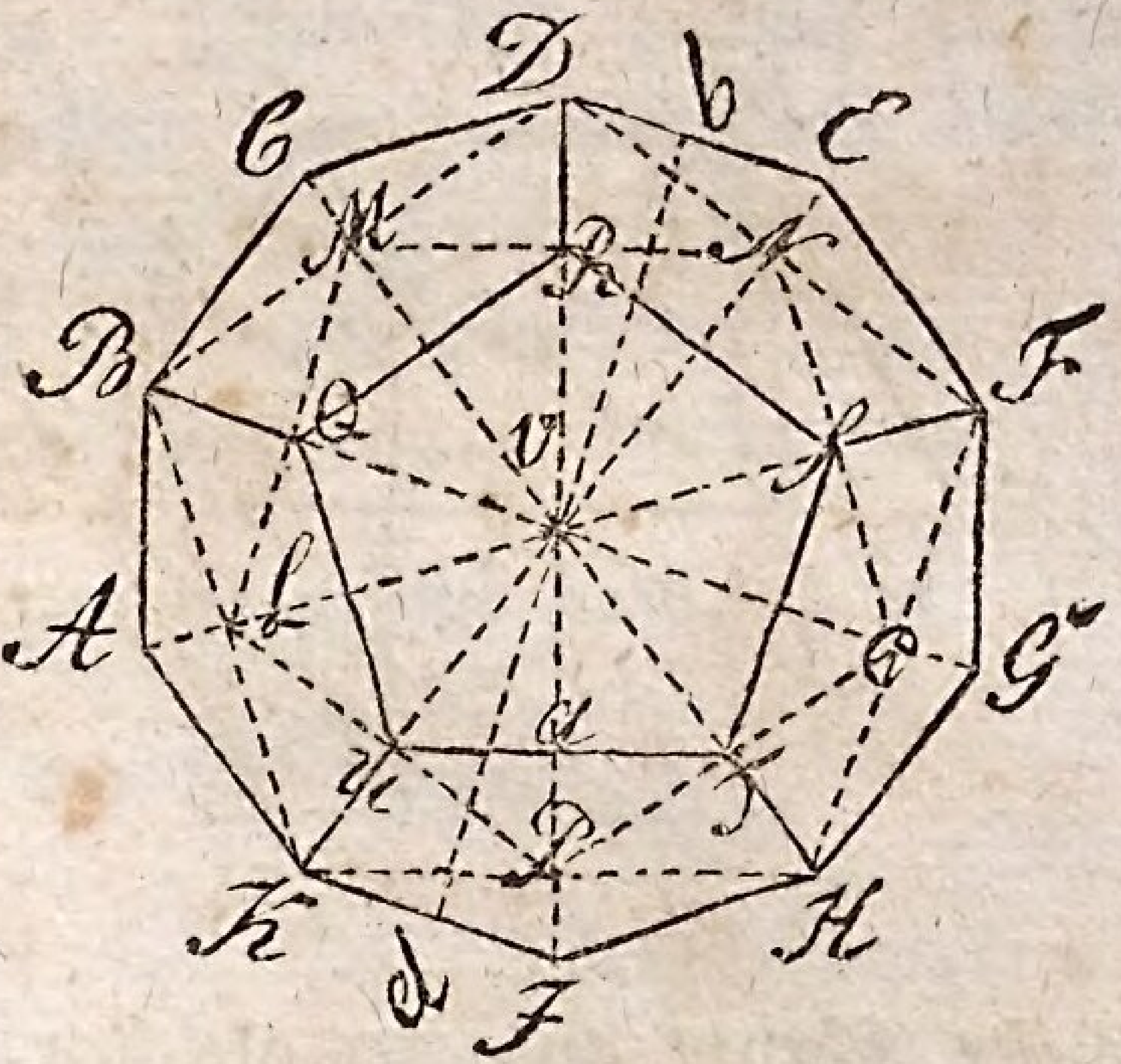
Ferner da die Seite AE $= 156''$ und die Höhe des $\triangle$ABE $= 116''$, so ist der Flächeninhalt davon $= \frac{156'' \times 116''}{2} = 90' 48''$. Wird nun dieser 8 mal genommen, so erhält man die Oberfläche des Körpers, welche demnach $= 9048'' \times 8 = 7^\circ 23' 84$ □″ ist.

Vom Dodekaedrum.

§ 346.

Da dieser Körper (s. Fig. auf folg. Seite) aus 12 gleichen, regulären 5 seitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, welche mit ihren Spitzen in der Mitte des Körpers zusammen stoßen, und mit ihren Grundflächen die Oberfläche derselben bilden,

so darf man, um den kubischen Inhalt desselben zu finden, nur die Grundfläche von der einen Pyramide berechnen, solche durch den 3ten Theil ihrer Höhe, d. i. durch den 6ten Theil der ganzen Höhe des Körpers, multipliziren, und das Produkt davon 12mal nehmen. Man findet diesen Inhalt auch dadurch, daß man die Grundfläche von der einen Pyramide 12mal nimmt, wodurch man die Oberfläche des Körpers erhält, und solche durch den 6ten Theil der Höhe des Körpers multipliziret.



§ 347.

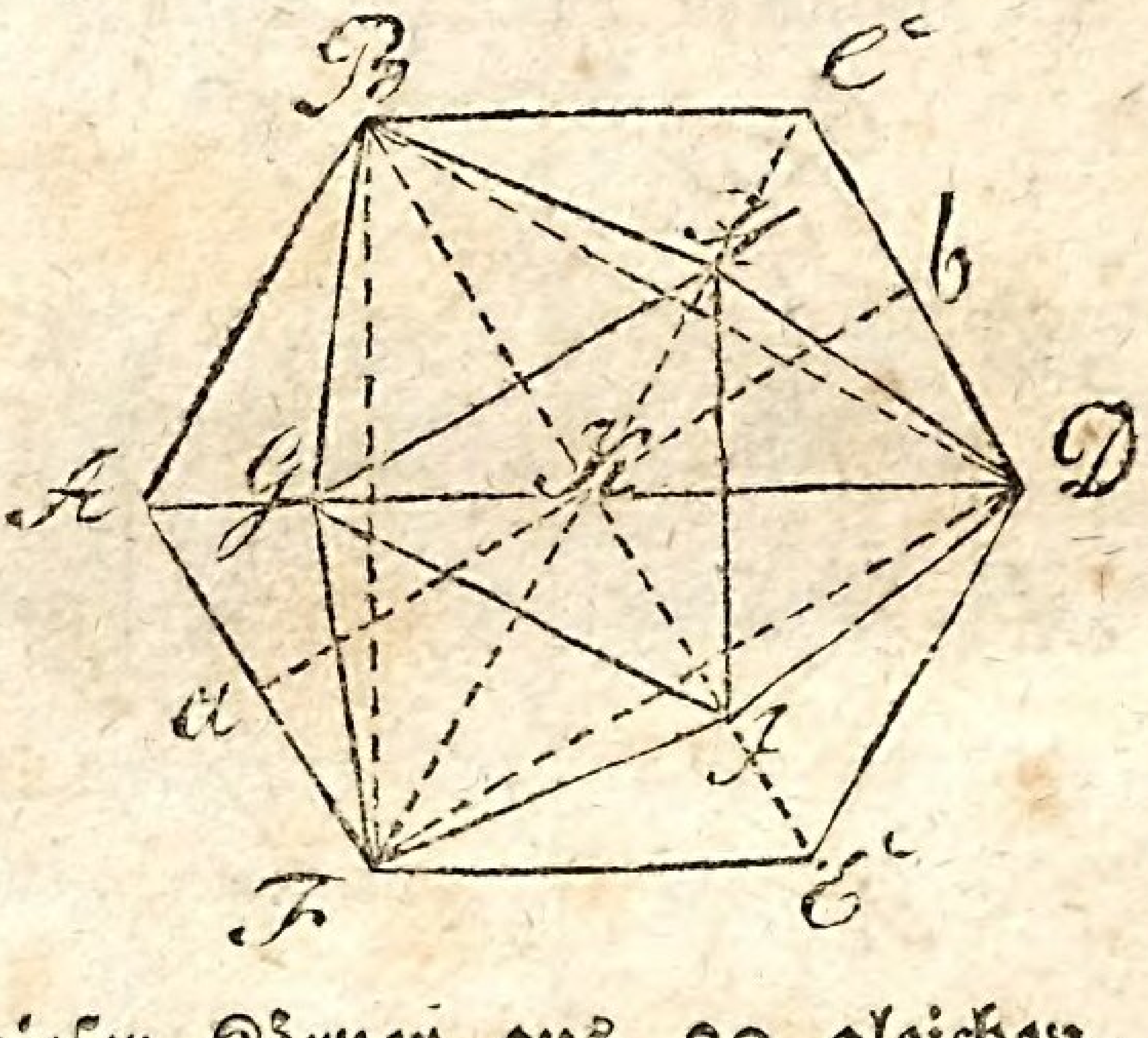
Ein Beispiel zur Erläuterung:

Es sei UT = 81″ und Va = 47″, so ist der Inhalt des Dreiecks UVT = 1903″, und die Oberfläche QRSTU des Körpers = 1903″ × 5 = 9515″, und die Oberfläche desselben = 9515″ × 12 = 11° 41′ 80 □″. Wird nun diese durch den sechsten Theil der Höhe db des Körpers

$= \frac{185}{6}$ multiplizirt, so erhält man $= 114180''$ $\times \frac{185}{6} = 3^{\circ}\,520'\,550$ □″ zum kubischen Inhalte desselben.

Vom Ikosaedrum.

§ 348.



Da dieser Körper aus 20 gleichen, regulären 3seitigen Pyramiden bestehet, welche ebenfalls mit ihren Spitzen in dem Mittelpunkte zusammenstoßen, und mit ihren 20 Grundflächen die Oberfläche des Körpers bilden, so darf man nur, um den kubischen Inhalt dieses Körpers zu erhalten, die Grundfläche von einer Pyramide, welche ein gleichseitiges Deieck ist, berechnen und solche mit dem 6ten Theile der ganzen Höhe des Körpers multipliziren, und hierauf dies Produkt der einen Pyramide 20mal nehmen. Man kann denselben auch dadurch

finden, daß man die Grundfläche der einen Pyramide 20 mal nimmt, wodurch die Oberfläche dieses Körpers gefunden wird, und solche durch den 6ten Theil der Höhe desselben multiplizirt.

§ 349.

Ein Beispiel zur Erläuterung:

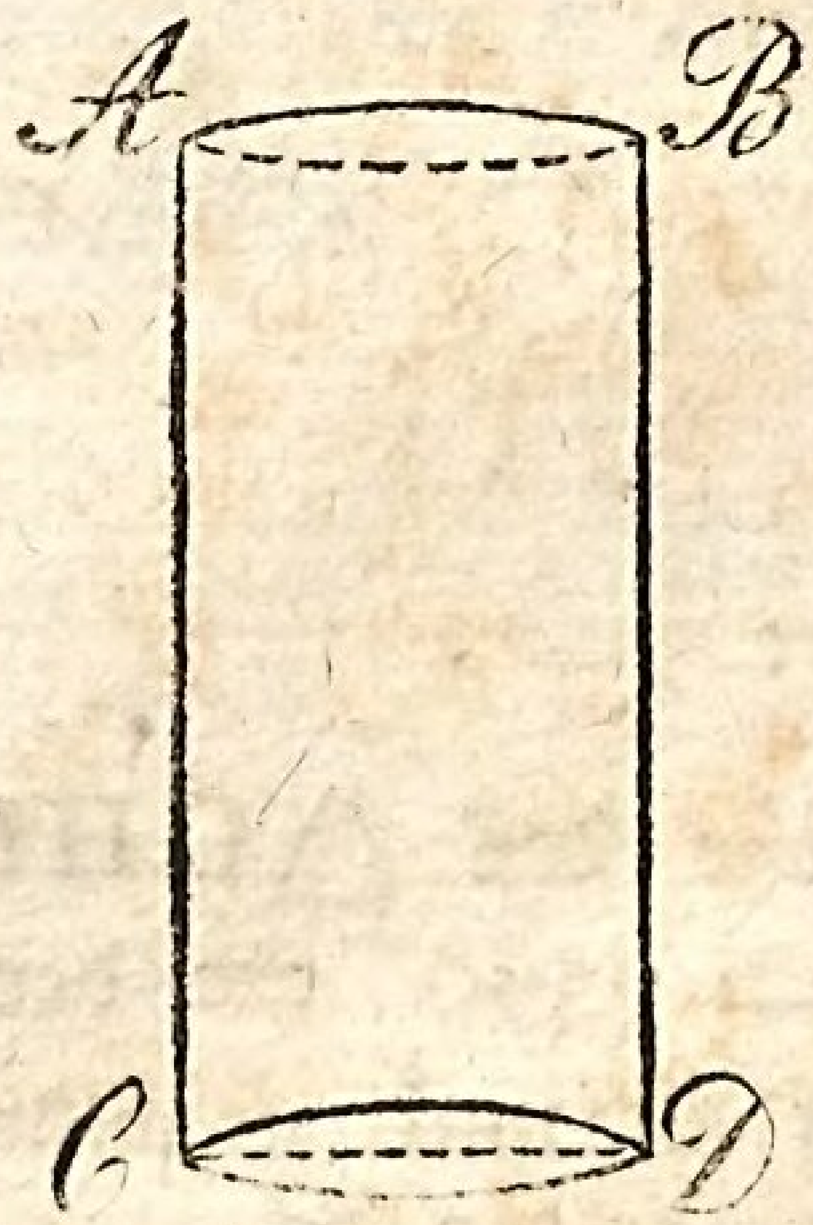
Es sei GI = 102″ und die Höhe des △GHI 90″, so ist der Inhalt desselben = 4590″ = der Grundfläche. Wird diese hierauf 20 mal genommen, so erhält man die Oberfläche dieses Körpers, welche = 4590″ × 20 = 9° 18′ 00 □″. Und wird diese durch den 6ten Theil der Höhe ab des Ikosaedrums multiplizirt, so erhält man den kubischen Inhalt desselben, welcher demnach $= \frac{91800'' \times 172''}{6}$ = 2° 631′ 600 ⬚″ ist.

§ 350.

Zusatz. Bei allen diesen regulären Körpern, das ist bei dem Tetraedrum, Hexaedrum oder Würfel, Oktaedrum, Dodekaedrum und Ikosaedrum verhalten sich die Räume ähnlicher Körper zu einander, wie die Würfeln der Seiten ihrer Grundflächen oder wie die ihrer Höhen; daher ist ein Oktaedrum 8 mal größer als ein anderes Oktaedrum, wenn die Seite von jenem noch einmal so groß als die von diesem ist.

Von dem Cylinder oder der Walze.

§ 351.



Da die Walze einem Prisma, welches mit ihr eine gleiche Höhe und gleiche Grundfläche hat, gleich ist, so muß auch ihr kubischer Inhalt dadurch gefunden werden, daß man die Grundfläche derselben durch ihre Höhe multiplizirt, indem auch jene bei ihr so vielmal über einander liegt, als der Körper hoch ist. Da aber ihre Grundfläche eine Kreisfläche ist, so muß solche nach den Regeln des Kreises zuvor berechnet, und alsdann durch die Höhe der Walze multiplizirt werden.

§ 352.

Zusatz. Wenn demnach bei einer Walze die Höhe $AC = 172''$ und der Durchmesser CD ihrer Grundfläche $= 82''$ ist, wie groß ist alsdann ihr kubischer Inhalt?

Da sich verhält $100 : 314 = 82'' : x$

so ist der Umkreis $= \frac{314 \times 82''}{100} = 257,48''$.

Folglich ist die Grundfläche, welche eine Kreisfläche ist, $= \frac{257,48'' \times 82''}{4} = 5278,34''$, und ihr kubischer Inhalt $= 5278'' \times 172'' = 907'916$ □″.

§ 353.

Zusatz. Da die Grundfläche eine Kreisfläche ist, so können auch bei ihrer Berechnung die bei dem Kreise im § 297 angeführten Formeln hier mit Nutzen angewandt werden, wodurch die Aufsuchung der verschiedenen bei der Walze vorkommenden Stücke sehr erleichtert wird.

Es sei zu dem Ende W = dem körperlichen Raume der Walze,

H = ihrer Höhe,

C = ihrer Kreisfläche oder Grundfläche; so ist

1. $W = CH$.

Und da $C = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ nach § 297 No. 5 ist, so ist

2. $W = \pi R^2 H = \frac{\pi D^2 H}{4}$, und daher

3. $H = \frac{W}{\pi R^2}$.

4. $R = \sqrt{\frac{W}{\pi H}}$, und $D = 2\sqrt{\frac{W}{\pi H}}$.

Ferner ist nach § 297 No. 3

$P = 2R\pi$; also $R = \frac{P}{2\pi}$, und $R^2 = \frac{P^2}{4\pi^2}$;

Daher ist

5. $W = \frac{P^2 H}{4\pi}$, folglich

6. $H = \frac{4\pi W}{P^2}$

7. $P = \sqrt{\frac{4\pi W}{H}}$.

Anmerkung. Man kann demnach den kubischen Inhalt der Walze, ohne ihre Grundfläche zu berechnen, finden: 1. Aus dem Quadrate des Halbmessers der Grundfläche und ihrer Höhe, nach No. 2, und auch 2. Aus dem Quadrate des Umkreises und der Höhe nach No. 5.

Eben so läßt sich die Höhe dieses Körpers aus dem Inhalte der Walze selbst und aus dem Halbmesser nach No. 3, und aus jenem und dem Umfange nach No. 6 herleiten. Und der Halbmesser der Grundfläche wird nach No. 4 aus der Walze selbst und der Höhe derselben — und der Umkreis nach No. 7 aus der Walze und ihrer Höhe gefunden.

§ 354.

Da bei einer rechtwinkligen Walze der Umfang der Grundfläche soviel mal über einander liegt, als der Körper hoch ist, so muß die Oberfläche derselben dadurch gefunden werden, daß man den Umfang der Grundfläche durch die Höhe multiplizirt, und zu dem Produkte die doppelte Grundfläche addirt *).

Ist aber die Walze nicht rechtwinklig, sondern schiefwinklig gebildet, so muß man den Umkreis

*) Fehlt an der Oberfläche, wie es bei dem Trinkglase der Fall ist, die eine Fläche, so wird bei einem solchen Körper nur eine Grundfläche zur Seitenfläche addirt.

der Grundfläche durch die Länge der Seitenfläche multipliziren, und dazu die doppelte Grundfläche addiren.

§ 355.

Zusatz. Wie groß ist demnach die Oberfläche von jener im § 352 angeführten Walze?

Da der Umkreis von dieser = 257″ war, so ist ihre Seitenfläche = 257″ × 172″ = 4°32′04 □″, und da ihre Grundfläche = 5278 □″ war, so ist ihre Oberfläche = 4°32′04″ + 2 × 5278″ = 43204″ + 10556″ = 5°37′60 □″.

§ 356.

Zusatz. Ist S = der Seitenfläche einer Walze, P = dem Umkreise der Grundfläche und O = der Oberfläche derselben, so ist

1. $S = PH$, 2. $P = \frac{S}{H}$ und 3. $H = \frac{P}{S}$.

Da aber $P = 2\pi R$ nach § 297 No. 3 ist, so ist

2. $S = 2\pi R H$,

3. $R = \frac{S}{2\pi H}$ und

4. $H = \frac{S}{2\pi R}$.

Man kann demnach die Seitenfläche dieses Körpers aus dem Halbmesser und Höhe nach No. 2, — den Halbmesser aus der Seitenfläche und Höhe nach No. 3, — und die Höhe aus der Seitenfläche und dem Halbmesser nach No. 4 finden.

§ 357.

Zusatz. Da die Oberfläche der Walze = der Summe von zwei gleichen Kreisflächen ist, wozu die Seitenfläche addirt wird, so ist $O = 2C + S$; da aber $C = \pi R^2$ nach § 297 No. 5, und $S = 2\pi RH$ nach § 256 No. 4 ist, so ist

$$1.\ O = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(H+R)$$

$$2.\ H = \frac{O}{2\pi R} - R$$

$$3.\ R = -\frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{O}{2\pi} + \frac{H^2}{4}\right)}$$

$$= -\frac{H}{2} + \sqrt{\frac{(4O + 2\pi H^2)}{8\pi}}$$

$$= -\frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{2O + \pi H^2}{4\pi}\right)}$$

$$= -\frac{H}{2} + \frac{\sqrt{(2O + \pi H^2)\pi}}{2\pi}.$$

Nach diesem Paragraph kann man demnach die Oberfläche einer Walze aus ihrer Höhe und dem Halbmesser der Grundfläche — die Höhe aus der Oberfläche und dem Halbmesser — und den Halbmesser aus der Oberfläche und Höhe der Walze finden.

§ 358.

Zusatz. Da demnach 7 Stücke bei einer rechtwinkligen Walze in Betrachtung kommen, von welchen aus zwei, immer ein Drittes gefunden werden kann, so finden bei derselben weit mehrere

Formeln Statt, welche ich aber der Weitläuftigkeit wegen, nicht anführen darf, und die ich daher jedem, selbst zu machen, überlassen muß.

§ 359.

Da die Walzen, wenn sie gleiche Höhen und Grundflächen haben, sich am körperlichen Raume gleich sind, so muß auch jede rechtwinklige einer schiefwinkligen, unter diesen Bedingungen, am Raume gleich sein.

§ 360.

Ferner da die Walze einem Prisma, welches mit ihr eine gleiche Höhe und eine gleiche Grundfläche hat, am Raume gleicht, so müssen sich auch die Walzen, wie die Prismen zu einander verhalten d. h.

1. Wie ihre Höhen, wenn sie gleiche Grundflächen haben —
2. Wie ihre Grundflächen, wenn sie gleiche Höhen haben, und
3. Wie die Produkte aus ihren Grundflächen in ihre Höhe, wenn sie ungleiche Grundflächen und ungleiche Höhen haben.

Sind sie aber einander ähnlich, d. h. stehet die Grundfläche und die Höhe bei der einen in eben solchem Verhältnisse, wie die Grundfläche und die Höhe bei der andern, so verhalten sie sich zu einander, wie die Würfeln der Durch- oder Halbmesser ihrer Grundflächen, oder auch wie die ihrer Höhen.

§ 361.

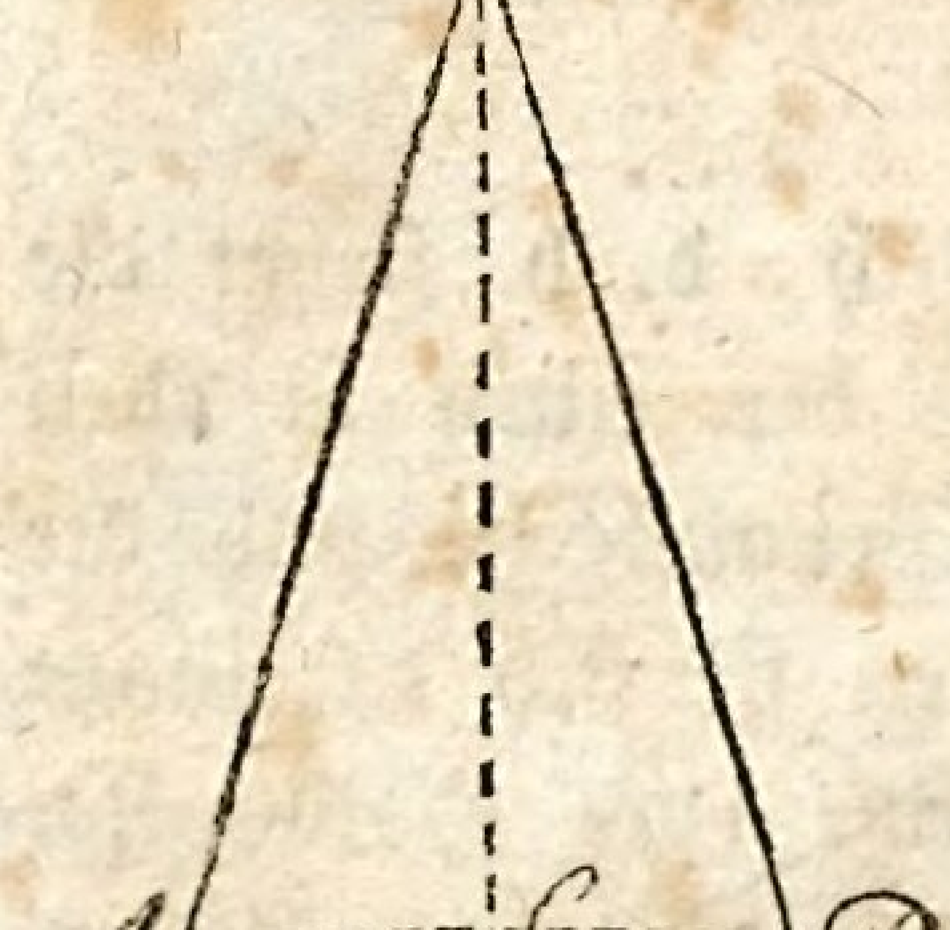
Sollen demnach diese Körper zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplizirt und dividirt werden, so werden die Durch- oder Halbmesser ihrer Grundflächen, wenn sie nämlich gleiche Höhen haben, zu einander addirt, von einander subtrahirt u. s. w. wie solches in den §§ 220—223 bei den Kreisen geschehen ist.

Von dem Kegel oder Conus.

§ 362.

Da der Kegel den dritten Theil von einer Walze ausmacht, welche mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, so wird dessen kubischer Inhalt dadurch gefunden, daß man seine Grundfläche durch seine Höhe multiplizirt und das Produkt davon durch 3 dividirt.

§ 363.



Zusatz. Da die Grundfläche dieses Körpers ebenfalls eine Kreisfläche ist, so muß auch solche nach den Regeln, nach welchen eine Kreisfläche berechnet wird, hier berechnet werden.

Es sei zu dem Ende der Durchmesser AB der Grund-

fläche = 44° und die Höhe des Kegels DC = 48″, wie groß ist alsdann dessen kubischer Inhalt?

$$100 : 314 = 44'' : x \text{ Umkreis}$$

$$x = \frac{314 \times 44''}{100} = 138'' = \text{Umkreis.}$$

Folglich die Kreis- oder Grundfläche $= 138'' \times \frac{44''}{4}$

$$= 138'' \times 11 = 15' 18 \square''$$

multiplizirt durch $\frac{1}{3}$ der Höhe = 16″

24° 288 ⬚″ kubischer Inhalt des Kegels.

§ 364.

Zusatz. Wenn demnach der kubische Inhalt eines Kegels = K, die Grundfläche desselben = G und die Höhe desselben = H gesetzt wird, so ist

$$1.\ K = \frac{GH}{3},\quad 2.\ G = \frac{3K}{H} \text{ und } 3.\ H = \frac{3K}{G}.$$

§ 365.

Zusatz. Wird die Kreisfläche oder $G = \pi R^2$ nach § 297 gesetzt, so ist

$$1.\ K = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

$$2.\ H = \frac{3K}{\pi R^2}$$

$$3.\ R = \sqrt{\frac{3K}{\pi H}}.$$

§ 366.

Da die krumme Seitenfläche eines Kegels, wenn solche entwickelt und als das Netz dieses Körpers ausgespannt wird, dem Ausschnitte eines Kreises gleicht, von welchem der Kreisbogen = dem Umfange der Grundfläche des Kegels, und der Halbmesser = der Länge der Seitenfläche d. i. vom Umfange bis zur Spitze desselben ist, und der Flächeninhalt eines solchen Ausschnittes, nach § 307, dadurch gefunden wird, daß man den Kreisbogen mit dem halben Halbmesser multiplizirt, so muß auch die Seitenfläche des Kegels dadurch gefunden werden, daß man den Umkreis der Grundfläche mit der halben Seitenfläche multiplizirt.

§ 367.

Zusatz. Wenn demnach der Durchmesser AB $= 148''$ und die Seitenlinie AD $198''$ ist, wie groß ist alsdann die krumme Seitenfläche?

Da der Umkreis $= 3{,}14 \times 148'' = 465''$ und $AD = 198''$, also $\frac{1}{2} AD = 99''$ ist, so ist die ganze Seitenfläche $= 465'' \times 99'' = 4^{\circ}\,60'\,35\,\square''$.

§ 368.

Zusatz. Setzt man demnach die Seitenlänge des Kegels = L, die krumme Seitenfläche = S und den Umkreis der Grundfläche = P, so ist

$$1.\ S = \frac{PL}{2},\quad 2.\ P = \frac{2S}{L}\ \text{und}\ 3.\ L = \frac{2S}{P}.$$

§ 369.

Da die Oberfläche des Kegels aus der Seitenfläche und Grundfläche bestehet, so braucht man nur, um solche zu erhalten, beide zusammen zu addiren. So war im § 367 die Seitenfläche S $= 4^\circ 60' 35 \square''$, und die Grundfläche G $= 465'' \times \frac{148''}{4} = 465 \times 37'' = 1^\circ 72' 05''$, folglich ist die Oberfläche $= 4^\circ 60' 35'' + 1^\circ 72' 05'' = 6^\circ 32' 40 \square''$.

§ 370.

Zusatz. Wird diese $= O$ gesetzt, so ist

1. $O = S + G$, und da $G = \pi R^2$ nach § 297 No. 5 ist, so ist auch
2. $O = S + \pi R^2$
3. $S = O - \pi R^2$
4. $R = \sqrt{\frac{O - S}{\pi}}$.

§ 371.

Zusatz. Wird $S = \pi L R$ nach § 297 No. 3 gesetzt, wo $P = 2 R \pi$ ist, also $\frac{PL}{2} = \frac{2 R \pi L}{2}$ ist, so ist

1. $O = \pi L R + \pi R^2 = (L + R) \pi R$
2. $L = \frac{O}{\pi R} - R$
3. $R = -\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{O}{\pi} + \frac{L^2}{4}\right)} = -\frac{L\pi + \sqrt{(4O + \pi L^2)\pi}}{2\pi}$.

§ 372.

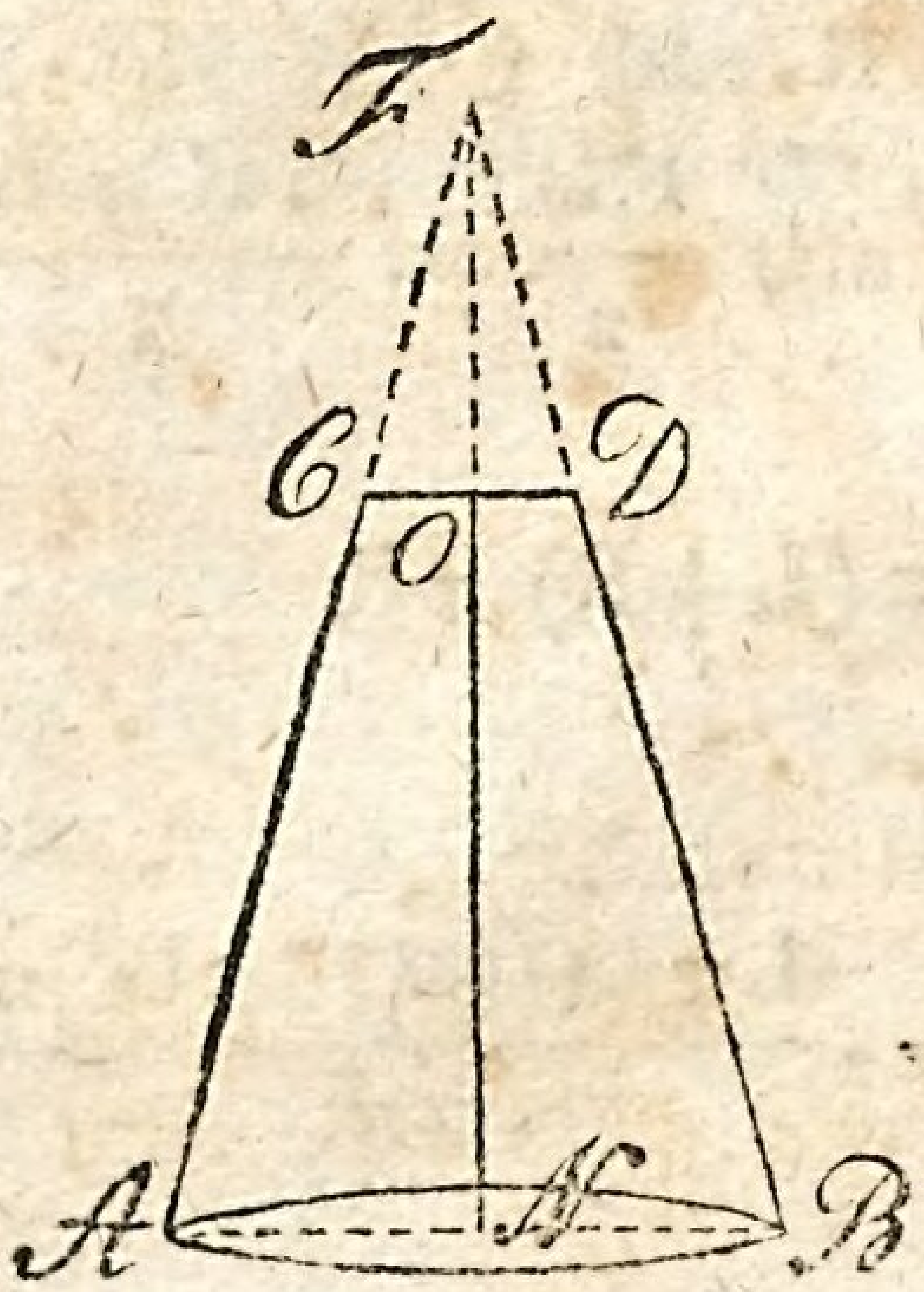
Anmerkung. Eben so, wie sich bei der Walze noch mehrere Formeln, durch die Hinsetzung des Werthes von dieser oder jener Größe aus den vorhergehenden Formeln, bilden ließen, so lassen sich auch hier noch viele Formeln schaffen, wodurch sich jedes Mal durch die Bestimmung von 2 beliebigen Größen außer π, welches immer bestimmt ist, und außer P, dessen Werth schon in R liegt, wenn R gegeben ist, und umgekehrt, jede bei dem Kegel vorkommende Größe bestimmen läßt.

§ 373.

Zusatz. Was ich von dem Verhältnisse der Walzen zu einander, ihrer Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division angeführt habe, gilt auch von den Kegeln.

Von dem abgekürzten rechtwinkligen Kegel.

§ 374.



Um den kubischen Inhalt des abgekürzten Kegels ABDC zu finden, so berechnet man denselben von dem ganzen Kegel ABF, und ziehet von diesem den kubischen Inhalt des kleinen Kegels CDF ab.

Es sei z. B. der Durchmesser AB des großen Kegels $= 1^\circ 1'$ und der Durchmesser CD des kleinen $= 28''$, und die ganze Höhe $FN = 2^\circ 1' 8''$, und die Höhe von dem kleinen Kegel $OF = 56''$, wie groß ist alsdann der kubische Inhalt von dem abgekürzten Kegel?

Da nach § 365 $K = \frac{\pi R^2 H}{3}$ ist, so ist der kubische Inhalt des großen Kegels $= \frac{3{,}14 \times 55^2 \times 218''}{3}$ $= 690'224$ □″.

Ferner der kubische Inhalt des kleinen Kegels ist $= 14^2 \times \frac{56''}{3} \times 3{,}14 = 11'488$ □″.

Daher ist der kubische Inhalt des abgekürzten Kegels $= 690'224$ □″ $- 11'488$ □″ $= 678'736$ □″.

§ 375.

Zusatz. Indessen ist es bei dieser Berechnung nicht nothwendig die ganze Höhe des Kegels zu haben, sondern man kann auch aus den Halbmessern der beiden Kreisflächen und der Höhe des abgekürzten Kegels den kubischen Inhalt desselben finden, wie folgende Formeln lehren werden.

Es sei zu dem Ende $K =$ kubischer Inhalt des großen Kegels, $k =$ kubischer Inhalt des kleinen Kegels, $\mathfrak{K} =$ kubischer Inhalt des abgekürzten Kegels, $R =$ Halbmesser der großen Kreisfläche, $r =$ Halbmesser der kleinen Kreisfläche, $H =$ der ganzen Höhe $= NF$, $h =$ der Höhe

des kleinen Kegels = OF und $\mathfrak{H}$ = der Höhe des abgekürzten Kegels = ON, so ist

1. $ON = FN - OF = H - h = \mathfrak{H}$,

2. $H = \mathfrak{H} + h$; und

3. $K = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

4. $k = \frac{\pi r^2 h}{3}$, daher

5. $\mathfrak{K} = \frac{\pi R^2 H}{3} - \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2 H - r^2 h)$

$$= \frac{\pi}{3}(R^2(\mathfrak{H}+h) - r^2 h) = \frac{\pi}{3}(R^2\mathfrak{H} + R^2 h - r^2 h)$$

$$= \frac{\pi}{3}(R^2\mathfrak{H} + (R^2 - r^2)h).$$

Da nun aber in den ähnlichen Dreiecken ANF und COF sich verhält AN : CO = NF : OF, so ist

6. $R : r = H : h$

$R : r = \mathfrak{H} + h : h$ nach No. 2.

$R - r : r = \mathfrak{H} + h - h : h$

$R - r : r = \mathfrak{H} : h$; so ist

7. $h = \frac{r\mathfrak{H}}{R - r}$; daher ist

8. $\mathfrak{K} = \frac{\pi}{3}\left(R^2\mathfrak{H} + (R^2 - r^2)\frac{r\mathfrak{H}}{R - r}\right)$ nach No. 5 und 7.

$$= \frac{\pi}{3}(R^2\mathfrak{H} + (R + r)r\mathfrak{H})$$

$$= \frac{\pi\mathfrak{H}}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

$$= \frac{\pi \mathfrak{H}}{3} (R^2 + 2Rr + r - Rr), \text{ also}$$

$$9.\ \mathfrak{K} = \frac{\pi \mathfrak{H}}{3} ((R+r)^2 - Rr).$$

§ 376.

Zusatz. Ein Beispiel zur Erläuterung:

Da in dem Beispiel im § 374 $AB = 2R = 110''$ also $R = 55''$; $CD = 28''$, also $r = 14''$ und $NO = 162''$ war; so ist nach der 9ten Formel:

$$\mathfrak{K} = \frac{3{,}14 \times 162}{3} [(55'' + 14'')^2 - 55'' \times 14'']$$
$$= 3{,}14 \times 54\ (69^2 - 770'')$$
$$= 3{,}14 \times 54\ (4761 - 770'')$$
$$= 3{,}14 \times 54 \times 3991 = 676'719 \,\square''.$$

Dieß Resultat weicht demnach wenig von dem im § 374 ab, und würde noch weniger abweichen, wenn die Messungen der Durchmesser beider Kreisflächen, nebst der Höhe des abgekürzten Kegels, noch genauer gemacht wären.

§ 377.

Anmerkung. Da ein Baum 2 ungleiche Kreisflächen hat, so muß sein kubischer Inhalt eben so, wie der eines abgekürzten Kegels berechnet werden; und da ein Faß als ein Körper, welcher aus 2 gleichen abgekürzten Kegeln, die mit ihren größern Kreisflächen gleichsam auf einander stehen, anzusehen ist, so wird sein kubischer Inhalt auch eben

so, wie der eines abgekürzten Kegels berechnet, wobei die Durchmesser am Ende und in der Mitte gemessen, und die Länge des ganzen Fasses genommen werden, wobei aber $\frac{1}{6}\mathfrak{H}$, anstatt $\frac{1}{3}\mathfrak{H}$, in die Formel gesetzt wird. Ist auf diese Weise der kubische Inhalt nach der 9ten Formel gefunden worden, so wird solche doppelt genommen, weil doppelte Kegel gleichsam auf einander ruhen.

§ 378.

Zusatz. Da in der 9ten Formel des § 375 4 Größen vorkommen, nämlich K, $\mathfrak{K}$, r und $\mathfrak{H}$, so kann man durch folgende Gleichungen aus drei bekannten Größen immer die 4te herleiten. So ist

z. B. $\mathfrak{K} = \frac{\pi \mathfrak{H}}{3}((R+r)^2 - Rr)$, folglich ist

$$1.\ \mathfrak{H} = \frac{3\mathfrak{K}}{\pi((R+r)^2 - Rr)}$$

$$2.\ R^2 = \frac{3\mathfrak{K}}{\pi\mathfrak{H}} - Rr - r^2 = -Rr - r^2 + \frac{3\mathfrak{K}}{\pi\mathfrak{H}}$$

$$R = -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{3\mathfrak{K}}{\pi\mathfrak{H}} - r^2 + \tfrac{1}{4}r^2\right)}$$

$$= -\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\left(\frac{3\mathfrak{K}}{\pi\mathfrak{H}} - \frac{3r^2}{4}\right)}$$

$$3.\ r = -\tfrac{1}{2}R + \sqrt{\left(\frac{3\mathfrak{K}}{\pi\mathfrak{H}} - \frac{3R^2}{4}\right)}$$

§ 379.

Wenn AF = der Seite des Kegels = l, AN = dem Halbmesser der Grundfläche = R,

und S = der krummen Seitenfläche von demselben ist, so ist

1. $S = \pi R l$ nach § 371.

Wenn ferner CF = der Seite des abgenommenen Kegels = a, OC = dem Halbmesser der Grundfläche = r und f = der krummen Seitenfläche desselben gesetzt wird, so ist

2. $f = \pi r a$. Ist ferner die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels = F, so ist

3. $F = \pi R l - \pi r a$.

Weil aber weder l noch a Größen sind, welche zu dem abgekürzten Kegel gehören, so müssen diese aus der 3ten Gleichung fortgeschafft und andere dafür hingesetzt werden, und zwar solche, welche sich bei dem abgekürzten Kegel vorfinden. Wenn demnach die Seite $AC = M$ des abgekürzten Kegels ist, so ist

$AC = AF - CF$; daher ist

4. $M = l - a$. Es verhält sich aber $AN : OC = AF : CF$; also

5. $R : r = l : a$

6. $R - r : R = l - a : l$ und
$R - r : R = M : l$; daher

7. $l = \frac{MR}{R-r}$. Auch ist
$R - r : r = l - a : a$; daher

8. $R - r : r = M : a$; also

9. $a = \frac{rM}{R-r}$; folglich ist

10. $F = \frac{\pi R^2 M}{R-r} - \frac{\pi r^2 M}{R-r}$ (Aus 3, 7 und 9 hervorgeleitet)

$$= \frac{\pi M (R^2 - r^2)}{R-r} = \pi M (R+r).$$

§ 380.

Zusatz. Wenn demnach $AN = R = 85''$, $OC = r = 38''$ und $AC = M = 114''$ ist, wie groß ist alsdann die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels ABDC?

Da die krumme Seitenfläche $F = \pi M (R+r)$ ist, so ist $F = 3,14 \times 114'' (85'' + 38'')$
$= 3,14 \times 114'' \times 123'' = 4^\circ 40' 29 \square''$.

§ 381.

Ist nun aber die Seitenfläche eines solchen Körpers bekannt, so kann man daraus sehr leicht die ganze Oberfläche desselben finden, indem man nur zu jener die obere und untere Kreisfläche hinzu zu addiren braucht. Es sei z. B. die ganze Oberfläche dieses Körpers $= O$, die untere Kreisfläche $= \pi R^2$ und die obere $= \pi r^2$, so ist

$$O = \pi M (R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$$
$$= \pi M (R+r) + (R^2 + r^2) \pi.$$

Da nun $R = 85''$, so ist $R^2 = 7225''$
und da $r = 38''$, so ist $r^2 = 1444''$.

Folglich $R^2 + r^2 = 8669''$
und folglich $8669'' \times 3,14 = 2^\circ 72' 20''$; und
$O = 4^\circ 40' 29'' + 2^\circ 72' 20 \square'' = 7^\circ 12' 49 \square''$.

§ 382.

Da in der 10ten Formel des § 379 vier Größen, nämlich F, R, r und M vorkommen, so kann man, wenn von diesen drei bekannt sind, die vierte durch eine Gleichung finden. So war $F = \pi M (R + r)$ folglich ist

$$1.\ M = \frac{F}{\pi(R+r)}$$

$$2.\ R = \frac{F}{\pi M} - r$$

$$3.\ r = \frac{F}{\pi M} - R.$$

§ 383.

Zusatz. Man kann auch die krumme Seitenfläche aus den beiden Kreisflächen und aus der Höhe des abgekürzten Kegels finden, weil aber die Formel dazu nicht so bequem als jene von mir angeführte, und die Höhe bei dem Kegel nicht so leicht als die Seite zu messen ist, so habe ich solche hier weggelassen.

Von der Kugel.

§ 384.

Da eine Kugel einem regulären Körper von unendlich vielen regulären Grundflächen gleicht, und daher aus unendlich vielen Pyramiden oder Kegeln zusammengesetzt ist, welche mit ihren Spitzen in

dem Mittelpunkte derselben zusammen stoßen, und deren Grundflächen, die nur Punkte sind, die Oberfläche der Kugel bilden, so muß auch der kubische Inhalt von dieser dadurch gefunden werden, daß man die Oberfläche derselben durch den 6ten Theil der Höhe, d. i. durch den 6ten Theil des Durchmessers multiplizirt. Da aber die Oberfläche der Kugel 4mal größer als ihre größte Kreisfläche, nach § 390, oder gleich dem Produkte des Durchmessers in die Peripherie, nach § 391 ist, so kann man den kubischen Inhalt derselben sehr leicht aus ihrem Durchmesser herleiten, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

§ 385.

Es sei der Durchmesser einer Kugel = 36″, wie groß ist alsdann deren Oberfläche und kubischer Inhalt?

Auflösung. Man suche 1. die Peripherie oder den Umkreis der Kugel durch ein von den, im § 291, angeführten Verhältnissen:

$$100 : 314 = 36'' : x$$

$$\frac{3{,}14 \times 36}{100} = 113{,}04'' = \text{Umkreis.}$$

2. Die Kreisfläche, welche $= 113'' \times 9 = 10'17''$ ist.

Hieraus 3. die Oberfläche derselben, welche $= 113'' \times 36'' = 4068''$ ist.

Wird nun diese durch den 6ten Theil des Durchmessers multiplizirt, so erhält man

4. den kubischen Inhalt der Kugel, welcher =
$4068'' \times \frac{36}{6} = 4068'' \times 6 = 24'408 \square''$ ist.

§ 386.

Zusatz. Da die Kugel mit Recht zu den regulären Körpern muß gerechnet werden, und diese sich zu einander verhalten, wie die Würfeln ihrer Seiten oder Höhen, so müssen sich auch die Kugeln zu einander verhalten, wie die Würfeln ihrer Durchmesser oder Halbmesser; daher ist die Kugel A 27 mal größer als die Kugel B, wenn der Durchmesser von jener 3 mal größer als der von dieser ist.

§ 387.

Wenn der Durchmesser der Grundfläche bei einer Walze = ihrer Höhe, und diese gleich dem Durchmesser der größten Kreisfläche einer Kugel ist, so macht der kubische Inhalt der Kugel = $\frac{2}{3}$ von dem kubischen Inhalte der Walze aus. Wird demnach dieser = W, der kubische Inhalt der Kugel = K, der Durchmesser derselben = D = der Höhe und = dem Durchmesser der Grundfläche der Walze = H gesetzt, so ist

1. $W = \frac{\pi D^2 H}{4}$ nach § 353 No. 2. Daher ist

2. $K = \frac{2}{3} \times \frac{\pi D^2 H}{4}$

$$= \frac{\pi D^3}{6}, \text{ und folglich}$$

$$3.\ D = \sqrt[3]{\frac{6 K}{\pi}}.$$

§ 388.

Zusatz. Wenn demnach im § 385, der Durchmesser einer Kugel = 36″ ist, so ist, nach No. 2 des vorhergehenden §, $K = \frac{\pi D^3}{6}$ d. i. = dem Würfel des Durchmessers multiplizirt durch $\frac{1}{6}\pi$; daher $= \frac{\pi \cdot 36^3}{6} = 0{,}523 \times 36^3 = 0{,}523 \times 46656''$ = 24′401 ⬚″, welcher Inhalt mit dem vorhin berechneten sehr genau übereinstimmt.

§ 389.

Zusatz. Da D = 2R ist, so ist $D^3 = 8R^3$, folglich ist

$$1.\ K = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$2.\ R = \sqrt[3]{\frac{3K}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6K}{8\pi}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}.$$

§ 390.

Nach der im § 384 angeführten Erklärung von einer Kugel ist der kubische Inhalt derselben, wenn S ihre Oberfläche bedeutet $= \frac{SD}{6} = \frac{2RS}{6} = \frac{RS}{3}$.

Da nun $K = \frac{RS}{3}$

$K = \frac{4\pi R^3}{3}$, nach § 389, ist;

so ist $\frac{RS}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}$. Daher ist

$S = 4\pi R^2$.

Da nun die Kreisfläche oder $C = \pi R^2$ ist, so ist die Oberfläche 4mal größer als die größte Kreisfläche der Kugel.

§ 391.

Zusatz. Da auch $K = \frac{\pi D^3}{6}$, nach § 387, und

$K = \frac{SD}{6}$ ist,

so ist $\frac{\pi D^3}{6} = \frac{SD}{6}$; also

$S = \pi D^2$. Nun ist aber

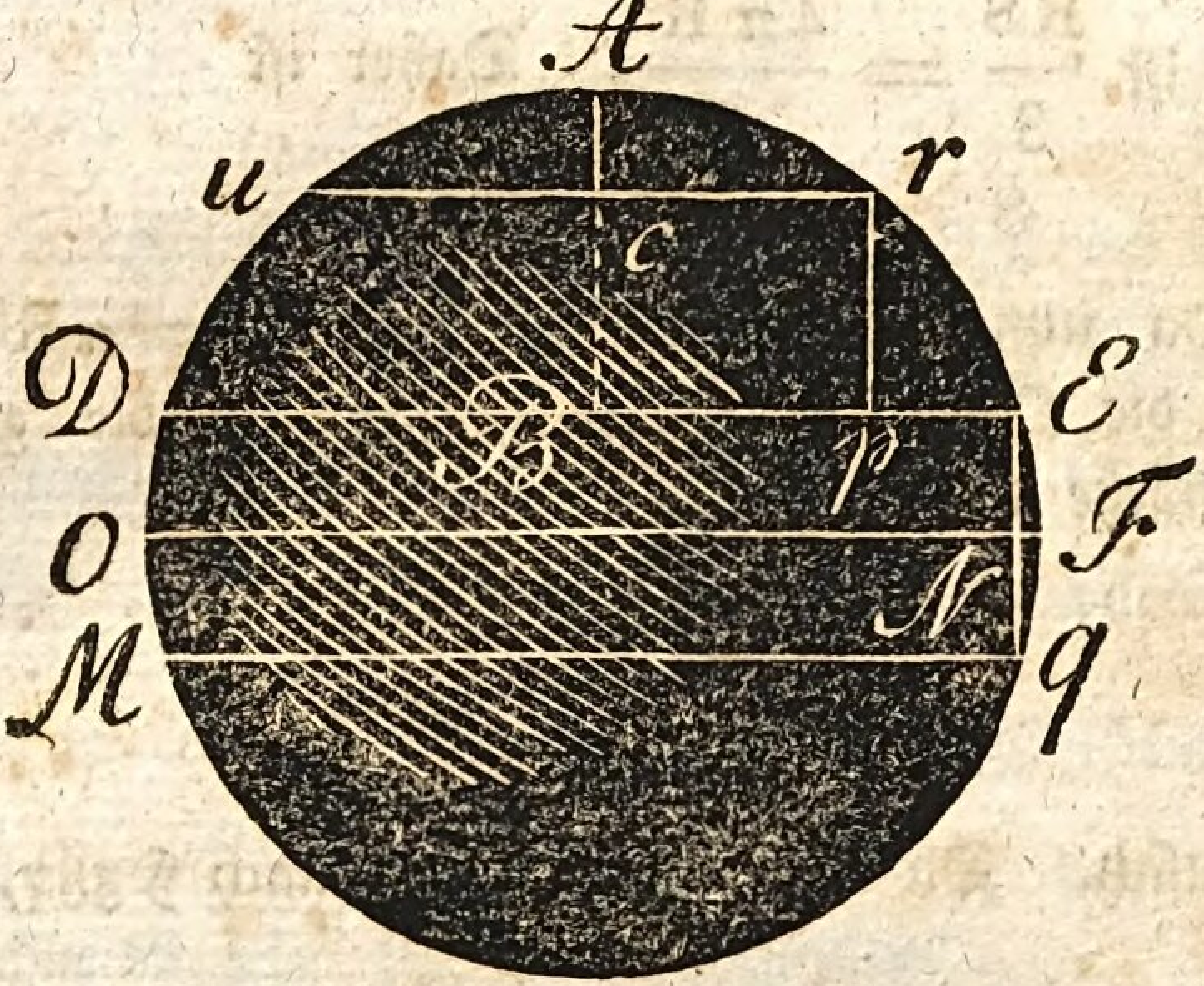
$\pi D = P$, nach § 297 No. 2,

daher ist $S = DP$, d. h. gleich dem Produkte des Durchmessers in den Umkreis.

§ 392.

Soll die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts DAEB (s. Fig. auf folg. Seite) berechnet werden, so muß man dazu die Höhe desselben $AB = h$ und den Durchmesser der Kugel $= D$, zu welchem der Abschnitt gehört, wissen. Sind

diese beiden Größen bekannt, und wird die Oberfläche des Abschnitts = s gesetzt, so wird in der Integralrechnung bewiesen, daß $s = \pi h D$ sei.



Bei einer Kugel demnach, die 4 Zoll im Durchmesser hat, und 1 Zoll weit von ihrer Oberfläche abgeschnitten wird, beträgt die krumme Fläche dieses Abschnitts $= \pi h D = 3{,}14 \times 1 \times 4'' = 12{,}56 \square''$ also beinahe $= 12\frac{1}{2} \square''$.

§ 393.

Zusatz. Da $s = \pi h D$ ist, und also 3 Größen s, h und D in der Gleichung vorhanden sind, so lassen sich immer aus 2 Größen die 3te herleiten; daher ist

1. $h = \frac{s}{\pi D}$
2. $D = \frac{s}{\pi h}$

$$3.\ R = \frac{s}{2h\pi} \text{ und}$$

$$4.\ h = \frac{s}{2\pi R}.$$

§ 394.

Will man bei einer Kugel den Gürtel d. h. die krumme Fläche auf ihrer Oberfläche berechnen, welche von zwei parallel gehenden Umkreisen eingeschlossen wird, wie solches mit dem Gürtel DEFO der Fall ist, der von dem Umkreise DE und OF begrenzt wird, so muß man die senkrechte Linie EN, welche von der einen Kreisfläche zu der andern hingehet, und den Durchmesser der Kugel wissen. Ist beides bekannt, und wird die Höhe EN = $\mathfrak{H}$, der Durchmesser = D und der Gürtel = G gesetzt, so ist nach der Integralrechnung $G = \pi \mathfrak{H} D$.

§ 395.

Beispiele zur Erläuterung, auf die Berechnung der Erdzonen oder Erdgürtel angewandt.

Da 1. die heiße Zone einen Bogen von 47° einschließt, die senkrechte Höhe EP, aus der Trigonometrie berechnet, = 686 geogr. Meilen und der Erddurchmesser 1720 geogr. Meilen lang ist, so ist G oder die heiße Zone

$= 3{,}14 \times 1720 \times 686 = 5400 \times 686 = 3$ Mill. 704400 geogr. Meilen.

2. Da die gemäßigte Zone einen Bogen von 43° in sich einschließt, und daher ihre Höhe EN = 445,7 geogr. Meilen ist, so ist ihre Fläche oder G = 5400 × 445,7 = 2 Mill. 406708 geogr. Meilen. — Und

3. Bei der kalten Zone, bei welcher h = 72 Meilen ist, ist G = 5400 × 72 = 388800 geogr. Meilen.

§ 396.

Das letzte Stück, welches noch bei einer Kugel zu berechnen ist, ist der kubische Inhalt des Abschnitts sebst, welcher, nach der Integralrechnung, wenn die Höhe desselben = H gesetzt wird, $= \frac{\pi}{6}(3DH^2 - 2H^3)$ ist.

Ist nun H = R, und ist also der Abschnitt oder A = einer halben Kugel = ½ K, so ist nach jener Formel $A = \frac{\pi}{6}(3DR^2 - 2R^3) = \frac{\pi}{6}(6R^3 - 2R^3) = \frac{4\pi R^3}{6}$. Und wird dieses doppelt genommen, also $= \frac{8\pi R^3}{6} = \frac{4\pi R^3}{3}$, so erhalten wir die Formel von K, nach § 389, woraus die Richtigkeit dieser aufgestellten Formel erhellet.

§ 397.

Ein Beispiel zur Erläuterung. Wie groß ist der kubische Inhalt von dem Theile der Erde,

welcher durch den nördlichen Polarkreis abgeschnitten wird?

Da H = 72 Meilen ist, so ist

$$A = \frac{\pi}{6}(3 \times 1720 \times 72^2 - 2,72^3)$$

$$= \frac{\pi}{6}(5160 \times 5184 - 373248)$$

$$= \frac{\pi}{6}(26,749440 - 373248)$$

$$= \frac{\pi}{6} \times 26,376192$$

$$= \pi \times 4396032 = 13,803540 \text{ geogr. Meilen.}$$

Von den verschiedenen Verhältnissen der Körper zu einander.

§ 398.

A. Von den Verhältnissen des Würfels, der Kugel, der Walze und des Kegels zu einander, wenn nämlich die Seite des Würfels = dem Durchmesser der Kreisfläche, und = der Höhe der Walze, = dem Durchmesser der Kugel und = dem Durchmesser der Kreisfläche und der Höhe des Kegels ist.

In diesem Falle verhält sich:

1. Der Kegel zur Kugel, wie 1:2.
   " zur Walze, " 1:3.
   " zum Würfel, " 11:42.

2. Die Kugel zum Kegel, wie 2:1.
= zur Walze, = 2:3.
= zum Würfel, = 11:21.

3. Die Walze zum Kegel, wie 3:1.
= zur Kugel, = 3:2.
= zum Würfel, = 11:14.

4. Der Würfel zur Walze, wie 14:11.
= zur Kugel, = 21:11.
= zum Kegel, = 42:11.

B. Wenn der Inhalt der 6 regulären Körper, des Tetraedrums, Hexaedrums, Oktaedrums, Dodekaedrums, Ikosaedrums und der Kugel gleich groß ist, so haben die Seiten dieser Körper zu einander folgende Verhältnisse:

1. Wenn die Seite des Tetraedrums = 1000 ist,
so hat a) die Seite des Hexaedrums = 490 Theile
b) = Oktaedrums = 630 =
c) = Dodekaedrums = 249 =
d) = Ikosaedrums = 378 =
e) der Durchmesser der Kugel = 608 =

2. Wenn die Seite eines Hexaedrums = 1000 T. hat,
so hat a) die Seite des Tetraedrums = 2040 Theile
b) = Oktaedrums = 1285 =
c) = Dodekaedrums = 507 =
d) = Ikosaedrums = 770 =
e) der Durchmesser der Kugel = 1240 =

3. Wenn die Seite des Oktaedrums = 1000 T. hat,
so hat a) die Seite des Tetraedrums = 1587 Theile
b) = Hexaedrums = 778 =
c) = Dodekaedrums = 388 =
d) = Ikosaedrums = 590 =
e) der Durchmesser der Kugel = 965 =

4. Wenn die Seite des Dodekaedrums = 1000 T. hat,
so hat a) die Seite des Tetraedrums = 4088 Theile
b) „ Hexaedrums = 2003 „
c) „ Oktaedrums = 2575 „
d) „ Ikosaedrums = 1521 „
e) der Durchmesser der Kugel = 2484 „

5. Wenn die Seite des Ikosaedrums = 1000 T. hat,
so hat a) die Seite des Tetraedrums = 2689 Theile
b) „ Hexaedrums = 1318 „
c) „ Oktaedrums = 1694 „
d) „ Dodekaedrums = 658 „
e) der Durchmesser der Kugel = 1633 „

6. Wenn der Durchmesser der Kugel = 1000 T. hat,
so hat a) die Seite des Tetraedrums = 1647 Theile
b) „ Hexaedrums = 806 „
c) „ Oktaedrums = 1036 „
d) „ Dodekaedrums = 402 „
e) „ Ikosaedrums = 612 „

Durch diese Verhältnisse der Seiten dieser Körper gegen einander kann man demnach jeden Körper in einen andern von diesen verwandeln. Soll z. B. ein Würfel, welcher zur Seite 20′ hat, in ein Tetraedrum verwandelt werden, so setzt man auf: 1000 Theile der Seite des Würfels geben 2040 Theile zur Seite des Tetraedrums, was giebt die Seite von 20′ des Würfels für eine Seite bei dem Tetraedrum?

$$1000 : 2040 = 20' : x \text{ Seite}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 40800 \end{array}$$

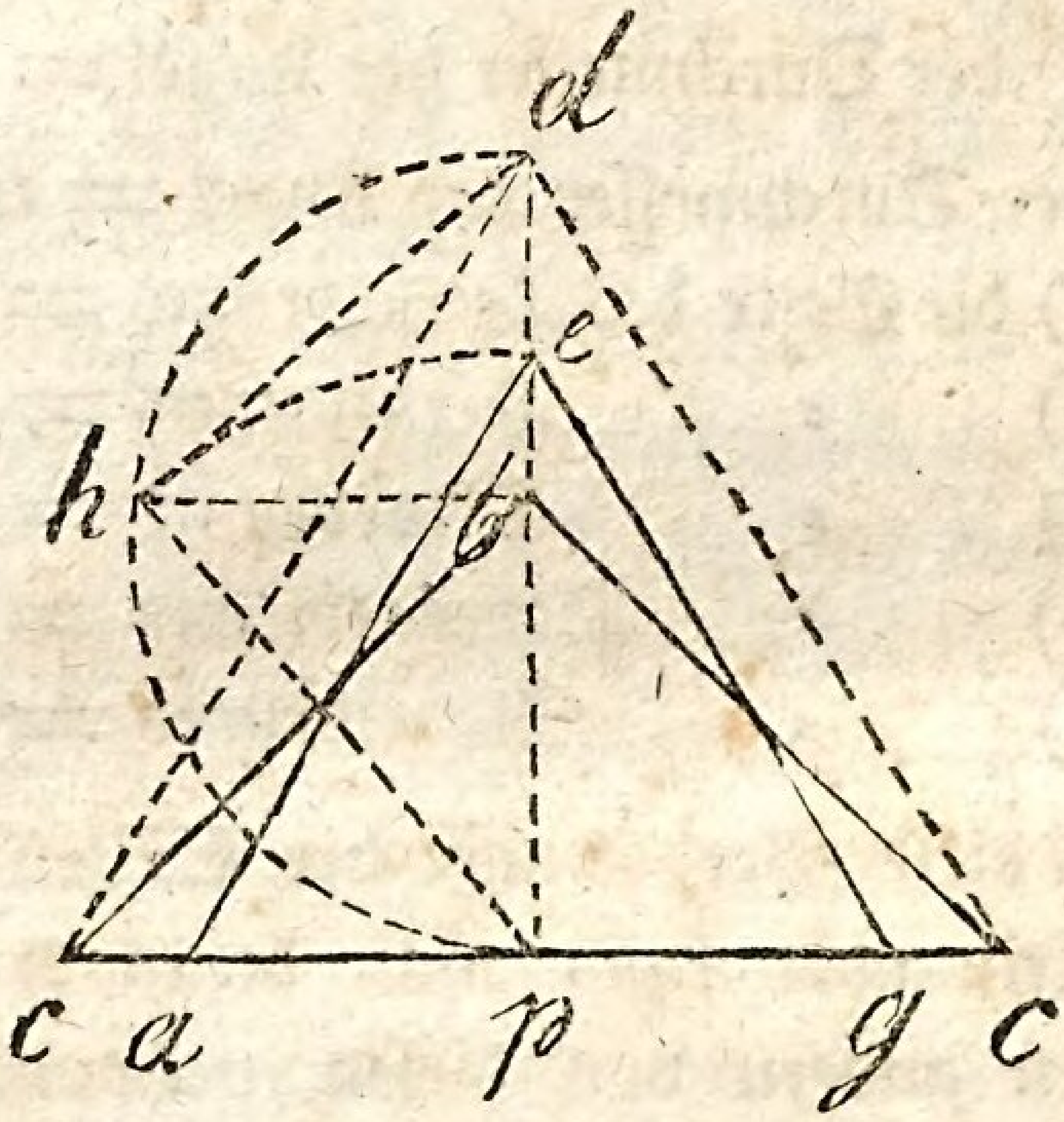
$$\frac{40800}{1000} = 40\tfrac{4}{5} \text{ Fuß} = 40' \, 8''.$$

Einige Zusätze zu den Verwandlungen in der Ebenen Geometrie.

a) Zu denen des Dreiecks.

§ 399.

Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreieck rbc in ein höheres gleichseitiges △ aeg zu verwandeln.



Auflösung. Man fasse 1. mit dem Zirkel die Linie rc, mache mit derselben das gleichseitige △ rdc und ziehe die senkrechte Linie pd. Hierauf ziehe man 2. aus der Mitte pd um pd den halben Kreis phd; und lasse 3. eine senkrechte Linie von der Spitze b des gleichschenkligen Dreiecks rbc nach dem halben Kreise, nach h hinfallen. Ziehe 4. die Linie ph, und trage solche von h nach e. Durch diesen Punkt ziehe man endlich 5. die Parallellinien ae mit rd, und ge mit cd, so ent-

stehet das gleichseitige $\triangle$ aeg, welches dem gleichschenkligen $\triangle$ rbc am Raume gleich ist.

Beweis. Man ziehe die Linie hd, so entstehet das $\triangle$ phb welches dem $\triangle$ phd ähnlich ist, und in welchen sich verhält

$$bp:ph = ph:pd \ (\S\ 136.\ 6.)$$

Nun ist aber $ph = pe.$

Also $bp:pe = pe:pd.$

Daher ist $pe^2 = bp \times pd.$

Ferner die Dreiecke rbp und rdp haben gleiche Höhen.

Daher $\triangle rpb : \triangle rpd = bp : pd$

multiplizirt durch pd

so ist $\triangle rpb : \triangle rpd = bp \times pd : pd^2.$

Nun ist aber $pe^2 = bp \times pd.$

Also $\triangle rpb : \triangle rpd = pe^2 : pd^2.$

Da das $\triangle ape \sim \triangle rdp$

so verhält sich $\triangle ape : \triangle rdp = pe^2 : pd^2.$

Also $\triangle rpb : \triangle rpd = \triangle ape : \triangle rpd.$

Da nun $\triangle rpd = \triangle rpd$

so ist auch $\triangle rpb = \triangle ape;$

Und da eben so $\triangle pbc = \triangle peg,$

so ist $\triangle rpb + \triangle pbc = \triangle ape + \triangle peg$

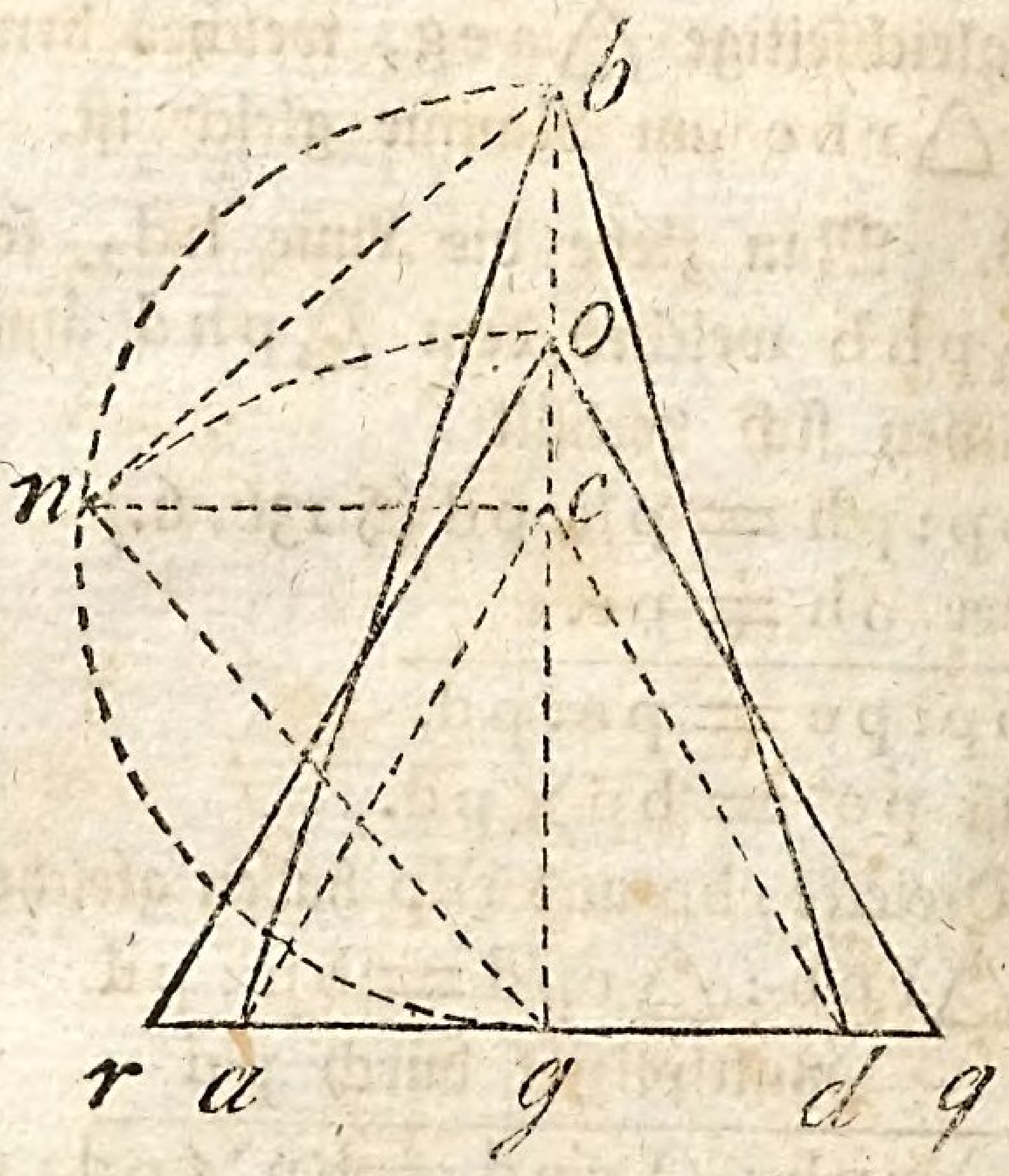
oder

$$\triangle rbc = \triangle aeg.$$

§ 400.

Aufgabe. Ein höheres gleichschenkliges $\triangle$ abd in ein niedrigeres gleichseitiges $\triangle$ roq zu verwandeln.

(Siehe Fig. auf folg. Seite.)



Auflösung. Man fasse 1. mit dem Zirkel die Grundlinie ad des △abd, und mache damit ein gleichseitiges △acd. Hierauf ziehe man 2. die Höhe bg und reiße um dieselbe aus ihrer Mitte den halben Kreis gnb. Lasse 3. aus der Spitze c des △acd eine senkrechte Linie nach dem halben Kreise, nach dem Punkte n, hinfallen. Man trage 4. die Weite gn nach o, und ziehe endlich 5. durch diesen Punkt o Parallellinien mit ac und cd, so entstehet das gleichseitige △roq, welches am Raume dem gleichschenkligen △abd gleich ist.

Beweis. Man ziehe die Linie nb, so entstehet das △gnb ∼ △gnc, und in welchen sich verhält cg : ng = ng : gb.

Nun ist aber ng = go

$$cg : go = go : gb$$

also $go^2 = cg \times gb$.

Ferner die Dreiecke gac und gab haben gleiche Höhen.

Daher $\triangle gac : \triangle gab = gc : gb$

multiplizirt durch gc

so ist $\triangle gac : \triangle gab = gc^2 : gb \times gc.$

Nun ist aber $go^2 = gb \times gc.$

Also $\triangle gac : \triangle gab = gc^2 : go^2.$

Da $ac \# ro$ ist,

So ist $\triangle agc : \triangle gro = gc^2 : go^2;$

Daher $\triangle gac : \triangle gab = \triangle gac : \triangle gro$

Nun ist aber $\triangle gac = \triangle gac.$

Folglich $\triangle gab = \triangle gro.$

Eben so ist $\triangle gbd = \triangle goq$

$\triangle gab + \triangle gbd = \triangle gro + \triangle goq$

oder

$\triangle abd = \triangle roq.$

§ 401.

Zusatz. Da sich nun jedes Dreieck in ein gleichschenkliges, und jedes Viereck und Vieleck in ein Dreieck verwandeln läßt, so muß sich auch jede Figur in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln lassen *).

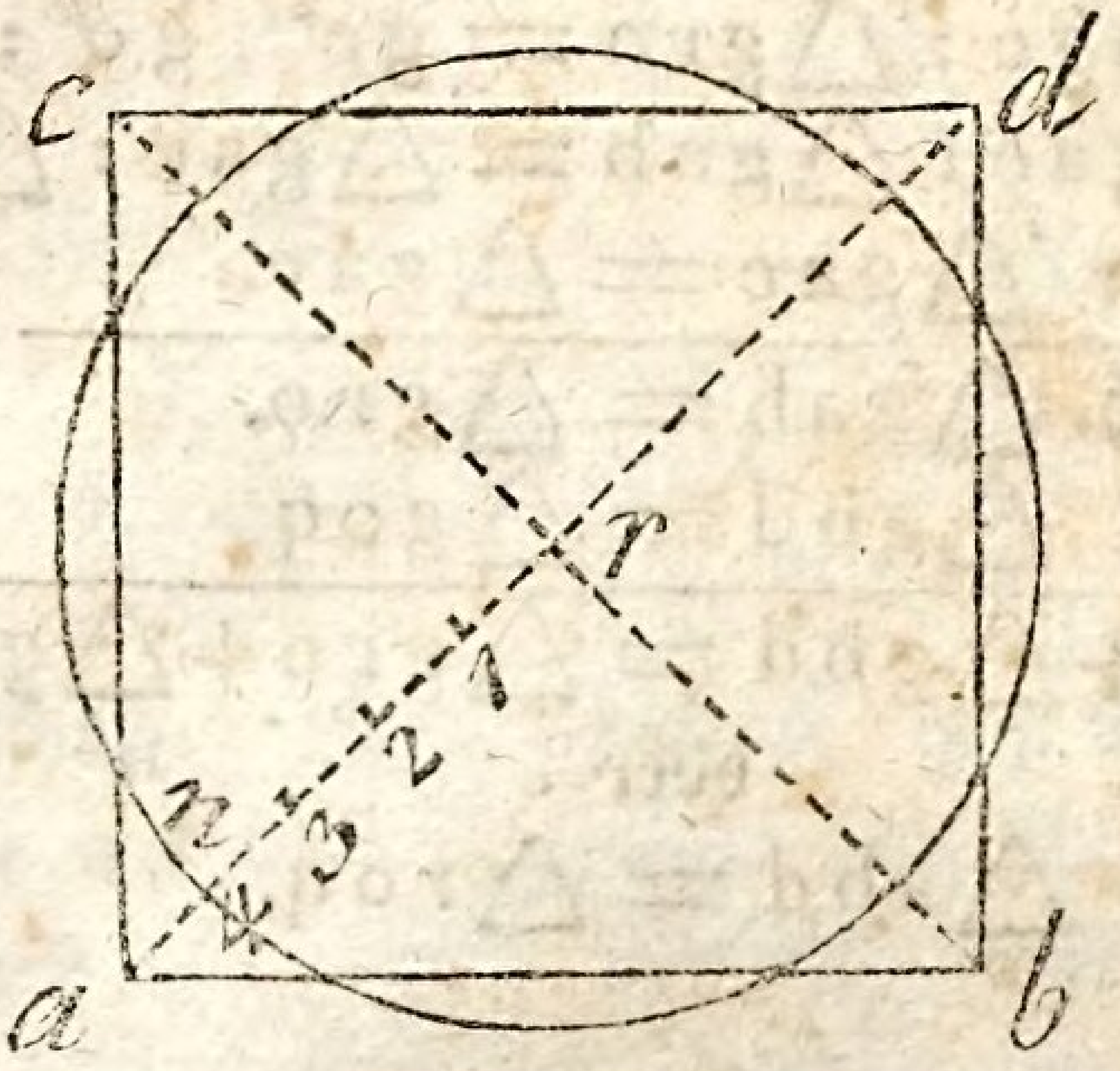
---

*) Diese Verwandlungsart eines gleichschenkligen Dreiecks in ein gleichseitiges konnte ich bei den Verwandlungen der Dreiecke in den §§ 44 — 54 noch nicht anführen, weil mir dazu der Lehrsatz im § 136 im 2ten Abschnitte noch fehlte; und dieselbe hier anzuführen, wo von der Theilung der Figuren die Rede war, hielt ich nicht für zweckmäßig, daher blieb mir nichts übrig, als diese Zusätze dazu zu wählen.

b) Zu denen des Vierecks.

§ 402.

Aufgabe. Ein Quadrat in einen Kreis zu verwandeln.



Auflösung. Man theile die Diagonallinie des Quadrats in 10 gleiche Theile, und nehme von diesen 4 Theile zu dem Halbmessers des Kreises, und reiße mit denselben einen Kreis, so ist dieser gleich dem Quadrate.

§ 403.

Zusatz. Da sich das Quadrat des Durchmessers zur Kreisfläche verhält, wie 1000 zu 785, oder wie 14 zu 11, so kann man auch nach § 167 zwischen 14 und 11 die mittlere Proportionallinie suchen, welche alsdann gleich dem Durchmesser des Kreises ist.

§ 404.

Aufgabe. Einen Kreis in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man theilt entweder den Durchmesser des Kreises in 8 gleiche Theile und nimmt solcher 10 Theile zur Diagonallinie des einen Quadrats, oder man sucht zwischen 11 und dem Durchmesser des Kreises, als mittlern Proportionallinie, die vierte Proportionallinie, welches sowol arithmetisch wie auch geometrisch, nach den §§ 169 und 173, geschehen kann.

Zusätze.

Da $\pi = 3{,}1415926\ldots$ ist, so ist

1. $2\pi = 6{,}2831853\ldots$

2. $\frac{\pi}{2} = 1{,}57079\ldots$

3. $\frac{\pi}{3} = 1{,}04719\ldots$

4. $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots$

5. $\frac{1}{2\pi} = 0{,}1591549\ldots$

6. $\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ldots$

7. $\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}564189\ldots$

8. $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 1{,}2407009\ldots$

Wird dieser Werth von π in die Gleichungen vom Kreise und in die von den Körpern, bei welchen eine Kreisfläche oder π vorkommt, gesetzt, so kann man sich bei jenen Berechnungen große Erleichterungen in dem Rechnen selbst verschaffen, indem man von jenen Formeln von π nur höchstens 3 Dezimalstellen anzunehmen braucht, weil man dadurch schon hinlängliche Genauigkeit erhält.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite 11 Zeile 6 von oben: o + u + x statt oux
— 19 — 11 von unten ac st. bc
— 23 Bei dem Trapezium sind ac, cd und db sich gleich
— 41 — 3 v. u. x st. ae
— 43 In dem △ABC heißt der dritte Winkel r bei o
— 52 — 7 v. u. 4) die Weite BC aus G nach F, und ziehe FG und EF, so ist — statt 4) die Weite BC u. s. w.
— 53 — 6 v. o. Ist dieses geschehen, statt ist dieses
— 53 — 4 v. u. ac gleich ist, und ziehe cb. Alsdenn ꝛc.
— 54 In der untern Figur muß die Spitze des Dreiecks r statt o heißen
— 55 — 10 v. u. gf statt gh
— 55 — 7 v. u. 4. Mit diesem Schenkel ad statt mit dieser Linie
— 58 — 6 v. o. §. 34 statt § 35.
— 68 An der untern Figur muß a statt o stehen
— 90 — 13 v. u. □U statt □V
— 93 — 1 v. o. wovon st. woran
— 99 — 8 v. u. ab^2 statt aq^2
— 100 — 8 v. o. 3, 4 statt 34
— 100 — 3 v. u. Ist die Cathete st. ist die
— 113 — 9 v. o. der Grundlinie Hülfslinien hin st. Grundlinie hin
— 119 — 1 v. o. △grf statt gef
— 127 — 4 v. u. △nds statt nbs
— 129 — 2 v. u. in den Punkt st. in dem
— 131 — 2 v. u. parallel mit CD, so verhält sich AD : DB = AC : CE statt CB
— 133 — 3 v. o. □ ADKG statt ADHG
— 133 — 8 v. u. die senkrechte Linie st. senkrechte

Seite 134 Zeile 2 v. o. $R = 90^{\circ}$ statt $R\ 90^{\circ}$
— 139 — 8 v. o. in 5 gleiche Theile, statt in 4 gleiche
— 140 — 2 v. o. n, m, q und p statt n, m und q
— 3 v. o. ahx und estx statt ahx
— 3 v. u. Aber $\triangle bnc = \frac{1}{5} \triangle abc$ also auch $\triangle cdy = \frac{1}{5} \triangle abc$
— 141 — 1 v. u. wenn die Theilungslinien mit der Seite, oder diese wenn sie mit der ꝛc.
— 144 — 3 v. u. bd statt cd
— 145 — 6 v. o. q, u und o statt r, u und o
— 147 — 2 v. o. hf statt ab
— 147 An der Figur muß nq statt ng stehen
— 148 — 1 v. u. $\frac{EL + CD}{2} \times Cq$ statt $\frac{EL \times CD}{2} Cq$
— 149 — 6 v. o. $\frac{Em + Cn}{2} h$ statt $\frac{Em + En}{2} h$
— 8 v. u. durch 4 st. durch 6
— 154 — 12 v. u. $\triangle aqd = \frac{1}{4} \triangle acn$ also auch $\triangle atq = \frac{1}{4} \triangle abn$
— 164 — 8 v. u. $ab : bp = bp : bc$ statt $ab : bq = bq : bc$
— 9 v. u. bp^2 statt bq^2
— 167 — 5 v. u. nach § 175 st. § 173
— 173 — 1 v. o. § 182 statt § 135
— 178 — 14 v. u. dividiren, und den dadurch gefundenen Winkel an den Mittelpunkt setzen;
— 183 — 6 v. u. nach eben st. nach nach eben
— 192 — 1 v. u. pb statt pq
— 199 — 10 v. u. $gr^2 = 80^2$ statt 84^2
$gr = \sqrt{80} = 8^{\circ} 9'$
— 210 — 8 v. o. $\frac{11664''}{2}$ statt $\frac{11664}{4}$
— 217 — 6 v. o. $\frac{bh}{2}$ statt bh

Seite 221 Zeile 2 v. u. Zusatz st. Zusas

— 227 — 4 v. u. $\frac{2\sqrt{T} \times \sqrt[4]{27}}{3}$ statt $\frac{2\sqrt{T} \times \sqrt{27}}{2}$

— 228 — 12 v. u. den Flächeninhalt T statt F

— 230 — 2 v. o. $\frac{\sqrt{(4h^2+b^2)}}{2}$ st. $\frac{\sqrt{(h^2+b^2)}}{2}$

— 230 — 7 v. u. $h = \sqrt{\left(\frac{c^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{c^4}{4} - T^2\right)}\right)}$ statt $h = \sqrt{\frac{c^2}{4}} \ldots$

— 234 — 6 v. o. cf statt ef

— 234 — 13 v. u. nach No. 4 statt No 2

— 234 — 15 v. u. nach No. II statt No. I

— 234 — 6 v. u. ∠ bde statt bed

— 234 — 4 v. u. ∠ bde statt bed

— 241 — 2 v. o. im Dreiecke st. in Dreiecke

— 253 — 9 v. o. $\frac{2RR\pi}{2} = \frac{2R^2\pi}{2}$ statt $2RR\pi = 2R^2\pi$

— 257 — 8 u. 10 v. u. ab statt ad

— 259 — 2 v. o. Bezeichnungen st. Beziehungen

— 261 — 6 v. o. $A = \frac{bR}{2}$ statt $A = \frac{6R}{2}$

— 263 — 8 v. u. 52′ 734″ statt 52′ 34″

— 265 — 7 v. u. 2, S = statt 2 S =

— 265 — 5 v. u. 3. F statt 2. F

— 266 — 10 v. o. $\sqrt{\frac{95256''}{6}}$ st. $\frac{95256''}{6}$

— 276 — 15 v. o. wie solches im § statt wie im §

— 277 — 9 der verlangten Seite des Prisma's, zu welcher die Höhe desselben gesucht werden muß.

Seite 282 Zeile 1 v. u. wo ausgelassen ist:

$$= \left(\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G}}\right) H$$

$$= \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G}} \times \frac{\mathfrak{H}\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

nach No. 7.

— 284 — 16 $= \left(\frac{gS^2}{s^2} + \frac{gS}{s} + g\right)\frac{\mathfrak{H}}{3}$ st. $g\,\frac{S^2}{s^2}\ldots$

— 17 $G = \frac{gS^2}{s^2}$ statt $g\,\frac{S^2}{s^2}$

— 286 — 12 v. u. abdefg statt abcdefg

— 9 v. u. qrnpvtl statt qrnpt

— 297 — 4 v. u. und der Höhe st. und Höhe

— 317 — 6 v. u. EQ statt EP

— 318 — 2 v. o. rp statt EN

— 322 An der Figur muß r bei a statt c stehen.

314
44
1256
1256
138,16

$K = p \times \frac{d}{4} = p \times \frac{r}{2}$

$\frac{p r^2 \pi}{7}$

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gelpke, August Heinrich Christian

Lehrbuch über die vornehmsten Aufgaben aus der Ebenen- und Körper-Geometrie nebst den dazugehörigen Beweisen und Erklärungen für Schulen und zum Selbstunterrichte ; mit 1 Tabelle

Leipzig 1818

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.157
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739986-3